審査の結果の要旨

氏名　　茅原 涼平

Berger による既約非対称 Riemann 多様体のホロノミー群の分類よりこのかた、Lie 群 G_2 および $Spin(7)$ をホロノミー群にもつ Riemann 多様体の研究は、特殊ホロノミーの微分幾何学として幾何学研究における焦点の一つであり続けている。とくに、これら 2 種類の Lie 群を実現する Riemann 多様体の存在問題は Berger の分類ののち未解明であった。1987 年に Bryant によってこれらの存在問題そのものは肯定的に解かれたが、1989 年に Bryant と Salamon により初めて明示的な完備 Riemann 多様体の具体例がいくつか与えられた。本論文の出発点はこれらの例の一つを一般化することにある。

論文提出者 茅原 涼平 は、まず参考論文において、Bryant と Salamon の例の一つが、閉 3 次元多様体を底空間とする特殊 Lagrangian $SO(3)$ 束構造の 1 径数族とみなされることに着目し、これを一般化して考察した。すなわち、3 次元多様体 M 上の主 $SO(3)$ 束 $M \times SO(3)$ における捩率零を仮定しない $SO(3)$-不変特殊 Lagrangian 束構造の全体の集合が、主束上のソルダー 1-形式、接続 1-形式および 3 次正定値行列値同変函数の三つ組全体の集合と一対一対応していることを示した。その系として、$SO(3)$ 不変 Lanrange 束構造をもつ捩率零 G_2 構造を、これら三つ組の空間の上の力学系の軌道として記述している。なお、$SO(3)$ の代わりに T^3 を考えたものについても同様の結果が得られている。

本論文第一部は、3 次元多様体 M は閉じた向きづけられたものとして、この力学系を Hamilton 系に簡約する。$\mathbf{M}$ を M 上の Riemann 計量全体の空間とし、その余接束 $T^*\mathbf{M}$ を考察する。相対論における ADM (Arnowitt, Deser および Misner) 形式は $T^*\mathbf{M}$ 上の Hamilton 形式であり、Arnowitt, Deser および Misner 自身によって、ある開区間上で定義された $T^*\mathbf{M}$ 内の曲線が、ある拘束条件をみたす ADM 系の軌道であることと、M とこの開区間の直積上に Ricci 平坦な Lorentz 計量を定めることとが同値であることが証明されている。本論文では、参考論文での力学系を、 ADM 形式とは異なる Hamilton 函数による $T^*\mathbf{M}$ 上の Hamilton 力学系に簡約する。主結果として、ある開区間上で定義された $T^*\mathbf{M}$ 内の曲線が、ある拘束条件をみたすこの Hamilton 系の軌道であることと、M とこの開区間の直積上に捩率零の G_2 構造を定めることとが同値であることが証明される。さらに、この拘束条件は、開区間上の一点で充たされれば開区間全体で成り立つこともわかる。参考論文の結果をあわせて、 $SO(3)$ 不変 Lagrange 束構造をもつ G_2 多様体は、局所的には必ず、この Hamilton 系の軌道と同型であることが得られる。

本論文第二部では、G_2 コボルディズムについて考察する。Donaldson は閉スピン 6 次元多様体上の $SL(3,\mathbb{C})$ 構造の集合に二項関係を定義し、推移的であることを証明している。しかし、反射的であるかどうかは未解明である。本論文では、3 次元多様体 M について、$M \times SO(3)$ 上の $SO(3)$ 不変 $SL(3,\mathbb{C})$ 構造の集合に、$SO(3)$-不変性を課した新たな二項関係を定義し、後者が非反射的であることを証明した。これは閉スピン 6 次元多様体上のシンプレクティック構造の存在に関するある問題を肯定的に支持するものである。

以上のように本論文第一部と参考論文は、G_2 幾何学において $SO(3)$ 不変 Lanrange 束構造をもつものに限定することにより、相対論における ADM 形式に類似する Hamilton 系を媒介とする統一的な描像を得たものである。本論文第二部とも併せ、特殊ホロノミーの微分幾何学に大きく貢献するものと言える。

よって、論文提出者　茅原 涼平　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。