論文の内容の要旨

論文題目　Classification and construction of minimal representations
（極小表現の分類と構成）

氏　　名　田森　宥好

本論文は極小表現の分類や構成に関する部分（第 2〜5 章）と局所不分岐 L-関数の Hecke 作用素を用いた新しい表示を与える部分（第 6 章）からなる．

極小表現の背景：G を A 型でない連結な実単純 Lie 群，$\mathfrak{g}_0$ を G の Lie 環，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を Cartan 分解，K を Lie 環 $\mathfrak{k}_0$ を持つ G の解析的部分群とする．下付きの 0 を取ることで複素化をあらわすことにする．簡単のために複素化 $\mathfrak{g}$ を単純と仮定する．このとき普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ は，随伴多様体が極小冪零軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ となる完全素イデアル J_0 をただ一つもつ．このイデアル J_0 は Joseph イデアルと呼ばれる．G の既約認容表現が極小表現であるとは，付随する $(\mathfrak{g}, K)$-加群の零化イデアルが Joseph イデアルとなることをいう．

実単純 Lie 群の表現論における既約ユニタリ表現の分類という観点からは，極小表現は無限次元既約認容表現の中で最小の Gelfand-Kirillov 次元を持ち，ユニタリ双対の構成要素だと考えられている．

メタプレクティック群の Weil 表現の二つの既約成分は極小表現の代表的な例であり，Weil 表現は theta 対応によって保型表現論に，調和振動子の束縛状態全体としての実現を介して数理物理において重要な役割を持つ．一般の極小表現においても，同様の理論や実現が期待されている．

Kobayashi–Ørsted（2003 年）は符号 $(p-1, q-1)$ の擬 Riemann 多様体 $S^{p-1} \times S^{q-1}$ 上の山辺作用素という共形不変な 2 階の微分作用素の核空間として，共形変換群 $O(p,q)(p, q \geq 2, p+q \geq 8$: 偶数$)$ の極小表現を構成した．この構成に基づいて Kobayashi–Ørsted（2003 年）による対称空間の解析を用いた極小表現の離散的分岐則の決定，佐藤超関数を用いた超双曲型方程式の保存量の構成や Ben Saïd–Kobayashi–Ørsted（2012 年）による Fourier 変換の Hankel 変換への変形の構成といった研究がなされた様に，解析的なアプローチによる極小表現の研究は 2000 年代以降，盛んに行われている．

極小表現の分類：本論文の第 3 章では，極小表現を K-加群とみた時の分岐則に着目することで極小表現が既に知られているもので尽くされていることを示した：

定理 1. G を A 型でない連結な実単純 Lie 群とする．

(1) G の極小表現の K-有限ベクトルの空間は，K-加群 $\mathfrak{p}$ の最高ウェイト ψ と優ウェイト μ_0 を用いて

$$\bigoplus_{n \geq 0} V(\mu_0 + n\psi)$$

と分解する．ここで $V(\mu_0 + n\psi)$ は最高ウェイト $\mu_0 + n\psi$ を持つ既約 K-加群で，直線 $-\mu_0 + \mathbb{R}\psi$ は ψ と直交しない $\mathfrak{k}$ の正ルートの和の半分を含む．

(2) G が単連結ならば，G の極小表現の無限小同値類の個数は表 1 で与えられる．

系 2. (1) Riemann 対称空間 G/K が Hermite 型ならば極小表現は最高ウェイト表現となる．

表 1　極小表現の無限小同値類の個数

$\mathfrak{g}$	個数
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})(n \geq 2)$	4
$\mathfrak{so}(p,2)(p \geq 5), \mathfrak{so}^*(2n)(n \geq 4), \mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{e}_{7(-25)}$	2
$\mathfrak{so}(p,q)(p,q \geq 3, p+q \geq 8 \text{ even}), \mathfrak{so}(p,3)(p \geq 4 \text{ even}),$ $\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{g}_{2(2)}$	1
$\mathfrak{sp}(n)(n \geq 2), \mathfrak{so}(n)(n \geq 7), \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{so}(n,1)(n \geq 6),$ $\mathfrak{sp}(p,q)(p,q \geq 1), \mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(p,q)(p,q \geq 4, p+q \text{ odd})$	0

(2) 極小表現はユニタリ表現と無限小同値である．

Gan–Savin（2005 年）は Riemann 対称空間 G/K が非 Hermite 型の時に，二つの極小表現が同じ K-type をもてば無限小同値であり，極小表現は K-加群として重複度自由であることを示した．定理 1 の証明には，この主張の簡単な一般化と，Cartan 分解と整合的な J_0 の二次斉次元の表示を用いる．

極小表現の構成：第 4 章の目的は Kobayashi–Ørsted（2003 年）による $O(p,q)(p,q \geq 2, p+q \geq 8$：偶数$)$ の極小表現の構成を他の極小表現に対しても与えることである．G を D, E 型の連結な分裂実単純 Lie 群とする．B を Borel 部分群として，その Langlands 分解を $B = MAN$ と書き，ν を双対 $\mathrm{Lie}(A)^\vee$ の元とする．この時，M, N を自明に作用させ A を $\exp(\nu)$ で作用させて B の指標 triv_ν を得る．この指標を誘導した表現 $C^\infty(G, \mathrm{triv}_\nu)^B$ は，G 上の滑らかな関数 f で右移動に関する不変性 $f(gb) = \mathrm{triv}_\nu(b^{-1})f(g)$ $(g \in G, b \in B)$ を満たすもの全体からなり，G が左移動で作用する．

Joseph イデアル J_0 の二次の斉次元全体からなる $\mathfrak{g}$-加群に関する右移動の微分を考えることで，B-加群 $W^\vee$ と G-絡微分作用素

$$D\colon C^\infty(G, \mathrm{triv}_\nu)^B \to C^\infty(G, W^\vee \otimes \mathrm{triv}_\nu)^B$$

を構成し，次の定理を得た：

定理 3. G を $D_n(n \geq 4), E_6, E_7, E_8$ 型の連結な分裂実単純 Lie 群とする．$C^\infty(G, \mathrm{triv}_\nu)^B$ の部分表現 $\mathrm{Ker}\, D$ が極小表現になることは，最高ウェイト $-\nu$ をもつ既約最高ウェイト $U(\mathfrak{g})$-加群 $L(-\nu)$ の零化イデアルが J_0 であることと同値である．この時，$C(G, \mathrm{triv}_\nu)^B$ の K-不変な関数は核空間 $\mathrm{Ker}\, D$ に含まれる．

絡微分作用素 D の構成から，$\mathrm{Ker}\, D$ の組成因子が極小表現か自明表現であることは一般に従う．定理 3 の証明では，J_0 の二次の斉次元のウェイトに着目して $\mathrm{Ker}\, D$ の非自明性を示すことが鍵となる．

第 2 章では一般の複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Ann}\, L(\lambda) = J_0$ を満たすような最高ウェイト λ を分類した．この分類においては Joseph（1972 年）, Garfinkle（1982 年）, Gross–Wallach（1994 年）, Braverman–Joseph（1998 年）による先行結果を一般化した形で最高ウェイト λ の構成が与えられる．

特に定理 3 は G の極小表現の $\mathrm{rank}(\mathfrak{g})$ 通りの実現を与える．

A 型の群に対する極小表現の類似の分類：第 5 章では連結かつ単連結な $A_{n-1}(n \geq 3)$ 型の実単純 Lie 群 G に対して極小表現の類似を定義し，それを分類した．$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ として，$T_{i,j}(1 \leq i, j \leq n)$ を (k, l) 成分が

$$\delta_{i,k}\delta_{j,l} - \frac{1}{n}\delta_{i,j}\delta_{k,l}$$

（ここで $\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタ）となる $\mathfrak{g}$ の元とする．複素数 a に対して J_a を

$$T_{1,n}T_{2,n-1} - T_{1,n-1}T_{2,n} \quad (n \geq 4 \text{ の場合のみに考える}),$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(T_{1,i}T_{i,n} + T_{i,n}T_{1,i}) - \frac{a(n-2)}{n}T_{1,n},$$

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} T_{i,j}T_{j,i} - \frac{(n-1)(2a+n)(2a-n)}{4n}$$

で生成された $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとする．このとき，Joseph イデアルを特徴付ける条件は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ に対して族 $\{J_a \mid a \in \mathbb{C}\}$ を定める：

定理 4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})(n \geq 3)$ とする．$U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル J に対して，次の条件は同値．

(1) ある $a \in \mathbb{C}$ に対して $J = J_a$.
(2) J の次数化をとってできる $\mathfrak{g}$ の対称代数のイデアルが $\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ の定めるイデアルと一致する．
(3) J は完全素な原始イデアルで随伴多様体が $\overline{\mathcal{O}^{\min}}$ となる．

付随する $(\mathfrak{g},K)$-加群の零化イデアルが J_a となる G の既約認容表現を a-極小表現と呼ぶことにする．本論文の第 5 章の主定理として，a-極小表現を分類した：

定理 5. G を連結で単連結な $A_{n-1}(n \geq 3)$ 型の実単純 Lie 群で，複素化 $\mathfrak{g}$ が単純とする．複素数 a に対し，G の a-極小表現の無限小同値類の個数は表 2 で与えられる．

表 2　a-極小表現の無限小同値類の個数

$\mathfrak{g}$	a	個数
$\mathfrak{su}(p,1)(p \geq 2)$	$\mathbb{C}$	2
$\mathfrak{su}(p,q)(p,q \geq 2)$	$(p+q)/2+\mathbb{Z}$	2
	$\mathbb{C} \setminus ((p+q)/2+\mathbb{Z})$	0
$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$	$\mathbb{Z}$	3
	$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$	2
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})(n \geq 4)$	$\mathbb{C}$	2
$\mathfrak{su}(n)(n \geq 3)$, $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{H})(m \geq 2)$	$\mathbb{C}$	0

分類のためには，定理 1 の証明とは異なり a-極小表現を構成する必要がある．$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}(p,q)$ の場合には最高ウェイト加群 $L(\lambda)$ として構成し，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ の場合には第 4 章の手法を用いて構成した．ここでの $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}), a = 0$ の場合の Torasso の表現の構成は Kubo–Ørsted（2019 年）による実現と一致する．さらに定理 1 の証明とは異なり，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ の場合には絡微分作用素の核空間を具体的に計算することで，ある K-type をもつ a-極小表現の非存在を示す必要がある．

局所不分岐 L 関数の Hecke 作用素を用いた表示：第 6 章の内容は大井雅雄氏，坂本龍太郎氏との共同研究である．$\mathbf{G}$ を非アルキメデス局所体 F 上の連結な分裂簡約群とし，$G := \mathbf{G}(F)$ とする．保形表現の有限個を除いた局所成分が不分岐表現であることから，局所不分岐 L-関数は保形表現論において重要な意味を持つ．

Taylor（1988 年）は $G = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ の時，Siegel モジュラー形式の p-進的な族の研究において，既約不分岐主系列表現 (π, V) の L-関数に関する次の等式を得た：

$$L(s, \pi, \mathrm{Spin}) = \det(1 - p^{-(s+3/2)}\pi(U_K) \mid V^K)^{-1}.$$

ここで K は Siegel paraholic 部分群という $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_p)$ の部分群，Spin は双対群 $\mathrm{GSpin}_5(\mathbb{C})$ のスピン表現，U_K は K に関するある両側剰余類の特性関数を正規化したものである．局所不分岐 L-関数の定義で用いる佐竹同型では $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_p)$ で固定される一次元部分空間への $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_p)$-両側不変な Hecke 代数の作用に着目するが，上記の L-関数の表示では一次元とは限らない V^K への K-両側不変な Hecke 代数の作用を用いている．

第六章の目的は一般の G の不分岐 L-関数に対して，同様の Hecke 作用素を用いた表示を与えることである．$\mathbf{G}$ の F 上定義された極大分裂トーラス $\mathbf{T}$ と，$\mathbf{T}$ を含む Borel 部分群 $\mathbf{B}$ を固定する．$\mathbf{T}$ の優余指標 $\check{\gamma}$ に対して，ある G の開コンパクト部分群 $K_{\check{\gamma}}$ を定義し，$\mathbb{1}_{\check{\gamma}}$ を $K_{\check{\gamma}}$ の両側剰余類 $K_{\check{\gamma}}\check{\gamma}(\varpi)K_{\check{\gamma}}$（$\varpi$ は一意化元）の特性関数を正規化したものとする．双対群 $\widehat{G}$ の有限次元表現 r に対して，$\mathcal{P}^+(r)$ を r に現れる $\mathbf{T}$ の優余指標全体，$\check{\gamma} \in \mathcal{P}^+(r)$ に対して $m_{\check{\gamma}}$ をその重複度とする．

定理 6. π を G の既約不分岐表現とする．$\mathbf{T}(F)$ の不分岐指標 χ で，正規化された主系列表現 (I_χ, V_χ) が既約な部分商として π を持つものをとる．r を $\widehat{G}$ の有限次元表現とすると，

$$L(s, \pi, r) = \prod_{\check{\gamma} \in \mathcal{P}^+(r)} \det\bigl(1 - q^{-(s+\langle \rho, \check{\gamma} \rangle)} I_\chi(\mathbb{1}_{\check{\gamma}}) \bigm| V_\chi^{K_{\check{\gamma}}}\bigr)^{-m_{\check{\gamma}}}$$

を得る．ここで ρ は $\mathbf{G}$ の正ルートの和の半分とした．

定理 6 の証明は $\mathbb{1}_{\check{\gamma}}$ の $V_\chi^{K_{\check{\gamma}}}$ への作用の固有値を計算することで与えられる．具体的には $B, K_{\check{\gamma}}$ に関する両側剰余類への Weyl 群を用いた分解（一般化岩澤分解）を用いて $V_\chi^{K_{\check{\gamma}}}$ の基底を取り，両側剰余類 $K_{\check{\gamma}}\check{\gamma}(\varpi)K_{\check{\gamma}}$ を右剰余類へと分解し，一般化岩澤分解への右剰余類の積が Bruhat 順序に関して良い振る舞いをすることを示す．後半二つの主張の証明には，Bruhat–Tits（1972 年，1974 年）による凹関数に付随した部分群の理論を用いる．