論文の内容の要旨

Asymptotic properties of the penalized quasi-likelihood estimators and their applications (罰則付き疑似尤度推定量の漸近的性質とその応用)

氏名　木下　慶紀

確率過程を使ったモデリングは、時刻とともにランダムに変化する現象を記述する手法として、数理ファイナンス等の分野において幅広く応用されている。またこれらの応用の背景にある確率過程の理論や、それに関連する統計理論も深く研究されている。特に確率過程モデルを理論的に解析するための手法の一つとして、疑似尤度解析がある。これはパラメトリック推定の一種で、時刻 T までの時系列データが与えられたときに、そのデータを用いて疑似尤度関数 $\mathbb{H}_T(\theta)$ を構築し、この疑似尤度関数の最適値 $\hat{\theta}_T^{\mathrm{QMLE}}$ を推定量として採用するという方法論である。疑似尤度解析の文脈では、推定量と疑似尤度関数は対応しているので、疑似最尤推定量 $\hat{\theta}_T^{\mathrm{QMLE}}$ の性質を調べるために疑似尤度関数 $\mathbb{H}_T$ の性質に注目することがある。特に以下で定義される疑似尤度比と呼ばれる確率場 $\mathbb{Z}_T$ の収束は、理論的な観点から重要とされる概念である。

$$\mathbb{Z}_T(u) = \exp(\mathbb{H}_T(\theta^* + a_T u) - \mathbb{H}_T(\theta^*)).$$

ここで θ^* は未知パラメータ θ の真値であり、a_T は $T \to \infty$ で $||a_T|| \to 0$ を満たす適当な実数列、または行列の列である。この疑似尤度比は局所漸近二次構造と適切な条件のもとで多項式型大偏差不等式を満たすことが知られている。ここで多項式型大偏差不等式とは次の不等式である。

$$P\Big[\sup_{u;|u|\geq r} \mathbb{Z}_T(u) \geq r^{-N}\Big] \leq \frac{C_N}{r^N} \qquad (r > 0).$$

この不等式が満たされるとき、推定量の真値周りでの分布は強い有界性を持つ。具体的にいうと、$m > 0$ に対して

$$\sup_{T>0} E[|a_T^{-1}(\hat{\theta}_T^{\mathrm{QMLE}} - \theta^*)|^m] < \infty \tag{1}$$

が成り立つ。さらに $a_T^{-1}(\hat{\theta}_T^{\mathrm{QMLE}} - \theta^*) \xrightarrow{d} \hat{u}_\infty$ を満たす $\hat{u}_\infty$ をとると、$m' < m$ を満たす任意の $m' > 0$ に対して

$$E[|a_T^{-1}(\hat{\theta}_T^{\mathrm{QMLE}} - \theta^*)|^{m'}] \to E[|\hat{u}_\infty|^{m'}] \qquad (T \to \infty) \tag{2}$$

の収束も成り立つ。これらの性質は推定量の分布の裾を評価するときに有用な性質である。したがって現在の疑似尤度解析においては、提案された推定量に対してこれらの性質を示すことが、一つの目標になっている。

一方パラメータ推定において変数選択を実現するための手法の一つに、正則化法というものがある。これは目的関数に適切な罰則項を付加することでモデル選択を行う手法である。この手法は線形回帰の文脈においては古くから研究されており、適切な条件のもとでは変数選択とパラメータ推定の同時推定が可能であることが知られている。罰則項の形は様々なものが提案されているが、Lasso と呼ばれる L^1-型の罰則が特に有名である。本研究では、疑似尤度解析の枠組みにおいて正則化法を適用することを考える。すなわち、疑似尤度関数 $\mathbb{H}_T(\theta)$ に罰則項 $p_T(\theta)$ を付加して得られる以下の罰則付き疑似尤度 $\mathbb{H}_T^\dagger(\theta)$ を考え、それの最適値 $\hat{\theta}_T$ を推定量として提案する。

$$\mathbb{H}_T^\dagger(\theta) = \mathbb{H}_T(\theta) - p_T(\theta).$$

ここで $\mathbb{H}_T$ は局所漸近二次構造 (定義 2.4.3) 及び多項式型大偏差不等式 [A1] を満たすものとする。罰則項に関しては、Lasso や Bridge といった標準的な罰則を含む、より広いクラスのものを考える。具体的な罰則項の条件は、第 2.2 節、第 2.3 節及び第 2.4 節で与える。

第 2 章では、本研究で提案する推定量について得られた理論的な結果を述べる。まず第 2.2 節で、罰則付き疑似尤度に対する多項式型大偏差不等式を導出する。これにより罰則付き推定量 $\hat{\theta}_T$ についても (1) や (2) のような良い性質が保証される。第 2.3 節では変数選択の一致性について議論する。変数選択の一致性は、十分なデータが得られたときに変数選択が成功するという性質のことであり、これを示すことにより、提案した推定量が本研究の疑似尤度解析の枠組みにおいても、変数選択の手法として有効であることを裏付けることが出来る。第 2.4 節では推定量の真値周りでの分布の極限について考察する。すなわち $\hat{u}_T = a_T^{-1}(\hat{\theta}_T - \theta^*)$ の極限分布を考える。一般的に、局所漸近二次構造がなりたつとき $\hat{u}_T$ が緊密であれば、その極限分布は二次構造に対応したものになることが知られている。しかし本研究においては罰則項を付加した効果により、真値の零である要素に対応する $\hat{u}_T$ の要素は 0 に確率収束することが示される。また真値が非零であるような要素に対応する部分の極限分布に関しては、適切な条件のもとでは、最初から真のモデルを知っているときに得られる漸近分布と一致することが示される。この性質はオラクル性と呼ばれるもので、これが成り立つとき正則化法は、単にモデルを推定するだけでなく推定の精度も向上させていることになる。したがってこの結果は、提案した推定量がもとの疑似最尤推定量よりも精度の良い推定を可能にすることを示唆している。第 2.5 節では変数選択の成功する確率を評価することを試みる。具体的には、適当な $n > 0$ に対して変数選択の失敗する確率が T^{-n} のオーダーで減少することを示す。従来の変数選択の一致性は、単にこの確率が 0 に収束することであるので、その意味でこの結果は、変数選択の一致性をより精密化した結果であると捉えられる。第 2.7 節ではグループ化されたモデルについての変数選択を考える。ここではグループ lasso と呼ばれる手法を応用する。グループ lasso では罰則項の形を、要素ごとに罰則付けるのではなくグループ単位で罰則付けるようにすることで、グループ単位でモデル選択することを可能にする。本研究の状況下では、グループ lasso についても、通常の正則化法のときに得られたのと同等の結果が得られることを示す。

第 3 章では本研究の結果をボラティリティーモデルに応用する。具体的には次のモデルを考える。

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma(X_s, \theta) dw_s, \quad t \in [0, T].$$

ここで b と X は発展的可測過程で、w は r-次元ウィーナー過程。σ は適当な条件を満たす決定論的関数である。第 3.1 節ではこのモデルに対して適切な疑似尤度関数を構築し、それが本研究の状況に即していることを確認する。また第 3.2 節ではこのモデルを使って数値シミュレーションを実行した結果を紹介し、実際に変数選択が上手くいっている様子を観察する。

第 4 章ではより複雑なジャンプ付ボラティリティーモデルを考える。具体的には次のモデルを扱う。

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma(X_s, \theta) dw_s + J_t, t \in [0, T].$$

ここで $J = (J_t)_{t\in[0,T]}$ はジャンプ項で $J_0 = 0$ とする。第 4.1 節では疑似尤度関数を構築し、それに関する局所漸近二次構造や多項式型大偏差不等式について議論する。またこのモデルに正則化法を応用しその結果を検証する。第 4.2 節ではこのモデルの数値シミュレーションを行いその結果を紹介する。