

# 論文審査の結果の要旨

氏名 久良 尚任

本論文は、全7章からなる。第1章は序論、第2章は量子推定理論と量子計測に関する概説、第3章は関数推定に関する先行研究の概説、第4章は多パラメータのハミルトニアン推定における量子推定理論の定式化、第5章は位置依存位相シフトゲートに対する関数推定の理論解析、第6章は量子エッジ検出の理論解析、第7章が結論という構成である。

量子計測は、量子メトロロジーまたは量子度量衡学とも呼ばれ、量子力学の特性を利用した量子測定を用いて、より精密な計測を行うことを目的とする。量子推定理論は、様々な設定の量子計測における推定誤差の限界を導く理論である。パラメータ推定の量子推定理論としては、推定誤差の下限として、エンタングルメントを持たない量子状態をプローブとした際に得られる標準量子限界と、エンタングルメントを持ちうる一般的な量子状態をプローブとした際に得られるハイゼンベルグ限界が知られており、これらの間にギャップが存在する。しかし、時間的または空間的に変化する物理量などに対応する連続データに対する量子計測については、これまで量子推定理論が確立していなかった。

本論文の第4章では、予備的な研究として多パラメータのハミルトニアン推定に対する量子推定理論を定式化し、量子メモリを用いない場合において、直列的にハミルトニアン動力学を用いる方法（直列スキーム）と、並列的にハミルトニアン動力学を用いる方法（並列スキーム）における推定誤差の下限を導出した。先行研究においては、ある一定時間のハミルトニアン動力学を単純にユニタリ変換の1回分と換算し、かつ並列スキームでは適応的な測定を行わない場合を考察して、ユニタリ変換の総使用回数が同じ場合には、直列スキームを用いると系の次元 $d$ に対して推定誤差が $O(d^{1/2})$ 倍改善されることが示されていた。これに対して本論文では、ハミルトニアン動力学の再帰性を考慮し、また適応推定を活用することで、ハミルトニアン動力学の延べ時間が同じ場合には、並列スキームを用いても直列スキームと同様の次元 $d$ に関するスケーリングでの推定誤差で量子計測を行うことができることを、プロトコルを構築して示した。この結果は、先行研究の示唆とは反対に、量子メモリを用いないハミルトニアン動力学推定においては、量子計測の並列化が可能であることを示した点で興味深い結果である。

本論文の第5章では、関数推定の概念を量子計測に拡張することで、連続データの量子計測における量子推定理論の構築を行った。具体的には、位置に依存する未知の関数 $\varphi(x)$ を位相シフトとするユニタリゲート $e^{i\varphi(x)}$ を実行する物理系が与えられた際に、量子測定を行って得られるデータから、関数 $\varphi(x)$ の平均二乗誤差を最小とする推定を行うための量子推定理論を新たに構築した。本論文の第3章で解説されたように、関数推定では、推定する関数のなめらかさに対する仮定である正則性の条件を課し、その下で局所線形平滑化に

よって離散的な測定値から関数全体を推定する。関数解析的な正則性として、 $m$ 階微分可能性を拡張した、関数のなめらかさの指標 $q > 0$ に対する $q$ -Hölder 連続性の概念が用いられる。 $q$ -Hölder 連続性を仮定した場合には、単位区間あたりの計測数が $K$ のとき $O(K^{-q})$ の誤差で局所線形平滑化できることが知られていた。本論文では、 $q$ -Hölder 連続性と量子力学の二乗可積分性を組み合わせることにより、 $q$ に加えて別のなめらかさの指標 $M$ を含む、量子計測に適した関数の正則性の定義である $(M, q)$ -正則性を導入した。そして、局所線形平滑化により本論文の第4章で解析した多パラメータ推定の問題に帰着させ、位置状態法と波数状態法の二つの具体的な計測手法を提案することにより、推定誤差の理論限界を導出した。 $N$ 粒子の波動関数を用いる場合には、位置状態法と波数状態法( $q \leq 1$ )のいずれの方法を用いても、エンタングルメントを持たない量子状態をプローブとした際に得られる標準量子限界が $O(M^{-1/(2q+1)}N^{-q/(2q+1)})$ 、より一般的な量子状態をプローブとした際に得られるハイゼンベルグ限界が $O(M^{-1/(q+1)}N^{-q/(q+1)})$ となることを示した。量子系における連続データの関数推定の概念の提唱から量子推定理論の構築、興味深い解析結果の導出に至る本章の研究成果は、先行研究とは一線を画す独創的な結果であり、高く評価できる。

本論文の第6章では、前章で得られた量子計測による関数推定の現実的な問題への応用として、位置依存位相シフトゲートの量子エッジ検出を考察した。量子エッジ検出とは、関数において急峻な変化が起こっているエッジを量子計測によって検出することを目的とする。本論文では、特定の長さスケール $s$ に対する情報を取り出すことのできるウェーブレット測定を用いた量子エッジ検出の定式化を行い、測定精度を解析した。ウェーブレット測定は、適切な初期状態から位置依存位相シフトゲートを作用させた状態に対する運動量のスペクトル測定に対応し、運動量の期待値が極値をとる位置がエッジに対応する。まず1粒子系について解析し、ウェーブレット測定の誤差が位置の誤差と運動量の誤差の合計で表されることから、その誤差限界が位置と運動量の不確定性原理によって決まることを示した。次に $N$ 粒子の場合の誤差限界を解析し、エンタングルメントを持たない状態と一般の状態を用いた場合のウェーブレット測定の誤差限界を比較した。その結果、位置の誤差を無視できる場合は、ハイゼンベルグ限界を得るが、 $s$ と $N$ が大きい場合には、エンタングル状態を用いてもハイゼンベルグ限界が達成できないことが判明した。また光学系での実装について考察した。この結果もオリジナリティが高く、量子イメージングなどへの応用も期待できることから、今後さらなる発展可能性を持つ優れた結果であると判断する。

以上により本論文は、連続データの量子推定理論を構築したことにより、量子推定理論に対して新しい知見を与えたと評価できる。よって本論文は、博士論文として十分な内容を持つものと審査委員全員が認めた。

なお、本論文の第4章から第6章で示した研究は、上田正仁教授との共同研究であるが、論文提出者が主体となって分析および検証を行ったもので、論文提出者の寄与が十分であると判断する。

したがって、博士（理学）の学位を授与できると認める。