審査の結果の要旨

氏名　　石橋 典

曲面の写像類群と Teichmüller 空間に関する Teichmüller-Thurston 理論は、今日、位相幾何学の大きな潮流の一つを形作っている。 Teichmüller-Thurston 理論における二次実特殊線型群 $SL_2(\mathrm{R})$ を一般の半単純代数群に拡張する高次 Teichüller 理論はその自然な一般化である。他方、理想三角形分割された点付き曲面の組合せ的な構造の自然な拡張として、Fomin-Zelevinsky, Fock-Goncharov によって導入されたシードとその変異の構造があり、これを抽象化したものとしてシードアタッチメントがある。一般にシードアタッチメント $\mathbf{s}$ に対応して、２種類のクラスター多様体が定まり、 $\mathbf{s}$ の変異ループの全体のなすクラスターモジュラー群 $\Gamma_{\mathbf{s}}$ がこれらクラスター多様体に自然に作用している。理想三角形分割された点付き曲面にともなうシードアタッチメントに関しては、これらは Teichmüller 空間および測地的ラミネーションの空間への写像類群の自然な作用に等しい。そもそも、シードとその変異の構造の研究の淵源の一つに高次 Teichmüller 理論があり、一方で、シードとその変異の定めるクラスター代数は、表現論や可積分系の文脈で盛んに研究されて来た。

論文提出者 石橋 典 は、以上の状況を踏まえ、一般のシードアタッチメントについての Teichmüller-Thurston 理論を確立する、という彼独自の構想をもとに研究を進めてきた。その端緒は参考論文で展開されたクラスターモジュラー群における Nielsen-Thurston 分類の理論である。 Nielsen-Thurston 分類は、曲面の写像類を Teichmüller 空間および測地的ラミネーションの空間への作用の態様に基づいて、周期的、可約、擬 Anosov の３種類に分類する。これを一般のシードアタッチメントに拡張したものである。すなわち、変異ループを、周期的、クラスター可約、クラスター擬 Anosov の３種類に分類し、理想三角形分割された点付き曲面にともなうものより真に広いクラスのシードアタッチメントに関して、この分類がクラスター多様体への作用によって特徴付けられることを証明した。クラスター代数の双曲幾何学的な側面に独自の光をあて、部分的とはいえ基本的かつ重要な難問に非自明な結果を得たという点で大いに評価できる。

本学位論文はこの構想をさらに進めるものである。本論文第一部は、曲面の擬 Anosov 写像類の Teichmüller 空間および測地的ラミネーションの空間への作用の定める力学系の類似を、一般のシードアタッチメントにおいて追求する。まず、クラスター擬 Anosov 性を改良した概念として変異ループの符号安定性という概念を導入し、そのクラスター伸縮因子という量を定義する。曲面

の写像類については擬 Anosov 性と符号安定性は同値であり、そのクラスター伸縮因子は通常の伸縮因子に等しく、その対数は擬 Anosov 写像類の位相的エントロピーに等しい。以上を踏まえて、本論文第一部の主定理として、任意のシードアタッチメントの任意の符号安定な変異ループについて、２種類のクラスター多様体への作用への代数的エントロピーをクラスター伸縮因子に関連する量で上下から評価した。さらに、非常に確からしい仮定の下で、２種類のクラスター多様体への作用への代数的エントロピーとクラスター伸縮因子の対数という３種類の量が一致することが証明される。曲面の擬 Anosov 写像類と同様の振る舞うことが明らかになった。

井上-Lam-Pylyavskyy は A 型 Dynkin 図形の「回転体」としてえられるシードに伴うクラスターモジュラー群の部分群として A 型 Weyl 群を実現している。**本論文第二部は**、他の型の Dynkin 図形を「回転させる」とどうなるか？という若々しいアイディアに基づく。対称化可能 Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と整数 $m \geq 2$ について「Dynkin 図形の回転体」である重み付き箙 $Q_m(\mathfrak{g})$ を構成し、その箙のクラスターモジュラー群に $\mathfrak{g}$ に伴う Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$ を具体的に埋め込んだ。この結果は高次 Teichmüller 理論への応用をもつ。$\mathfrak{g}$ が単連結半単純代数群 G の Lie 代数であるとき、この埋め込みが一般の点つき曲面上の装飾付き平坦 G 束のモジュライ空間への Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$ の作用を誘導することを発見した。さらに、この作用は Goncharov-Shen が定義した自然な Weyl 群作用に一致することが証明される。以上、表現論の立場からの意味のある具体例が構成されたと言えよう。

写像類群が Dehn ツイストで生成されるという事実は、曲面の写像類群の最も基本的な定理であり、非常に多くの研究がこの定理を基礎として建設されている。**本論文第三部は**、Dehn ツイストの概念を一般のクラスターモジュラー群に拡張し、ある種のシードアタッチメントにともなうクラスターモジュラー群の表示を得ている。これはクラスター代数の低次元位相幾何学とも解釈できる仕事である。

以上のように本論文は、曲面に関する Teichmüller-Thurston 理論の一般のクラスターモジュラー群への拡張という論文提出者独自の構想を、様々な形で非自明に実現しており、同時に、クラスター代数に関わる他分野の問題にも意味のある寄与を行なっている。つまりは、クラスター代数の位相幾何学とも言うべき数学の一分野を切り拓くものであり、数学・数理科学への貢献は大きい。

よって、論文提出者　石橋 典　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。