論文の内容の要旨

論文題目　Intersection and displacement energy of rational Lagrangian immersions via sheaf quantization
（層量子化による有理的ラグランジュはめ込みの交叉と分離エネルギーの研究）

氏　　名　浅野　知紘

1　超局所層理論とシンプレクティック幾何への応用に関する背景

超局所層理論は多様体上の層の特異性を解析するための理論であり, 柏原と Schapira によって確立された [KS90]. そこでは層に対してその特異性を表すマイクロ台が余接束の部分集合として定義され, これによって層係数コホモロジーのモース理論的取り扱いが可能となる.

Tamarkin [Tam08] は余接束内の部分集合の non-displaceability を超局所層理論によって証明する手法を与えた. この先駆的な仕事の後, このおよそ 10 年間, 余接束に対するシンプレクティック幾何における主張が超局所層理論を用いて証明および再証明されてきた. Guillermou-柏原-Schapira[GKS12] は斉次なハミルトンアイソトピーのグラフをマイクロ台にもつ層の導来圏の対象 (以下, これを単に層と呼ぶ) を構成し, これを積分核として用いることで, ハミルトンアイソトピーを底空間上の層に作用させることを可能にした. Guillermou[Gui12, Gui19] と Viterbo[Vit19] はそれぞれ独立に, 余接束内のコンパクト完全ラグランジュ部分多様体に対しその錐をマイクロ台にもつ層を構成した. Guillermou はこの対象を用いてコンパクト完全ラグランジュ部分多様体が底空間とホモトピー同値であることの新証明を与えた.

また, 我々は [AI17] において, [Tam08] およびその議論を簡明化した [GS14] で行われた議論を定量的な観点から見直すことで余接束における分離エネルギー (displacement energy) を層を用いて下から評価する手法を与えた. しかし, ここでは良い評価を与える層の存在や構成については何も主張していなかった.

2　主定理

本論文では, 良いクラスのラグランジュはめ込みに対して層を構成し, これを用いて分離エネルギーの評価に加え交点数の評価も行った.

境界のない多様体 M の余接束 T^*M の Liouville 1-形式を α とし, シンプレクティック形式を $\omega = d\alpha$ とおく. コンパクト台をもつハミルトン関数 $H = (H_s)_{s\in[0,1]} \colon T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ は時間変化するハミルトンベクトル場 $X_H = (X_{H_s})_s$ を定め, それが生成するハミルトンアイソトピー $\phi^H = (\phi^H_s)_s \colon T^*M \times I \to T^*M$ を定義する. またハミルトン関数 H に対しそのノルムを

$$\|H\| := \int_0^1 \left(\max_p H_s(p) - \min_p H_s(p) \right) ds$$

によって定義する. 定義域がコンパクトかつ連結なラグランジュはめ込み $\iota\colon L \to T^*M$ に対し,

$$\Sigma_\iota := \left\{ (v, \bar{v}) \;\middle|\; \begin{array}{l} v\colon D^2 \to T^*M, \bar{v}\colon \partial D^2 \to L, \\ v|_{\partial D^2} = \iota \circ \bar{v} \end{array} \right\},$$

$$K_\iota := \left\{ (v, \bar{v}) \;\middle|\; \begin{array}{l} v\colon D^2 \to T^*M, \bar{v}\colon [0,1] \to L, \\ \bar{v}(0) \neq \bar{v}(1), \iota \circ \bar{v}(0) = \iota \circ \bar{v}(1), \\ v|_{\partial D^2} \circ \exp(2\pi i -) = \iota \circ \bar{v} \end{array} \right\}$$

をそれぞれ定義する. はめ込み ι が**有理的**であるとは, 非負実数 σ であって

$$\left\{ \int_{D^2} v^*\omega \;\middle|\; (v,\bar{v}) \in \Sigma_\iota \right\} = \sigma_\iota \mathbb{Z}$$

を満たすものが存在することを言う. また有理的なラグランジュはめ込みに対し, $e_\iota \in [0,\infty]$ を

$$e_\iota := \inf \left(\left(\left\{ \int_{D^2} v^*\omega \;\middle|\; (v,\bar{v}) \in K_\iota \right\} \cup \{\sigma_\iota\} \right) \cap \mathbb{R}_{>0} \right)$$

によって定義する.

主定理を述べる前に, ι に対する次の仮定を用意しておく.

仮定 2.1. 円盤 $(v,\bar{v}) \in K_\iota$ であって $\int_{D^2} v^*\omega = 0$ なるものは存在しない.

本論文の主定理は次の二種類の交点数の評価である.

定理 2.2 (cf. Chekanov [Che98], 赤穂 [Aka15])**.** 定義域がコンパクトなラグランジュはめ込み $\iota \colon L \to T^*M$ であって仮定 2.1 をみたすものを考える. もし $\|H\| < e_\iota$ かつ ι と $\phi_1^H \circ \iota$ が横断的に交わるなら,

$$\#\left\{ (y,y') \in L \times L \;\middle|\; \iota(y) = \phi_1^H \circ \iota(y') \right\} \geq \sum_{i=0}^{\dim L} b_i(L)$$

が成り立つ. ただしここで $b_i(L)$ は L の $\mathbb{F}_2$ 上の i 次ベッチ数である.

この定理の自明な系として像 $\iota(L)$ の分離エネルギーの下からの評価も与えられる.

定理 2.3 (cf. Liu [Liu05])**.** 定義域がコンパクトなラグランジュはめ込み $\iota \colon L \to T^*M$ であって仮定 2.1 をみたすものを考える. もし $\|H\| < \min\left(\{e_\iota\} \cup (\{\sigma_\iota/2\} \cap \mathbb{R}_{>0})\right)$ ならば,

$$\#\left\{ (y,y') \in L \times L \;\middle|\; \iota(y) = \phi_1^H \circ \iota(y') \right\} \geq \mathrm{cl}(L) + 1$$

が成り立つ. ただしここで $\mathrm{cl}(L)$ は L の $\mathbb{F}_2$ 上のカップ長である.

これら主定理は, Chekanov [Che98], Liu [Liu05], 赤穂 [Aka15] らの Floer 理論による結果と重なる部分が大きい. Chekanov および赤穂は交叉が横断的な場合を, それぞれ ι が埋め込みであることおよび $\sigma_\iota = 0$ を仮定して扱っており, Liu は交叉が横断的とは限らないを ι が埋め込みの場合を扱っている. 本論文の主結果は, 余接束とは限らないシンプレクティック多様体に対して Floer 理論を用いた証明が可能と思われるが, その証明のみならず主張としても新しいものになってる.

3 証明の概略

証明は次の 3 つの段階からなる. (1) ラグランジュはめ込みに対して層を対応させる. (2) この層と, これにハミルトンアイソトピーを作用させた層から, 元のはめ込みの自己交叉の情報をもつ層とアイソトピーの前後同士の交叉の情報を持つ層を構成し比較する. (3) 自己交叉の情報をもつ層が $H^*(L)$ をある意味で含むことを確認し, アイソトピーの前後同士の交叉の情報を持つ層における交叉 1 点あたりの寄与を計算する.

(1) は [Gui19] の議論に沿って行うが, マスロフ指数由来の障害が存在するため, 通常の導来圏としての対象としては構成できず, 三角軌道圏 [Kel05] とよばれる導来圏の任意の対象がそのシフトと同型になるようにした新たな三角圏の対象として構成される. また良い評価を与えるためには, 族のパラメータを組み込みながら層を構成する必要がある.

(2) は [AI17] の議論を三角導来圏に対し, 族のパラメータを組み込みつつやり直すことによってなされる. また, はめ込み有理性のために $\mathbb{R}$ を S^1 に取り直す必要もある.

(3) の計算のためには交叉の寄与を μhom とよばれる余接束上の層と対応付ける. これは池 [Ike17] の計算に依ってなされる. カップ長による評価のためには, 単に μhom の大域的なコホモロジーだけでなく, 余接束における局所的な性質も用いる. これは, [AI17] や [Ike17] では用いられなかった新しい議論であり, Floer 理論による議論と比べても直截的である.

参考文献

[AI17] T. Asano and Y. Ike, Persistence-like distance on Tamarkin's category and symplectic displacement energy, *arXiv preprint arXiv:1712.06847*, (2017).

[Aka15] M. Akaho, Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions, *arXiv preprint arXiv:1505.06560*, (2015).

[Che98] Y. V. Chekanov, Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves, *Duke Math. J.*, **95** (1998), no. 1, 213–226.

[GKS12] S. Guillermou, M. Kashiwara, and P. Schapira, Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems, *Duke Math. J.*, **161** (2012), no. 2, 201–245.

[GS14] S. Guillermou and P. Schapira, Microlocal theory of sheaves and Tamarkin's non displaceability theorem, In *Homological mirror symmetry and tropical geometry*, Vol. **15** of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.* 43–85, Springer, Cham, 2014.

[Gui12] S. Guillermou, Quantization of conic Lagrangian submanifolds of cotangent bundles, *arXiv preprint*, `arXiv:1212.5818v2`, (2012).

[Gui19] S. Guillermou, Sheaves and symplectic geometry of cotangent bundles, *arXiv preprint arXiv:1905.07341*, (2019).

[Ike17] Y. Ike, Compact exact Lagrangian intersections in cotangent bundles via sheaf quantization, *arXiv preprint arXiv:1701.02057*, (2017).

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Vol. **292** of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Kel05] B. Keller, On triangulated orbit categories, *Doc. Math.*, **10** (2005), 551–581.

[Liu05] C.-G. Liu, Cup-length estimate for Lagrangian intersections, *J. Differential Equations*, **209** (2005), no. 1, 57–76.

[Tam08] D. Tamarkin, Microlocal condition for non-displaceability, *arXiv preprint*, `arXiv:0809.1584`, (2008).

[Vit19] C. Viterbo, Sheaf quantization of Lagrangians and Floer cohomology, *arXiv preprint arXiv:1901.09440*, (2019).