論文の内容の要旨

論文題目　Discontinuous Galerkin method for elliptic problems
(楕円型問題に対する不連続 Galerkin 法)

氏名　千葉 悠喜

不連続 Galerkin(DG) 法は，各要素上で多項式であり，全体としては不連続な基底関数を用いて計算を行う，偏微分方程式の数値解法の一つである．各要素間で定められた，数値流速と呼ばれる値を用いて連続性を制御しており，数値流速の定め方により，様々な DG 法のスキームが提案されている．

偏微分方程式の数値解法において，得られた解が厳密解の良い近似になっているというだけでなく，元の方程式の持つ性質を保つかどうかという点も重要である．例えば，Laplace 方程式の持つ重要な性質として，最大値原理があげられる．その離散版である離散最大値原理を，DG 法で得られる近似解が満たしているかどうか示した過去の研究はいくつかある．しかし，それらは，1 次元問題のみで示していたり，非線形スキームを用いていたりと，高次元領域上の標準的な DG スキームに関して離散最大値原理の成立を示したものはない．

DG 法に関して，線形楕円型方程式に対する L^2 ノルムやエネルギーノルムを用いた解析は数多く行われている．一方，他のノルムを用いた解析は，いくつかの研究を除いてほとんど行われおらず，その研究も，厳密な分割を仮定した滑らかな領域上の方程式に対しての解析となっており，実際の問題を扱うには難しい仮定となってしまっている．非線形問題への応用を考えると，L^p ノルム，特に L^∞ ノルムを用いた解析が重要である．そのため，DG 法の L^∞ ノルムに関する理論の発展が必要となっている．

さらに，現実の問題への応用を考えると，複雑な境界条件についての解析が重要となる．例えば，血流のシミュレーション等に用いられる reduced-流体構造連成モデルや Cahn–Hilliard 方程式を考える際に，Laplace–Beltrami 作用素 Δ_Γ を含む動的境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu} + au - b\Delta_\Gamma u = g$$

や一般化 Robin 境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + au - b\Delta_\Gamma u = g$$

に関する解析は重要である．動的境界条件や一般化 Robin 境界条件に対する，標準的な有限要素法や DG 法の研究は，近年行われている．しかし，DG 法の研究は矩形領域のみを考えており，実際の問題への応用が難しいものになっている．

現実の問題を考える際に，考えている領域が滑らかなものになっている場合が多くある．滑らかな領域上の偏微分方程式を数値的に解く場合，領域を多角形で近似して計算を行っている．その際，問題の近似の仕方に

よっては，求めたい問題とは異なる問題の近似解を計算してしまうことがある．そのため，離散化だけでなく，領域の近似によって生じる誤差に関しても解析することが必要である．この点について，標準的な有限要素法ではエネルギーノルムを中心とする解析は数多く行われており，近年では L^∞ ノルムなどによる誤差評価も行われている．一方，DG 法では，多角形領域，もしくは滑らかな領域を厳密に要素分割したことを仮定した解析がほとんどであり，滑らかな領域を多角形領域等で近似した場合における解析はほとんど行われていない．

また，DG 法は，有限要素法と比較して問題の自由度が大きいという問題がある．その点を改良したのが，ハイブリッド型不連続 Galerkin(HDG) 法である．HDG 法では，区分的不連続な多項式を用いるのは DG 法と同じであるが，加えて，数値トレースと呼ばれる各要素間上で定義された多項式関数も基底として用いている．数値トレースを用いて各要素上の関数を計算することができるため，特に高次の多項式を用いた場合，問題の自由度を抑えて計算を行うことができる．DG 法と同様に，HDG 法も L^2 ノルムを中心とする線形問題の解析は広く行われている．しかし，HDG 法においても，多角形領域，もしくは滑らかな領域を厳密に要素分割したことを仮定した解析がほとんどであり，滑らかな領域を多角形領域等で近似した場合における解析はほとんど行われていない．

以上の点をふまえ，本論文では，楕円型問題に対する DG 法を中心とする，諸問題への応用へ繋がる数学理論の構築を行った．主に，以下の点に注目し研究を行った．

1. 弱離散最大値原理と L^∞ 評価
2. 滑らかな領域上の方程式に対する Nitsche 法と DG 法
3. 滑らかな領域上の方程式に対する HDG 法

以下，本論文の構成をまとめる．

第 1 章では，多角形領域上の Poisson 方程式に対する DG 法について，弱最大値原理の成立と，L^∞ 評価を行う．以下のような，2 次元多角形領域 Ω 上で定義された非斉次 Dirichlet 境界条件を持つ Poisson 方程式を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

$\mathcal{T}_h$ を領域 Ω の三角形分割とし，DG 法の有限要素空間 V_h を，

$$V_h = V_h^r(\Omega) := \{v_h \in L^2(\Omega) \colon v_h|_K \in \mathcal{P}^r(K) \text{ for each } K \in \mathcal{T}_h\}$$

と定める．ここで $\mathcal{P}^r(K)$ は K 上の r 次以下の多項式全体からなる集合である．$a(\cdot,\cdot)$ を DG 法のスキームを定める双線形形式とする．u を (1) の厳密解，$u_h \in V_h$ を DG 法の近似解とする．ある正定数 κ を用いて $\mathrm{dist}(\Omega_0, \partial\Omega_1) > \kappa h$ を満たす領域 $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ に対して，適当な仮定の下で次の内部 L^∞ 評価を導出した．

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega_0)} \le C \left(\inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{\alpha(h),\Omega_1} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega_1)} \right) \tag{2}$$

ここで，$\|v\|_{\alpha(h),\Omega_1}$ は適当な仮定を満たす関数 $\alpha(h)$ を用いて定まるノルムであり，L^∞ ノルムや $W^{1,\infty}$ セミノルムを含む．また，$u_h \in V_h$ が離散調和である．つまり，$\operatorname{supp}\chi \subset \Omega$ となる $\chi \in V_h$ に対し，$a(u_h, \chi) = 0$ となるものに対し，弱離散最大値原理

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \|u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \tag{3}$$

の成立を示した．内部 L^∞ 評価，弱離散最大値原理を用いて，L^∞ 誤差評価

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \left(\inf_{\chi \in V_h} \|u - \chi\|_{\alpha(h),\Omega} + \|u - u_h\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right) \tag{4}$$

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^r \|u\|_{W^{1+r,\infty}(\Omega)} \tag{5}$$

を得た．第 1 節で問題の概要と主な結果を述べる．第 2 節では，考える方程式と DG スキームを述べ，主定理である内部 L^∞ 評価，弱最大値原理，L^∞ 誤差評価を述べる．第 3 節において，主定理の証明のための準備を述べる．初めに既知の結果を述べ，その後円板領域上の問題に関する評価を示す．第 4，5，6 節にて，それぞれ，内部 L^∞ 評価，弱最大値原理，L^∞ 誤差評価の証明を述べる．第 7 節で，理論を確認する数値計算例の紹介を行う．

第 2 章では，滑らかな領域上の方程式に対し，Nitsche 法と DG 法のスキームの提案と，エネルギーノルム，L^2 ノルムによる誤差評価を行う．Nitsche 法は，主に Dirichlet 境界条件を持つ方程式に対し，弱い形で境界条件を課して計算を行う手法である．そのスキームの持つ性質は DG 法とかなり近いものとなっている．そのため，この章においては，既存の多角形領域に対する Nitsche 法のスキームを参考にして，Nitsche 法と DG 法の両方を同時に扱う．モデル方程式として，次の 2 または 3 次元領域 Ω 上の Robin 境界条件を持つ Poisson 方程式を考える．

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & \text{in} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \dfrac{1}{\varepsilon} u &=& \dfrac{1}{\varepsilon} u_0 + g & \text{on} \quad \Gamma \end{array}\right. \tag{6}$$

ただし，$0 < \varepsilon < \infty$ は定数である．Ω_h を多角形領域，$\mathcal{T}_h$ を領域 Ω_h の三角形分割とし，Nitsche 法の有限要素空間 V_N，DG 法の有限要素空間 V_{DG} をそれぞれ

$$V_N := \{v_h \in C(\overline{\Omega}) \colon v_h|_K \in \mathcal{P}^1(K) \text{ for each } K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_{DG} := \{v_h \in L^2(\Omega) \colon v_h|_K \in \mathcal{P}^1(K) \text{ for each } K \in \mathcal{T}_h\}$$

で定める．u を (6) の厳密解，$u_N \in V_N$，$u_DG \in V_{DG}$ をそれぞれ，Nitsche 法，DG 法の近似解とする．このとき，適当な仮定の下で，次のエネルギーノルムを用いた誤差評価を得た．

$$\|\tilde{u} - u_N\|_{N,h}, \|\tilde{u} - u_{DG}\|_{DG,h} \leq Ch(\|u\|_{H^s(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^1(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\tilde{\Omega})}). \tag{7}$$

ここで, $\tilde{u}$, $\tilde{u}_0$, $\tilde{g}$ はそれぞれ u, u_0, g の Ω, Ω_h を含む滑らかな領域上の関数への拡張であり，$\|v\|_{N,h}$, $\|v\|_{DG,h}$ は H^1 セミノルムを含む Ω_h 上のエネルギーノルムである．さらに，次の L^2 誤差評価を導出した．

$$\|\tilde{u} - u_N\|_{L^2(\Omega_h)}, \|\tilde{u} - u_{DG}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch^2(\|u\|_{H^4(\Omega)} + \|\tilde{u}_0\|_{H^3(\tilde{\Omega})} + \|\tilde{g}\|_{H^3(\tilde{\Omega})}). \tag{8}$$

第 1 節で問題の概要と主な結果を述べる．第 2 節では，考える方程式と Nitsche 法，DG 法のスキームを述べ，主定理であるエネルギーノルム，L^2 ノルムを用いた誤差評価を述べる．第 3 節において，主定理の証明のための準備を行う．最初に，領域についての仮定と，領域の差によって生じる boundary-skin 評価を述べる．その後，スキームに用いた双線形形式の評価を示し，エネルギーノルム，L^2 ノルムの誤差を，離散化誤差と領域近似による誤差に分けて評価する．第 4 節でエネルギーノルムについての誤差評価，第 5 節で L^2 ノルムについての誤差評価を行う．第 6 節で，理論を確認する数値計算例の紹介を行う．

第 3 章では，滑らかな領域上の方程式に対し，HDG 法のスキームの提案と，エネルギーノルム，L^2 ノルムによる誤差評価を行う．モデル方程式として，次の 2 または 3 次元領域 Ω 上の Robin 境界条件を持つ拡散方程式を考える．

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nabla \cdot (c^{-1} \nabla u) &=& f & \text{in} \quad \Omega \\ c^{-1} \nabla u \cdot \nu + \alpha u &=& g & \text{on} \quad \Gamma \end{array}\right. \tag{9}$$

ここで，c は適当な仮定を満たす正定値行列値関数である．Ω_h を多角形領域，$\mathcal{T}_h$ を領域 Ω_h の三角形分割とし，$\mathcal{F}_h$ を $K \in \mathcal{T}_h$ の辺全体からなる集合とする．HDG 法の有限要素空間を

$$W_h := \{w_h \in L^2(\Omega_h) \colon w_h|_K \in W_h(K) \text{ for each } K \in \mathcal{T}_h\}$$
$$M_h := \{\mu_h \in L^2(\mathcal{F}_h) \colon \mu_h|_K \in M_h(F) \text{ for each } F \in \mathcal{F}_h\}$$

で定める．ただし，

$$W_h(K) := \{w_h \in L^2(K) \colon w_h \in \mathcal{P}^1(K)\}, \quad M_h(F) := \{\mu_h \in L^2(F) \colon \mu_h \in \mathcal{P}^1(F)\}$$

である．u を (9) の厳密解，$(u_h, \hat{u}_h) \in W_h \times M_h$ を HDG 法の近似解とする．このとき，適当な仮定の下で，次のエネルギーノルムを用いた評価を得た．

$$\|\{\tilde{u} - u_h, \tilde{u} - \hat{u}_h\}\|_h \leq Ch(\|u\|_{H^s(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\tilde{\Omega})}). \tag{10}$$

ここで，$\tilde{u}$, $\tilde{g}$ はそれぞれ u, g の Ω，Ω_h を含む滑らかな領域上の関数への拡張であり，$\|\{w, \mu\}\|_h$ は H^1 セミノルムを含む Ω_h 上のエネルギーノルムである．さらに，次の L^2 誤差評価を導出した．

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \leq Ch^2(\|u\|_{H^3(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^3(\tilde{\Omega})}). \tag{11}$$

第 1 節で問題の概要と主な結果を述べる．第 2 節では，考える方程式と HDG 法のスキームを述べ，主定理であるエネルギーノルム，L^2 ノルムを用いた誤差評価を述べる．第 3 節において，主定理の証明のための準備を行う．最初に，領域についての仮定と，領域の差によって生じる boundary-skin 評価を述べる．その後，スキームに用いた双線形形式の評価を示す．第 4 節でエネルギーノルムについての誤差評価，第 5 節で L^2 ノルムについての誤差評価を行う．第 6 節で，理論を確認する数値計算例の紹介を行う．