論文の内容の要旨

論文題目: Geometry of cluster modular groups
(クラスターモジュラー群の幾何学)

氏　名: 石橋　典

本論文は大きく分けて次の 3 つの部分からなる:

1. クラスターモジュラー群の元が定める力学系の研究 (第 3 章),
2. Weyl 群のクラスターモジュラー群への埋め込みとその高次 Teichmüller 理論への応用 (第 4 章〜第 6 章),
3. 有限変異型のクラスターモジュラー群の有限表示とクラスター Dehn ツイストによる生成 (第 7 章).

まず全ての部分に共通の背景を概説する.

■背景. 本論文の主な研究対象であるクラスターモジュラー群 $\Gamma_{\boldsymbol{s}}$ [FG09] は, 種子形態 (seed pattern) と呼ばれる組み合わせ論的なデータ $\boldsymbol{s}$ から定まる群である. 種子形態は Fomin–Zelevinsky [FZ02], Fock–Goncharov [FG09] らによって導入された種子 (seed) およびその変異 (mutation) をそれぞれ木の頂点および辺に対応させるものであり, またクラスターモジュラー群は変異ループ (mutation loop) のなす群として定義される. 種子形態から 2 種のクラスター多様体 (cluster variety) $\mathcal{A}_{\boldsymbol{s}}$, $\mathcal{X}_{\boldsymbol{s}}$ が定義され, クラスターモジュラー群はこれらのクラスター多様体に双有理同型として作用する. 各変異ループの作用はそれぞれクラスター $\mathcal{A}$-変換, $\mathcal{X}$-変換と呼ばれる正値写像として座標表示される. 半体 $\mathbb{P}$ に対して $\mathbb{P}$-値点の集合 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{P})$ および $\mathcal{X}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{P})$ が定義され, 上記の双有理作用からこれらの集合へのクラスターモジュラー群作用が誘導される. 多くの興味深い離散力学系がこれらの構成を通じて変異ループの作用として実現されることが知られており, 主に離散可積分系の観点から盛んに研究されている [FH14, ILP19].

一方で, これらの対象は Teichmüller-Thurston 理論における基本的な対象の組み合わせ論的な一般化を与えているとみなすことができる. 実際, 点付き曲面 (marked surface) Σ の理想三角形分割およびそれらのフリップを考えることにより種子形態 $\boldsymbol{s}_\Sigma$ が定まり, 曲面の Teichmüller 空間および測地的ラミネーションの空間の 2 種の拡張 (decorated space および enhanced space) がそれぞれクラスター多様体 ($\mathcal{A}_{\boldsymbol{s}_\Sigma}$,$\mathcal{X}_{\boldsymbol{s}_\Sigma}$) の適切な半体値集合と同一視される [Pen, FG07]. またクラスターモジュラー群 $\Gamma_{\boldsymbol{s}_\Sigma}$ は曲面の写像類群を有限指数の部分群として含む [BS15]. 私は参考論文 [Ish19] においてこれらの対応を用いて, 写像類群に対する Nielsen-Thurston 分類のクラスターモジュラー群に対する類似を与えた. 写像類に関する周期的, 可約, 擬 Anosov という 3 タイプの類似として変異ループに関する周期的, クラスター可約, クラスター擬 Anosov という 3 タイプを考察し, これらをクラスター多様体の正実数点からなる多様体 $\mathcal{A}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{R}_{>0})$ および $\mathcal{X}_{\boldsymbol{s}}(\mathbb{R}_{>0})$ のトロピカルコンパクト化への作用の固定点性質により特徴づけた. また, 写像類群における Dehn ツイストの類似としてクラスター Dehn ツイストと呼ばれる変異ループを導入した.

第 1 部: 符号安定性とクラスター変換の代数的エントロピー (第 3 章).

上述のクラスターモジュラー群に対する Nielsen–Thurston 分類において, クラスター擬 Anosov 性は擬 Anosov 性より少し弱いのが難点であった. すなわち曲面の写像類が擬 Anosov であれば対応する変異ループはクラスター擬 Anosov であるが, 逆は 1 点トーラスの場合を除き不成立であった. 本論文の第 1 部では変異ループに対する符号安定性 (sign stability) という新たな条件を導入し, その力学系的な性質を論じる. 曲面の写像類から定まる変異ループについて, 擬 Anosov 性と符号安定性は同値である [IK]. 符号安定な変異ループに対して, クラスター伸縮因子 (cluster stretch factor) と呼ばれる量を定義できる. 擬 Anosov 写像類から定まる変異ループのクラスター伸縮因子は写像類の伸縮因子に等しい. 次の定理が第 1 部の主結果である:

定理 1. 符号安定な変異ループに対し, 誘導されるクラスター $\mathcal{A}$-変換および $\mathcal{X}$-変換の代数的エントロピー は一致し, クラスター伸縮因子の log で与えられる.

この結果は擬 Anosov 写像類についてよく知られた結果である, 位相的エントロピーを伸縮因子の log で与える公式 (e.g. [FLP]) のクラスター代数における一般化である. 本論文ではこの定理の応用として, 長さ 1 の変異ループが符号安定となるための簡明な十分条件を与え Fordy–Hone [FH14] による代数的エントロピーに関する予想を部分的に解決する.

第 2 部: Weyl 群のクラスター実現と高次 Teichmüller 理論 (第 4 章〜第 6 章).

第 2 部はクラスターモジュラー群の具体例に関する研究である. 群 G のあるクラスターモジュラー群 $\Gamma_{\boldsymbol{s}}$ への埋め込みをクラスター実現と呼ぶ. 本論文の第 2 部では A_n 型およびアフィン A_n 型 Weyl 群に対する [ILP19] の構成を一般化することにより対称化可能 Kac–Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$ のクラスター実現を構成し, その性質および高次 Teichmüller 理論との関係を調べる.

まず対称化可能 Kac–Moody Lie 代数および整数 $m \geq 2$ に対し重み付き箙 $Q_m(\mathfrak{g})$ および各 Coxeter 生成元 $r_s \in W(\mathfrak{g})$ に対応する変異ループ $R(s) \in \Gamma_{Q_m(\mathfrak{g})}$ を構成する. 次の定理が第 2 部第一の主結果である:

定理 2.

1. 対応 $r_s \mapsto R(s)$ を拡張する単射群準同型 $\phi_m : W(\mathfrak{g}) \to \Gamma_{Q_m(\mathfrak{g})}$ が一意に存在する. また $w \in W(\mathfrak{g})$ に対応する変異列 $\phi_m(w)$ はクラスター $\mathcal{U}$-多様体 $\mathcal{U}_{Q_m(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{X}_{Q_m(\mathfrak{g})}$ に自明に作用する.
2. $\mathfrak{g}$ のルート格子 $L(\mathfrak{g})$ からクラスター $\mathcal{X}$-多様体上の単項 Poisson Casimir 関数のなす群 $Z(\mathcal{X}_{Q_m(\mathfrak{g})})$ への $W(\mathfrak{g})$-同変な埋め込みが存在する.

定理 2 の主張 1. から, 整数 $m \geq 2$ でパラメトライズされた Weyl 群のクラスター実現の族が得られる. この構成はクラスター $\mathcal{U}$-多様体に自明に作用する無限群の初めての例を与える. 特に作用は真性不連続でない. また主張 2. から, Weyl 群作用の最も基本的な例であるルート格子への作用がクラスター $\mathcal{X}$-多様体上の Casimir 関数への作用として実現されていることが分かる.

次に上記の Weyl 群実現と高次 Teichmüller 理論との関係について述べる. 点付き曲面 Σ および単連結な半単純代数群 G に対し, Σ 上の装飾付き捻れ G-局所系 (decorated twisted G-local system) のモジュライ空間 $\mathcal{A}_{G,\Sigma}$ は Σ の理想三角形分割その他のデータに付随した特別な双有理座標系を持ち, 適切な重み付き箙の変異類 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\Sigma}$ に付随したクラスター $\mathcal{A}$-多様体に双有理同型である [FG03, Le16].

ここで重要な観察は, $m = h$ が Coxeter 数の場合に上述の重み付き箙 $Q_{hk}(\mathfrak{g})$ に適切な氷結部分を加えることにより, 得られる重み付き箙 $\widetilde{Q}_{kh}(\mathfrak{g})$ が変異類 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathbb{D}_{2k}}$ に属するという点である. ここで $\mathbb{D}_n$ で境界に n 点を持つ針孔付き円板を表す. 特に埋め込み $W(\mathfrak{g}) \subset \Gamma_{\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathbb{D}_{2k}}}$ が得られ, $\mathcal{A}_{G,\mathbb{D}_{2k}}$ への Weyl 群作用が得られる. これをクラスター作用と呼ぶ. $\mathbb{D}_{2k}$ を各針孔まわりの局所的なモデルと考えることにより, 一般の点付き曲面 Σ についてのクラスター作用を得る. 一方でモジュライ空間 $\mathcal{A}_{G,\Sigma}$ への自然な Weyl 群作用は Goncharov–Shen [GS16] により研究されていた. これを幾何的な作用と呼ぶことにする. 次が第 2 部第二の主結果である:

定理 3. 古典型 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ について組 $(\Sigma, \mathfrak{g})$ が許容される (admissible) とき, クラスター作用と幾何的な作用は一致する.

変異類 $\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\Sigma}$ に付随するクラスターモジュラー群は高次写像類群とも呼ばれるが, 上の結果を先行研究 [FG03, Le16, GS16] と合わせることによりその部分群として Σ の写像類群, $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の針孔の個数分の直積, そして G の外部自己同型群が実現されることが分かる.

第 3 部: クラスターモジュラー群の表示とクラスター Dehn ツイストによる生成 (第 7 章).

第 3 部はクラスターモジュラー群の表示および生成に関する研究である. 種子形態が有限変異型 (finite mutation type) と呼ばれるクラスの場合にはクラスターモジュラー群が有限表示を持つことが知られており, 実際初期箙が非巡回的な場合についてはクラスター代数の圏化を用いることで有限表示が決定されている [ASS12].

本論文の第 3 部ではまずクラスターモジュラー群の被覆である飽和 (saturated) クラスターモジュラー群 $\widehat{\Gamma}_{\boldsymbol{s}}$ [FG09] が自然に作用する飽和モジュラー複体 (saturated modular complex) を導入し, その作用の情報を用いて有限変異型 X_6, X_7 の飽和クラスターモジュラー群の有限表示を具体的に与える. これらの有限表示を用いて得られる次の定理が第 3 部の主結果である:

定理 4. 有限変異型 $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, $G_2^{(*,*)}$, X_7 のクラスターモジュラー群は有限個のクラスター Dehn ツイストで生成される. X_6 型のクラスターモジュラー群は仮想的に 4 つのクラスター Dehn ツイストで生成される.

この結果は曲面の写像類群についてよく知られた結果である, Dehn ツイストおよび半ツイストによる生成の類似を与える.

一般のクラスター代数において符号安定な変異ループの定める力学系が, Teichmüller 理論における擬 Anosov 写像類と同様の振る舞いをしていることを明らかにしたのが第 1 部である. Dehn ツイストおよび半ツイストによる写像類群の生成は Teichmüller 理論の基本定理であるが, いくつかの型のクラスターモジュラー群でも同様な結果がなりたつことを第 3 部で証明した. これらは Teichmüller-Thurston 理論のクラスター代数への拡張という参考論文 [Ish19] 以来の研究構想をさらに具体化するものである. 逆に第 2 部は表現論の立場からの豊富な具体例を構成することによって幾何学とくに高次 Teichmüller 理論へのアプローチを与えるものである. 以上の 3 つの論文によって Teichmüller-Thurston 理論とクラスター代数の密接な関係が, より明確になったと考える.

参考文献

[ASS12] I. Assem, R. Schiffler, and V. Shramchenko, *Cluster automorphisms*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **104** (2012), 1271–1302.

[BS15] T. Bridgeland and I. Smith, *Quadratic differentials as stability conditions*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **121** (2015), 155–278.

[FG03] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller thoery*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., (2006) No. 103, 1–211.

[FG07] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichmüller theory, Vol. I, 647-684; IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[FG09] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. , **42** (2009), no.6, 865–930.

[FH14] A. P. Fordy and A. N. W. Hone, *Discrete integrable systems and Poisson algebras from cluster maps*, Comm. Math. Phys. **325** (2014), no. 2, 527–584.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poénaru, *Thurston' s work on surfaces*, Mathematical Notes, **48**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012, Translated from the 1979 French original by D. M. Kim and D. Margalit.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529.

[GHKK18] M. Gross, P. Hacking and S. Keel and M. Kontsevich, *Canonical bases for cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), no. 2, 497–608.

[GS16] A. B. Goncharov and L. Shen, *Donaldson-Thomas transformations of moduli spaces of G-local systems*, Adv. Math. **327** (2018), 225–348.

[IK] T. Ishibashi and S. Kano, *Signed mutations and train track splittings*, in preparation.

[ILP19] R. Inoue, T. Lam and P. Pylyavskyy, *On the cluster nature and quantization of geometric R-matrices*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **55** (2019), no. 1, 25–78.

[Ish19] T. Ishibashi, *On a Nielsen–Thurston classification theory for cluster modular groups*, Annales de l'Institut Fourier, **69** (2019) no. 2, 515–560

[Le16] I. Le, *Cluster structure on higher Teichmüller spaces for classical groups*, arXiv:1603.03523.

[Pen] R. C. Penner, *Decorated Teichmüller theory*, QGM Master Class Series, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.