

審査の結果の要旨

氏 名 関野 希望

3次元多様体や絡み目の理論は、位相幾何学においてその創始以来重要な研究対象であり続けており、今日においても多くの研究者によって研究が積み重ねられている。絡み目の理論における基本的な問題は、絡み目の区別に関するもの、ある条件を満たす絡み目の存在について問うもの、絡み目の応用などに大別される。論文提出者の関野氏は、主に2つ目の観点から、とくに3次元多様体内のファイバー絡み目の存在問題についての研究を行い、一連の結果を得た。本論文は具体的な問題の設定に応じた二部構成となっている。

第一部は3次元多様体の記述方法のひとつである **Heegaard** 分解の観点から絡み目の存在問題について論じたものである。連結で向きづけ可能な閉3次元多様体には十分に複雑な曲面をファイバー曲面とするファイバー絡み目（結び目）が存在することは **Alexander** の先駆的な結果を受け、**Myers** や **González-Acuña** により 1970 年代後半までに示されていた。ファイバー結び目は接触構造と呼ばれる幾何的構造と密接に関連しており、近年盛んに研究が行われている対象である。一方で、曲面の位相型を固定したときに、その曲面をファイバーとする絡み目が実際に存在するか、存在する場合に具体的にどの位置にあるかという問題は、研究手法に乏しく、問題の素朴さに比して難しい問題となっている。実際、レンズ空間やそれら2つの連結和などといった限られた場合に森元や **Baker** による結果がある他は、組織的な結果がほとんど知られていない。関野氏はファイバー絡み目に付随する **Heegaard** 曲面に注目し、その曲面の **cut system** に対してファイバー絡み目から語を割り当て、その語の代数的情報によってファイバー絡み目を再構成する一般的な方法を与えた。証明は3次元多様体における伝統的な切り貼り手法を巧みに用いるものとなっている。語のなす代数系の分析はそれ自身調べるのが難しいものとなっているが、曲面の位相型が複雑でない場合はファイバー絡み目を見つけるのに十分な情報を提供する。関野氏は種数が1のファイバー結び目の場合を軸として、それを組み合わせることで、特定の条件を満たす **Seifert** 多様体などに対し、ファイバー結び目の存在条件を完全決定した。他の具体例として、近年導入された4次元多様体の記述方法のひとつである、**relative trisection** の興味深い具体例を与えており、関野氏の手法は今後の広範囲な応用を期待させるものとなっている。

第二部はファイバー絡み目の条件を緩めたクラスであるホモロジーファイバー絡み目の存在問題について論じたものである。このような絡み目の存在性については、考え

ている多様体のホモロジー群やその交叉形式の情報によって決まることが知られており、しばしば存在の必要十分条件は整数係数多項式における整数根の存在問題に帰着される。レンズ空間における種数 1 のホモロジーファイバー結び目の存在については野崎によって Chebotarev の密度定理などといった整数論で古典的に知られている理論に結びつけた証明が与えられていた。これに対し、関野氏は平面曲面をファイバーに持つホモロジーファイバー絡み目に対して存在問題を設定し、同じく整数論的な手法を用いて、レンズ空間の場合の存在性について完全決定を行った。そこでは、曲面の境界の数による違いが見られ、野崎の結果との差異が観察される。条件を緩めた下での存在問題にさえ（少なくとも現時点では）整数論の深い定理を要するということから、ファイバー絡み目の存在問題が如何に難しいものであるかを窺うことができる。

以上のように論文提出者の研究は、伝統的な 3 次元多様体の研究手法を自在に利用し、代数的技法を巧みに組み合わせることで 3 次元多様体や絡み目の理論の新たな視点を切り開くものとなっており、当分野の発展に貢献するものである。

よって、論文提出者 関野希望 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。