論文の内容の要旨

論文題目：Magnitude homology and Vietoris-Rips homology of geodesic metric spaces

（測地的距離空間のマグニチュードホモロジー及びヴィートリス・リップスホモロジー）

氏名：浅尾　泰彦

マグニチュードは 2000 年代に Leinster([6]) によって提案された豊穣圏の不変量であり, 有限集合の位数, ベクトル空間のランク, 位相空間のオイラー数を一般化した概念である. 一方で 0 以上の実数集合 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は加法について対称モノイド圏をなし, 一般の距離空間は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の豊穣圏とみなすことができる. 本論文では $\mathbb{R}_{\geq 0}$-豊穣圏とみなした距離空間のマグニチュード, 及びその圏化であるマグニチュードホモロジーについて考察する. また現在のホモロジー論の端緒の一つでもあり ([9]), 近年位相的データ解析の観点から再び注目の集まっている Vietoris-Rips ホモロジーを, マグニチュードホモロジーの変種とみなし統一的に扱うことを目指し, お互いに類似した性質を持つことを確かめる. まず有限距離空間に対するマグニチュードは次にようにして定義される.

定義 . (Leinster [6]) 位数有限の距離空間を有限距離空間と呼ぶ. 有限距離空間 (X, d) に対して, 行列 A_X を $e^{-d(x,y)}(x, y \in X)$ を要素とする対称行列として定める. 行列 A_X が可逆の時, X のマグニチュードは逆行列 A_X^{-1} の要素の和として定義される. また実数 $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して距離空間 (X, td) のマグニチュードを t に関する関数とみて X のマグニチュード関数と呼ぶ.

マグニチュード関数は $[0, \infty]$ に値をとる関数として全ての有限距離空間に対して定義できる. またマグニチュードは有限距離空間の「本質的な位数」を与えることが Leinster によって指摘されている. 例えば 3 点距離空間で 2 点がもう 1 点に比べて極端に近い時には, この距離空間は本質的に 2 点で構成されていると言える. 実際にマグニチュードはこの状況を反映する. 続いてマグニチュードホモロジーについて説明する. マグニチュードホモロジー MH_n^{ℓ} は Hepworth-Willerton と Leinster-Shulman ([4], [7]) によって定義された, 実数 $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と整数 n によって次数付けられた二重次数付き加群である. マグニチュードホモロジーは全ての距離空間に対して次のように定義される. (X, d) を距離空間とする.

定義. X のマグニチュード鎖複体

$$(MC^{\ell}_{*}(X), \partial_{*} := \sum_{i=1}^{*}(-1)^{i}\partial^{i}_{n})$$

とは $\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) = \ell$ を満たす組 $(x_0, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$ で生成された次数付き自由 $\mathbb{Z}$-加群であり, 微分が

$$\partial^{i}_{n}(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) & d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, x_{i+1}) = d(x_{i-1}, x_{i+1}) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定義される. マグニチュード鎖複体のホモロジーは X のマグニチュードホモロジーと呼ばれ, $MH^{\ell}_{*}(X)$ と書く.

有限距離空間 X に対しては「オイラー数」$\sum_{\ell,n}(-1)^{n}\mathrm{rank}MH^{\ell}_{n}(X)e^{-\ell t}$ が X のマグニチュード関数と等しくなるという意味で, マグニチュードホモロジーはマグニチュードの圏化となっている. マグニチュードホモロジーのその他の性質については未解明の部分が多い.

本論文では基礎的な事項に関する準備の後, 第 2 章でマグニチュードホモロジーの変種である「ぼかしマグニチュードホモロジー」に対するホモトピー不変性について考察する. ぼかしマグニチュードホモロジーは Otter([8]) によって提案された概念であり, 次のように定義される.

定義. (X, d) を距離空間とする. $\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \ell$ を満たす組 $(x_0, \cdots, x_n)$ を n-単体とする単体的集合を考え, 付随する鎖複体を $(MC^{\leq\ell}_{*}(X), \partial^{\leq\ell}_{*})$ と書く. そのホモロジーを $MH^{\leq\ell}_{*}(X)$ と書き X のぼかしマグニチュードホモロジーと呼ぶ. 同様に $(MC^{<\ell}_{*}(X), \partial^{<\ell}_{*})$ を $\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) < \ell$ を満たす組 $x = (x_0, \cdots, x_n)$ からなる鎖複体とし, そのホモロジー $MH^{<\ell}_{*}(X)$ もぼかしマグニチュードホモロジーと呼ぶ.

ぼかしマグニチュードホモロジーもまたあまり性質の知られていない対象であり, この対象からマグニチュードホモロジーについて情報を得られることが簡単なホモロジー代数からわかる. 一方で「距離を縮めるホモトピーで可縮な距離空間」を次のように定義する.

定義. (Hausmann [3]) 距離空間 X が可壊であるとは, 次の条件を満たす写像 $F : X \times [0, 1] \longrightarrow X$ が存在することを言う.

1. $F(x, 1) = x$ for all $x \in X$,
2. $F(x, 0) = a$ for all $x \in X$,
3. $F(a, t) = a$ for all $t \in [0, 1]$,
4. $d(F(x, s), F(y, s)) \leq d(F(x, t), F(y, t))$ for all $x, y \in X$ and $s \leq t \in [0, 1]$.

この章の主定理は次のように述べられる.

定理 . 距離空間 (X, d) が可壊であれば全ての $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$ と $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$MH_n^{<\ell}(X) = 0$$

が成り立つ.

証明には特異ホモロジー論の技術を応用する. 系としてユークリッド空間や双曲空間のぼかしマグニチュードホモロジーが 0 であることがわかる.

続いて第 3 章では測地的距離空間のマグニチュードホモロジーについて考察する.「断面曲率 κ 以下である Riemann 多様体」を一般化した概念である CAT(κ) 空間について, パラメータ ℓ が小さいときにはマグニチュードホモロジーが消えることを示す. またこのような距離空間に対してマグニチュードホモロジーが測地線の一意性を反映することを示す. いくつか記号の準備をする. 4 つ組 $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in X^4$ は (1) $x_i \neq x_{i+1}$ for $0 \leq i \leq 2$, (2) $d(x_i, x_{i+2}) = \sum_{j=i}^{i+1} d(x_j, x_{j+1})$ for $0 \leq i \leq 1$, (3) $d(x_0, x_3) < \sum_{j=0}^{2} d(x_j, x_{j+1})$ を満たすとき 4 切断と呼ばれる. m_X を 4 切断の長さ $\sum_{j=0}^{2} d(x_j, x_{j+1})$ の下限とする. これは Kaneta-Yoshinaga ([5]) による定義である. l_X を測地線であって最短測地線でないものの長さの下限とする. D_κ を $\kappa > 0$ の時 $\pi/\sqrt{\kappa}$, $\kappa \leq 0$ の時 $+\infty$ と定める. 次がこの章の主定理である.

定理 . CAT(κ) 空間 (X, d) に対して

$$D_\kappa \leq m_X \leq l_X$$

が成立する.

Kaneta-Yoshinaga による結果と組み合わせることで系として次が得られる.

系 . (X, d) を CAT(κ) 空間とする. この時全ての $n > 0$ と $0 < \ell < D_\kappa$ に対して $MH_n^{\ell}(X) = 0$ が成り立つ.

また次も証明できる.

定理 . 半径 r の閉測地線が X の中に存在する時, $MH_2^{\pi r}(X) \neq 0$ である.

この章で得られる結果のほとんどは Gomi ([1], [2]) によるスペクトル系列の計算による結果と重複している. ただし用いている手法は全く異なっており, いくつかの CAT(κ) については彼の手法で取り扱うことができない可能性があることを付記しておく.

第 4 章では Vietoris-Rips ホモロジーを小さいパラメータについて, あるクラスの測地的距離空間に制限して考察する. まず Vietoris-Rips ホモロジーは次のように定義される.

定義 . (X, d) を距離空間とする. $\mathrm{diam}\{x_0, \cdots, x_n\} \leq \varepsilon$ を満たす組 $(x_0, \cdots, x_n)$ を n-単体とする単体的集合を考え, 付随する鎖複体を $(VC_*^{\leq \varepsilon}(X), \partial_*^{\leq \varepsilon})$ と書く. そのホモロジーを $VH_*^{\leq \varepsilon}(X)$ と書き X の Vietoris-Rips ホモロジーと呼ぶ. 同様に $(VC_*^{<\varepsilon}(X), \partial_*^{<\varepsilon})$ を $\mathrm{diam}\{x_0, \cdots, x_n\} < \varepsilon$ を満たす組 $(x_0, \cdots, x_n)$ からなる鎖複体とし, そのホモロジー $VH_*^{<\varepsilon}(X)$ も Vietoris-Rips ホモロジーと呼ぶ.

この定義はぼかしマグニチュードホモロジーの定義の変種と捉えることができる. また上記の定義は通常用いられるものと異なるが, この章ではこれらがホモロジーレベルで一致することをまず確認する. $r(X)$ を次の条件を満たす実数 r の上限とする:(1)$d(x, y) \leq r$ であるような点 x, y を結ぶ最短測地線が一意に存在する, (2)diam $\{x, y, z\} \leq r$ を満たす全ての 3 点 x, y, z と, y, z を結ぶ最短測地線上の全ての点 w に対して $d(x, w) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\}$ が成立する. 次がこの章の主結果である.

定理 . 全ての $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \leq r(X)$ に対して次の鎖複体の包含はホモトピー同値である:

$$VC_n^{<\varepsilon'}(X) \longrightarrow VC_n^{<\varepsilon}(X),$$

Hausmann による結果と組み合わせて次を得る。

系 . $r(X) > 0$ であるような測地的距離空間 X に対して

$$VH_*^{<\varepsilon}(X) \cong H_*(X; \mathbb{Z}),$$

が全ての $0 < \varepsilon \leq r(X)$ について成立する.

これらは第3章で得られたマグニチュードホモロジーに関する結果や, Otter による結果 $\lim\limits_{\leftarrow} MH_*^{<\ell}(X) \cong H_*(X; \mathbb{Z})$ の類似とみなすことができる.

References

[1] K. Gomi, *Smoothness filtration of the magnitude complex*, preprint, 2018, arXiv:1809.06593.

[2] K. Gomi, *Magnitude homology of geodesic space*, preprint, 2019, arXiv:1902.07044.

[3] J.-C. Hausmann, *On the Vietoris - Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces*, pages 175 - 188, Princeton U. Press, Princeton, 1995.

[4] R. Hepworth and S. Willerton, *Categorifying the magnitude of a graph*. Homology Homotopy Appl. 19 (2017), no. 2, 31 - 60.

[5] R. Kaneta and M. Yoshinaga, *Magnitude homology of metric spaces and order complexes*. preprint, arXiv:1803.04247, 2018.

[6] T. Leinster, *The magnitude of metric spaces*. Doc. Math. 18 (2013), 857 - 905.

[7] T. Leinster and M. Shulman, *Magnitude homology of enriched categories and metric spaces*. preprint, arXiv:1711.00802.

[8] N. Otter, *Magnitude meets persistence. Homology theories for filtered simplicial sets*, preprint, 2018, arXiv:1807.01540.

[9] L. Vietoris, *Uber den höheren Zusammenhang kompakter Raüme und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen, 97:454 - 472, 1927.