論文の内容の要旨

論文題目　A higher rank Euler system for the multiplicative group over a totally real field
(総実体上の乗法群の高階オイラー系)

氏　名　　坂本　龍太郎

本論文では，総実体上の乗法群に対する高階 Euler 系を構成した．

初めに背景について説明する．類数公式は，Dedekind ゼータ関数の特殊値と代数体の類数などの数論的不変量を関係付ける公式である．この種の関係式は古くから数論において重要視されている．そのため，現代では，広いクラスの代数体の Galois 表現に対して，Dedekind ゼータ関数の一般化である L 関数，及びイデアル類群の一般化である Selmer 群が定義され，類数公式の一般化が予想として様々な場合に定式化されている．例えば，有理数体上の楕円曲線に付随する Galois 表現に対する類数公式の一般化は Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) と呼ばれ，ミレニアム問題の 1 つに選ばれている．しかし，L 関数と Selmer 群の関係を理解することは大変難しい．それは解析的対象 (L 関数) と代数的対象 (Selmer 群) というかけ離れたものを結びつける必要があることに起因する．

1990 年頃に，Kolyvagin は代数体の Galois 表現に対して Euler 系という概念を定義した ([5])．Euler 系は代数体の Galois 表現に対して定まる 1 次 Galois コホモロジーの元の族で，ノルム関係式と呼ばれる関係式を満たすものである．ノルム関係式は L 関数の Euler 積表示と密接に関わっており，Euler 系は L 関数を代数的に実現したものといえる．しかし，Euler 系の構成は非常に難しい問題であり，Euler 系の具体例はあまり多く知られていない．

Euler 系の理論は Selmer 群と L 関数を結びつけるための強力な道具の 1 つである．実際，具体的に Euler 系を構成し Euler 系の理論を用いることで，BSD 予想の部分的解決など，数論における様々な問題に大きな進展が得られた．

その後，Euler 系の理論を整備し，より深く理解するために，Mazur と Rubin は Kolyvagin 系と Stark 系を定義した ([7, 8])．Euler 系と同じく両者は共に，1 次 Galois コホモロジーの (外積の) 元の族で，ある関係式を満たすものとして定義される．Kolyvagin 系と Stark 系は以下の重要な性質を持つ．

(1) Euler 系から Kolyvagin 系が構成できる．
(2) Kolyvagin 系の成す加群と Stark 系の成す加群は同型である．
(3) Stark 系を用いて Selmer 群の構造を完全に記述できる．

代数体の Galois 表現に対して (核) 階数と呼ばれる 0 以上の整数が定まる．上述の (1) – (3) は，Galois 表現の階数が 1 の場合の結果である．即ち，Koyvagin–Mazur–Rubin による Euler 系，Kolyvaign 系，Stark

系の理論は階数 1 の理論であり，次の図式にまとめられる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{Selmer 群} \arrow[rr, leftrightsquigarrow, "?\ ?\ ?"] & & L\ \text{関数} \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{代数的実現}"] \\
\text{Stark 系} \arrow[u, rightsquigarrow, "\text{(3): 構造を完全に記述}"] \arrow[r, "(2)", "\cong"'] & \text{Kolyvagin 系} & \text{Euler 系} \arrow[l, "(1)"']
\end{tikzcd}
\tag{♠}
$$

階数が 1 より大きい場合にも理論を構成するために，Mazur と Rubin は高階 Kolyvagin 系，高階 Stark 系を定義した ([8])．しかし，本質的な困難が多数あり図式 (♠) の高階版を構成するまでには至らなかった．また，Mazur と Rubin による高階 Kolyvagin 系と高階 Stark 系の理論には Galois 表現の係数環が単項イデアル環という制約が存在した．

私は，二重双対外積という概念を用いて完備 Gorenstein 環上の高階 Stark 系の理論を構築した ([9])．より正確には，係数環が完備 Gorenstein 環の階数 $r \geq 0$ の Galois 表現に対して次を証明した．

(c) 階数 r の Stark 系を用いて Selmer 群の高次 Fitting イデアル全てを記述できる．

これは Mazur と Rubin による結果 (3) の一般化となっている．その後，私は Burns と佐野との共同研究で，高階 Kolyvagin 系の理論の一般化と高階 Euler 系の理論の構築を行った ([1])．詳しく述べると，上述の (1) と (2) を高階かつ完備 Gorenstein 環係数へ同時に一般する以下の 2 つを行った．

(a) 高階 Euler 系から高階 Kolyvagin 系を構成した．
(b) 高階 Stark 系の成す加群から高階 Kolyvagin 系の成す加群に同型写像を構成した．

即ち (a) – (c) によって図式 (♠) の高階版が完成した．しかし，上述したように，Euler 系の構成は非常に難しい問題であり，知られている Euler 系の具体例は数えるほどしかない．また，その殆どが階数 1 の Euler 系で，(私の知る限り) 現時点で知られている高階 Euler 系の例は $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の 1 つのみである ([2, 3, 4])．

本論文の主結果を説明するためにいくつか記号を導入する．k を総実体，$\chi\colon \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ を非自明な有限位数の偶指標とする．p を χ の位数と k の類数と互いに素な奇素数とする．K/k を p で不分岐な有限アーベル p-拡大とする．$\mathcal{O} := \mathbb{Z}_p[\mathrm{im}(\chi)]$，$T := \mathcal{O}(1) \otimes \chi^{-1}$ とおく．

$L := \overline{k}^{\ker(\chi)}$ とし，$M_{KL,\infty}$ を $KL(\mu_{p^\infty})$ 上の最大 p-分岐アーベル副-p-拡大とする．$M_{KL,\infty}/k$ は Galois 拡大かつ $M_{KL,\infty}/KL(\mu_{p^\infty})$ はアーベル拡大なので Galois 群 $\mathrm{Gal}(KL(\mu_{p^\infty})/k)$ は自然に Galois 群 $\mathrm{Gal}(M_{KL,\infty}/KL(\mu_{p^\infty}))$ に作用する．さらにこの作用は連続で

$$X_K := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Gal}(M_{KL,\infty}/KL(\mu_{p^\infty}))$$

に $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(KL(\mu_{p^\infty})/k)]]$-加群の構造を誘導する．$k_\infty/k$ を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする．このとき $p \nmid [L\colon k]$ なので

$$\mathrm{Gal}(KL(\mu_{p^\infty})/k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(k_\infty K/k) \times \mathrm{Gal}(L(\mu_p)/k)$$

である．

$$e_\chi := \frac{1}{[L(\mu_p)\colon k]} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L(\mu_p)/k)} \chi(\sigma)\sigma^{-1} = \frac{1}{[KL(\mu_{p^\infty})\colon k_\infty K]} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(KL(\mu_{p^\infty})/k_\infty K)} \chi(\sigma)\sigma^{-1}.$$

とおく．上の同型より，岩澤加群

$$X_K^\chi := e_\chi X_K$$

は $\Lambda_K := \mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(k_\infty K/k)]]$-加群の構造を持つ．

次を仮定する．

- 各素点 $\mathfrak{p} \in S_p(k)$ に対して $H^0(\mathrm{Gal}(\overline{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), T/\mathfrak{m}T) = H^2(\mathrm{Gal}(\overline{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), T/\mathfrak{m}T) = 0$．ただし $\mathfrak{m}$ は $\mathcal{O}$ の極大イデアルである．

このとき任意の有限次アーベル拡大 K'/k と k の素点 $\mathfrak{p} \mid p$ に対して $\mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K'/k)]$-加群としての同型

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), \mathrm{Ind}_{G_{K'}}^{G_k}(T)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[\mathrm{Gal}(K'/k)]^{[k_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p]} \tag{1}$$

が存在する．

整数 $s \geq 0$ に対して T に対する階数 s の Euler 系の成す加群を $\mathrm{ES}_s(T)$ と書く．同型 (1) は単射

$$\mathrm{ES}_r(T) \longrightarrow \mathrm{ES}_0(T)$$

を誘導する．ただし $r := [k\colon \mathbb{Q}]$ である．階数 0 の Euler 系は群環の元の族でノルム関係式を満たすものである．哲学的に，そのような元は p 進 L 関数と結びつくべきものである．実際，本論文では，総実体上の乗法群に対する p 進 L 関数の族が階数 0 の Euler 系であることを示した．その階数 0 の Euler 系を $\mathcal{L}_p^\chi \in \mathrm{ES}_0(T)$ と書く．

以上の設定のもとで，次が本論文の主定理である．

定理 1　次を仮定する．

- 総実体 k の各素点 $\mathfrak{p} \mid p$ に対して $H^0(\mathrm{Gal}(\overline{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), T/\mathfrak{m}T) = H^2(\mathrm{Gal}(\overline{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}), T/\mathfrak{m}T) = 0$.
- 加群 X_k^χ は p-捩れ元を持たない．

このとき単射 $\mathrm{ES}_r(T) \longrightarrow \mathrm{ES}_0(T)$ による像が $\mathcal{L}_p^\chi$ である階数 r の Euler 系がただ 1 つ存在する．

主定理の証明において重要な点の 1 つは，特性イデアルの概念を一般化したことである．特性イデアルの定義には正規環上の有限生成加群の構造定理を用いる．そのため一般のネーター環上の有限生成加群に対して特性イデアルは定義することができなかった．しかし，本論文において，二重双対外積を用いた特性イデアルの別の定義を与えることで，ネーター環上の有限生成加群に対して特性イデアルを定義した．

Gorenstein 環上のある岩澤加群の特性イデアルを用いて単射 $\mathrm{ES}_r(T) \longrightarrow \mathrm{ES}_0(T)$ の像を計算し，Wiles ([10]) によって証明された総実体上の古典的な岩澤主予想を用いて，この単射の像に $\mathcal{L}_p^\chi$ が含まれることを証明した．

主定理で構成した高階 Euler 系と上述した高階 Euler 系，高階 Kolyvagin 系，高階 Stark 系の理論を用いることで Λ_K-加群 X_K^χ の高次 Fitting イデアル全てを p 進 L 関数から定まる解析的量で記述できることを証明した．

この結果についてもう少し詳しく述べる．各整数 $n > 0$ に対して，p 進 L 関数の族 $\mathcal{L}_p^\chi$ から Kolyvagin 導分類と呼ばれる $\mathcal{O}/(p^n)[\mathrm{Gal}(k_n K/k)]$ の元の族を構成することができる．ここで k_n/k は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_∞/k に含まれる次数 p^n の拡大である．この Kolyvagin 導分類らを用いて $\mathcal{O}/(p^n)[\mathrm{Gal}(k_n K/k)]$ のイデアルの昇鎖列

$$\Theta_{K,n}^0 \subseteq \Theta_{K,n}^1 \subseteq \Theta_{K,n}^2 \subseteq \cdots$$

が定義される．さらに $\Theta_{K,\infty}^i := \varprojlim_{n>0} \Theta_{K,n}^i$ と定義することで Λ_K のイデアルの昇鎖列

$$\Theta_{K,\infty}^0 \subseteq \Theta_{K,\infty}^1 \subseteq \Theta_{K,\infty}^2 \subseteq \cdots$$

を得る.

系 2 次を仮定する.

- 総実体 k の各素点 $\mathfrak{p} \mid p$ に対して $H^0(\mathrm{Gal}(\overline{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}), T/\mathfrak{m}T) = H^2(\mathrm{Gal}(\overline{k}_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}), T/\mathfrak{m}T) = 0$.
- 加群 X_k^{χ} は p-捩れ元を持たない.
- 拡大 K/k で分岐する任意の k の素点 $\mathfrak{q}$ に対して $H^2(\mathrm{Gal}(\overline{k}_{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{q}}), T/\mathfrak{m}T) = 0$.

このとき任意の整数 $i \geq 0$ に対して

$$\mathrm{Fitt}^i_{\Lambda_K}(X_K^{\chi}) = \Theta^i_{K,\infty}$$

である.

$K = k$ のとき，この結果は栗原 ([6]) によって証明されている．系 2 は栗原の結果の $\mathrm{Gal}(K/k)$-同変への一般化である.

参考文献

[1] D. Burns, R. Sakamoto, T. Sano, On the theory of higher rank Euler, Kolyvagin and Stark systems, II, submitted for publication, arXiv:1805.08448.

[2] K. Büyükboduk, A. Lei, Rank–two Euler systems for symmetric squares, preprint, arXiv:1809.10004v2.

[3] K. Büyükboduk, A. Lei, D. Loeffler, G. Venkat, Iwasawa theory for Rankin–Selberg products of p-non-ordinary eigenforms, preprint, arXiv:1802.04419v2.

[4] K. Büyükboduk, A. Lei, G. Venkat, Iwasawa theory for Symmetric Square of non-p-ordinary eigenforms, preprint, arXiv:1807.11517v2.

[5] V. A. Kolyvagin, Euler systems, The Grothendieck Festschrift Vol II (1990) 435-483.

[6] M. Kurihara, Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 104 (2012), no. 4, 728–769.

[7] B. Mazur, K. Rubin, Kolyvagin systems, Mem. Amer. Math. Soc. **799** (2004).

[8] B. Mazur, K. Rubin, Controlling Selmer groups in the higher core rank case, J. Th. Nombres Bordeaux **28** (2016) 145-183.

[9] R. Sakamoto, Stark systems over Gorenstein local rings, Algebra Number Theory 12 (2018), no. 10, 2295–2326.

[10] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. **131** (1990) 493-540.