# 論文の内容の要旨

論文題目　Penalized Least Squares Approximation Methods and
Their Applications to Stochastic Processes
（罰則付き最小二乗近似法とその確率過程への応用）

氏　名　　鈴木　拓海

この論文は大きく 2 つの部分に分かれている。一つはスパース推定について、もう一つは確率過程の統計についてである。スパース推定はここ 20〜30 年の間、情報学、機械学習、統計学など、様々な分野から注目を集められてきた。ここで、スパース推定とは、推定関数に原点で微分不可能な罰則項を付加してパラメータ推定を行う手法のことを指す。これにより、スパースな解、つまり、推定量のいくつかの成分がちょうど 0 であるような解が得られ、パラメータ推定と変数選択を同時に実行することができる。近年では、モデルや罰則項の拡張や、推定量を求めるための効率的なアルゴリズムの研究などが盛んに行われており、様々な方面において発展してきている。また、確率過程とは、時間や空間に依存したランダム現象を記述するための数学的概念である。確率過程の統計に関する研究は古くからなされてきたが、近年でも数理ファイナス、保険数理、生物統計、生存解析など様々な分野への応用が盛んに研究されてきており、その重要性はますます高まってきている。

第一章ではスパース推定と確率過程の統計について、それぞれ歴史的な発展について簡単に述べ、本研究がそれぞれのトピックにおいてどういった役割を果たすか、ということに言及する。

第二章では、まず初めに本論文のメインである罰則付き最小二乗近似（pLSA）推定量の定義を与える。具体的には、一般的な損失関数に対して、その最小点周りに二次近似した項に $L^q$ $(0 < q \leq 1)$ 罰則項をつけることにより、次の目的関数を得る：

$$Q_T^{(q)}(\theta) = (\theta - \tilde{\theta})'\hat{G}(\theta - \tilde{\theta}) + \lambda_T \sum_{j=1}^{d} \hat{w}_j |\theta_j|^q$$

ここで $\tilde{\theta}$ は損失関数 $\mathcal{L}_T(\theta)$ の最小点、$\hat{G}$ は（ランダムな）係数行列で通常は $\hat{G} = -\frac{1}{T}\partial_\theta \mathcal{L}_T(\theta)$、$\hat{w}$ は重みベクトルである。この目的関数 $Q_T^{(q)}(\theta)$ を最小化するものとして pLSA 推定量を定義する。次に、pLSA 推定量の性質について述べる。特に、オラクル性が成り立つことと、変数選択の一致性の収束レートに関する結果を示す。pLSA 推定量は、漸近的には、従来のスパースモデリングにおける手法と同等かそれ以上の性質を持つが、一方で計算上の弱点

もある。それは $L^q$ ペナルティに起因する目的関数の非凸性である。スパースモデリングを考える上でパラメータは高次元のものが想定されるが、高次元空間上の非凸関数の最適化は一般に難しい。その弱点を補う推定量として P-O 推定量を導入する。P-O 推定量は penalized method to ordinal method の意味で、一旦オラクル性を無視し、変数選択の一致性を持つような推定量を導き、その推定量が選んだモデルについて再度推定を行うことにより有効推定量を求める方法である。具体的には pLSA 推定量を与える目的関数における係数行列を単位行列に置き換えて最適化を行う。この時、推定量の有効性が失われてしまうが、最適化の点においては、特別なアルゴリズムを用いることなく簡単に計算することができる。最後に、選ばれたモデルについて通常の推定を行えば良い。本章の最後で、この章の定理の証明を与える。

第三章では、pLSA 推定量を用いた推定手法の確率過程への応用について述べる。考えるモデルは、点過程と拡散型過程である。点過程については、まず節の初めで intensity モデルに対する一般的な理論を述べる。特に、ここでは QMLE を用いたパラメータ推定について議論する。次に具体例として Cox モデルと Hawkes モデルについて考える。Cox モデルではエルゴード性を持つ共変量を用いて intensity が

$$\lambda(t, \theta) = \exp\Bigl(\sum_j \theta_j X_t^j\Bigr) \quad t \in [0, \infty)$$

のようにかけるものを扱う。Hawkes モデルでは、特に exponential hawkes process を扱う。ただし、従来は exponential Hawkes process では、パラメータの成分が真に 0 になることは考えないことが多く、理論の整備がされていないため、変数選択の一致性のみに絞って議論する。Hawkes process は応用先が多く、また高次元を扱う機会も多いため、変数選択について考えることには一定の価値があると思われる。拡散型過程については、エルゴード的なものと非エルゴード的なものを両方扱う。どちらも QLA を用いた解析について述べる。また、エルゴード的拡散型過程モデルでは、ドリフトパラメータと拡散パラメータの同時推定ができることが知られているが、変数選択についても同時に（スパース）推定が行えることを示した。非エルゴード的拡散型過程モデルについては、拡散パラメータのみの推定を行うが、QMLE（あるいは QBE）は漸近混合正規性を持つ。つまり、最小二乗近似における係数行列の極限行列 $G$ がランダムになる例の一つを与える。

最後に第四章では、第三章で挙げたモデルのうち、3 つのシミュレーションを行う。1 つ目は Cox モデルである。このモデルでは共変量として OU 過程を用いて、20 次元のパラメータ推定を実行している。また、ここでは P-O 推定量を用いており、P-O 推定量の良さも垣間見ることができる。2 つ目は Hawkes モデルである。Hawkes モデルについては QMLE の挙動と pLSA 推定量の結果を示した。また、multivariate Hawkes process のパス発生のアルゴリズムも併せて紹介する。3 つ目は非エルゴード的拡散型過程モデルであ

る。この場合も、上の 2 つのモデルと同様に変数選択がうまく機能することを見る。