論文審査の結果の要旨

氏名　田森宥好

極小表現とは，実単純リー群 G の (無限次元の) 既約認容表現の中で “最も小さい表現” である．より正確には，群 G の既約認容表現は，その微分表現の零化イデアルが Joseph イデアルであるとき，**極小表現**とよばれる．

例えば，メタプレクティック群の Segal–Shale–Weil 表現の 2 つの既約成分は極小表現の古典的な例であり，テータ対応を通じて保型形式の表現論に重要な役割を担ってきた．また，共形変換群 $SO(4,2)$ の極小表現は，水素原子の束縛状態全体としての実現を介して，数理物理に用いられる．

一般の非コンパクトな単純リー群には，連続濃度の相異なる既約認容表現が存在するが，極小表現は高々有限個しか存在しないことが，表現の一般論より知られている．これを完全に分類したのが，当該論文の次の定理である．

定理 1 (田森). *G を A 型でない連結かつ単連結な実単純リー群とする．このとき，G の極小表現の無限小同値類の個数は 0, 1, 2, 4 のいずれかである．*

田森氏は，単純リー群の分類表に基づき，どの単純リー群に何個の極小表現があるかを明示的に与えた．

一方，単純リー群の極小表現は系統的ではないが，Kostant, Kazhdan を始めとする多くの研究者による種々の手法で発見 · 構成されていた．定理 1 は既に知られているもの以外には極小表現は存在しないということを主張している．既知の極小表現はすべてユニタリ化可能であることから，

系 2 (田森). すべての極小表現はユニタリ化可能である

ことも示された．これらの結果は専門家にとっては漠然と予想されており，部分的には証明されていたことであるが，証明を完遂した文献としては当該論文が初めてである．

さて，極小表現は，代数的には “最も小さい” 無限次元の既約表現といえるが，視点を逆転させ，

(群から見ると) 極小表現 = 表現空間から見ると “対称性が最も大きい”

と解釈することによって，本学の小林俊行教授により

極小表現をモチーフとした大域解析

という新しい研究テーマが提唱され，日本，ドイツ，デンマーク，フランス，米国等で，最近 20 年間に亘り，活発な研究が行われている．例えば，擬リーマン多様体の山辺作用素の解空間に共形変換群の表現を定めることによって，単純リー群 $O(p,q)$ ($p,q \geq 2$, $p+q$ は 8 以上の偶数) の極小表現が **幾何的**に構成され (Kobayashi–Ørsted, 2003), それを契機に佐藤超函数を用いた超双曲型方程式の保存量の構成や，フーリエ変換やエルミート半群の変形理論，実極小冪零軌道の幾何的量子化 (Hilgert–小林–Möllers) など，極小表現をモチーフとした多彩な大域解析が生まれている．田森氏は，より一般の単純リー群に対し,「極小表現の微分方程式の解空間としての構成」について，従来は殆

ど扱われていなかった「冪零根基が非可換であるような放物型部分群に付随する実旗多様体」を含む設定に踏み込んだ．この一般的な状況下では実旗多様体上のベクトル束の切断の空間は K 重複度が真に 1 より大きくなるという技術的な困難があるが，田森氏はそれを克服し，Joseph イデアルから導かれる，ある偏微分方程式系の解空間として極小表現が幾何的に構成できることを示した．

さて A 型の群は Joseph イデアルが存在しないので，Joseph イデアルによる極小表現の定義は意味をもたない．しかし，Gelfand–Kirillov 次元が最小となる既約認容表現をより精密に取り扱うことで,「極小表現」の類似を考えることができる．田森氏は，複素パラメータつきの極小表現を A 型の群に対して定義し，その個数も決定した．

なお，極小表現とはテーマが異なるが，論文提出者は局所不分岐 L 関数の Hecke 作用素を用いた新しい表示に関する共同研究も行っている．

以上のように，当該論文は実簡約リー群の表現論における最新の重要なテーマである極小表現において、新しい知見を与えたものであり，論文提出者 田森宥好 氏は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．