論文内容の要旨

論文題目: SO(3)-invariant G_2-geometry

(SO(3) 不変 G_2 幾何学)

氏名: 茅原涼平

Riemann 多様体のホロノミー群は Riemann 幾何学における最も基礎的な概念の一つである．Berger による, 単連結, 既約, 非対称 Riemann 多様体が持ちうるホロノミー群の分類は, 7 次元と 8 次元 Riemann 多様体上の例外型ホロノミー群 G_2 と Spin(7) を含むことが知られていた．このような例外型ホロノミー群 G_2 を持つ 7 次元 Riemann 多様体は捩率零 (torsion-free) の G_2 構造を持ち, 捩率零の G_2 構造を持つ多様体は G_2 多様体と呼ばれる．また, 8 次元 Spin(7) 多様体も同様に定義される．実際に例外型ホロノミー群を持つ Riemann 多様体が存在するかという問題は長らく未解決であったが, Bryant と Salamon は [BS89] の中で, 初の完備な具体例も含む明示的な具体例を構成した．本論文の目的は, 彼らの与えた具体例の中で特に, 3 次元多様体を底空間とする, 捩率零とは限らない特殊 Lagrange SO(3) 束構造の 1 パラメータ族により構成される G_2 多様体の例を一般化して, SO(3) 対称性を持つ G_2 多様体を統一的な視点から研究することである．

一方, Hitchin は [Hit01] の中で, G_2 多様体を 6 次元多様体上の 3 次と 4 次のコホモロジー類の直積空間上の拘束 Hamilton 力学系として記述した．このとき, その軌道上の各点は, 6 次元多様体上の SU(3) 構造に対応する．この定式化は次に述べる相対論の Hamilton 形式である ADM 形式 [ADM59] を思い起こさせる．M を向きづけられた閉 3 次元多様体とする．$\mathbf{M}$ で M 上の Riemann 計量全体の空間を表し, $T^*\mathbf{M}$ でその余接束を表す．このとき $T^*\mathbf{M}$ は標準的なシンプレクティック構造を持つ．Arnowitt, Deser 及び Misner は真空での Einstein 方程式を $T^*\mathbf{M}$ 上の拘束 Hamilton 系として定式化した．特定の時間スライスを選ぶことで, 彼らの Hamilton 関数は次で与えられる．

$$H_{GR}(\gamma,\pi) = -\int_M \mathrm{R}(\gamma)\mathrm{vol}(\gamma) + \int_M \left(\mathrm{tr}(\pi^2) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\pi)^2\right)\mathrm{vol}(\gamma)^{-1}.$$

ここで, γ は $\mathbf{M}$ の元, π は対称 $(2,0)$ テンソルと体積形式のテンソル積の空間 $\Omega^3(S^2TM)$ の元とし．$T^*\mathbf{M} = \mathbf{M} \times \Omega^3(S^2TM)$ と同一視する．また, $\mathrm{R}(\gamma)$, $\mathrm{vol}(\gamma)$, $\mathrm{tr}(\pi)$, $\mathrm{tr}(\pi^2)$ はそれぞれ γ のスカラー曲率, 体積要素, π と π^2 のトレースとする．

定理 ([ADM59])**.** *開区間 (t_1,t_2) でパラメータ付けられた $T^*\mathbf{M}$ 内の曲線を $(\gamma(t),\pi(t))$ とする．このとき, $M \times (t_1,t_2)$ 上の Lorentz 計量 $-(dt)^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j$ が Ricci 平坦であることと曲線 $(\gamma(t),\pi(t))$ が次を満たすことは同値である:*

1. *曲線 $(\gamma(t),\pi(t))$ は H_{GR} の定める Hamilton 系の軌道である.*

2. 拘束条件

$$R(\gamma)\mathrm{vol}(\gamma)^2+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\pi)^2-\mathrm{tr}(\pi^2)=0 \quad と \quad \sum_{j=1}^{3}\nabla_j\pi^{ij}=0 \quad (i=1,2,3)$$

を M の各点ごとに満たす．ここで, ∇ はそれぞれの計量 $\gamma(t)$ ごとに定まる M 上の *Levi-Civita* 接続とする．

本論文では, SO(3) 対称性を持つ G_2 多様体の場合に, 相対論の Hamilton 形式と上記の Hitchin による G_2 多様体の Hamilton 形式の間の明示的な類似を考察する．

さらに, Donaldson は [Don18] の中で, G_2 幾何学における境界値問題の研究の中で, SL(3; $\mathbb{C}$) 構造をもつ 6 次元多様体の間の G_2 コボルディズムの概念を導入した．このようなコボルディズムは, 自然に 6 次元多様体上の閉 SL(3; $\mathbb{C}$) 構造の空間の上に二項関係を定める．この二項関係の基本的性質は ([Don18], 4 節) で指摘されているように非自明であり, その性質を調べることは 6 次元多様体上の概複素幾何やシンプレクティック幾何の研究と関係することが期待される．本論文では SO(3) 対称性の仮定の下でこの二項関係の性質を研究する．

第 2 章では SU(3) 構造及び G_2 構造の基礎的事項と, 参考論文 [Chi19] の結果を復習する．これらの結果は本論文の後の章で用いられる．この参考論文の中で, 我々は捩率零と仮定しない 6 次元 SU(3) 多様体上の G 不変特殊 Lagrange 束構造を研究した．これは Bryant と Salamon によって扱われたものの一般化である．我々は 3 次元 Lie 群 G がユニモジュラーである場合に, 3 次元多様体を底空間とする主 G 束上のそのような SU(3) 構造を, 主束上のソルダー 1 形式, 接続形式及び 3×3 正定値行列値同変関数からなる三つ組に一意的に分解した．この分解を使って, T^3 作用と SO(3) 作用の場合に, 我々は Lagrange 型の 3 次元群作用をもつ G_2 多様体を上記の三つ組の空間上の拘束力学系として記述した．ここで Lagrange 型とは, G_2 構造を定める 3 形式がその群作用の軌道上に引き戻したときに消えていることとする．

第 3 章では, この参考論文の中で得られた力学系を上記の余接束 $T^*\mathbf{M}$ 上の拘束 Hamilton 系に簡約する．$T^*\mathbf{M}$ 上の Hamilton 関数 H_{G_2} を次で定める．

$$H_{G_2}(\gamma,\pi)=-\int_M \mathrm{R}(\gamma)\mathrm{vol}(\gamma)+\int_M \det(\pi)\mathrm{vol}(\gamma)^{-2}.$$

ここで, $\det(\pi)$ は π の行列式を表す．これは π の定義により, 体積要素 $\mathrm{vol}(\gamma)$ の 3 階テンソルに比例することに注意する．この Hamilton 関数は相対論の ADM 形式における関数 H_{G_2} と非常に類似した形をしている．さて, $T^*\mathbf{M}$ の元から自明な主束 $M\times\mathrm{SO}(3)$ 上の SU(3) 構造への持ち上げを次のように構成する．$\mathcal{P}$ を主束 $M\times\mathrm{SO}(3)$ 上の M の向きと両立するソルダー 1 形式全体の空間と 3×3 対称行列値同変関数全体の空間の直積空間とする．また, $\mathcal{G}$ を $M\times\mathrm{SO}(3)$ のゲージ群とする．すると主 $\mathcal{G}$ 束 $\mathcal{P}\to T^*\mathbf{M}$ が定まり, さらにこの主束は実 3×3 行列の対称部と反対称部への分解から得られる自然な接続を持つ．この接続によって, 開区間 (t_1,t_2) によってパラメータづけられた $T^*\mathbf{M}$ 内の任意の曲線 $\underline{c}(t)$ は, $\mathcal{P}$ 内の曲線 $c(t)$ に持ち上げられる．このとき, この持ち上げられた曲線 $c(t)$ は $M\times\mathrm{SO}(3)\times(t_1,t_2)$ 上に G_2 構造を与える．以上の準備の下で我々の主結果は次に述べられる．

定理 A. $\underline{c}(t)=(\gamma(t),\pi(t))$ を $T^*\mathbf{M}$ 内の曲線とする．このとき, $\underline{c}(t)$ の持ち上げ $c(t)$ が捩率零の G_2 構造を与えることと, 曲線 $\underline{c}(t)$ が次を満たすことは同値である*:*

1. 曲線 $\underline{c}(t)$ は H_{G_2} が定める *Hamilton* 系の軌道である．

2. $\pi/\mathrm{vol}(\gamma)$ は正定値対称 $(2,0)$ テンソルであり，さらに発散零条件 $\sum_{j=1}^{3}\nabla_j\pi^{ij}=0$ $(i=1,2,3)$ を満たす．ここで，この拘束条件は M の各点ごとに満たされるとする．

加えて，H_{G_2} が定める Hamilton 系の軌道は以下の命題のように，π についての発散零条件を保つ．これは ADM 形式における場合と同じである．

命題 B. 曲線 $\underline{c}(t)$ を H_{G_2} が定める *Hamilton* 系の軌道とする．条件 $\sum_{j=1}^{3}\nabla_j\pi^{ij}(t_0)=0$ $(i=1,2,3)$ がある $t_0\in(t_1,t_2)$ で M の各点ごとに満たされているとする．このとき，条件 $\sum_{j=1}^{3}\nabla_j\pi^{ij}(t)=0$ $(i=1,2,3)$ が軌道全体で成り立つ．

さらに，定理 Aと参考論文の結果 ([Chi19], 定理 1.6) を合わせることで次が得られる．

定理 C. 全ての SO(3) 不変 *Lagrange* 束構造を持つ G_2 多様体は局所的に定理 *A*の拘束 *Hamilton* 系の軌道で記述される．

第 4 章では，SO(3) 対称性と余結合 (coassociative) 条件の下で G_2 コボルディズムを考察する．つまり，3 次元多様体 M を底空間とする SO(3) 不変余結合束 $M\times\mathrm{SO}(3)\times[t_1,t_2]$ を考察する．ここで余結合束とは，7 次元全空間上の G_2 構造を定める 3 形式を各 4 次元ファイバーに引き戻したときに消えている束構造である．このとき，$M\times\mathrm{SO}(3)\times[t_1,t_2]$ 上のこのような閉 G_2 構造は，その境界の二つの連結成分 $M\times\mathrm{SO}(3)$ 上に，SO(3) 不変閉 $\mathrm{SL}(3;\mathbb{C})$ 構造を誘導する．これにより，$M\times\mathrm{SO}(3)$ 上のこのような $\mathrm{SL}(3;\mathbb{C})$ 構造の空間の上に二項関係が定まる．我々はこの二項関係を明示的に記述して，特にこの二項関係が非反射的であることを示す．この結果は一般の G_2 コボルディズムの場合の，閉スピン 6 次元多様体がシンプレクティック構造を許容しないことと，G_2 コボルディズムにより定まる閉 $\mathrm{SL}(3;\mathbb{C})$ 構造の空間上の二項関係が非反射的であることは同値であろう，という我々の予想を支持している．

参考文献

[ADM59] R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.*, 116:1322–1330, 1959.

[BS89] R. Bryant and S. Salamon. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy. *Duke math. j.*, 58:829–850, 1989.

[Chi19] R. Chihara. G_2-metrics arisng from special Lagrangian fibrations. *Complex Manifolds*, 6:348–365, 2019.

[Don18] S. Donaldson. Remarks on G_2-manifolds with boundary. *Surv. Differ. Geom.*, 22:103–124, 2018.

[Hit01] N. Hitchin. Stable forms and special metrics. *Comtemp. Math.*, 288:70–89, 2001.