論文の内容の要旨

論文題目： Boundedness of Weak Fano Pairs with Alpha-invariants and Volumes Bounded Below
（体積とアルファ不変量が下に有界な弱 Fano 対の有界性）

氏　名: Weichung CHEN (陳　韋中)

1. はじめに

この要旨を通して，全て複素数体$\mathbb{C}$上で考える．双有理幾何学では，極小モデルプログラムにより，Fano 多様体は基本的な代数多様体の一つの種類であることがわかる．そのために，Fano 多様体の有界性は代数幾何学の重要な問題である．

まず，2016年，C．Birkar は以下の BAB 定理を証明した[Bir16a][Bir16b].

定理1．1（BAB 定理）． 固定した自然数dと正実数εに対して，全てのd次元ε-Fano 型の多様体の集合は有界である．

ここで，多様体Xがε-Fano 型と言うのは，ある境界Bが存在して，(X,B)はε-klt 弱ログ Fano 対になるとである．BAB 定理は，元々Borisov-Alexeev-Borisov が発表した予想であった．さらに，Birkar の手方は関連する Fano 多様体の問題に大きな進展を与えた．

この論文は主な部分は，[Che18]に基づいており，体積とアルファ不変量が 0 から一様に離れた Fano 多様体の有界性を示している．

さらに，体積とアルファ不変量が下に有界な弱ログ Fano で構成されている有界な族は，その対の上に有界な klt 特異点を持っている有界な補因子も構成できる．

一方，klt 特異点を持つ弱ログ Fano に対して，体積とアルファ不変量の特定の多重乗積は有界であることも示している．

2. ログ Fano 対の有界性定理

まずは$\alpha(X,B)$を定義する．

定義2．2． (X,B)は lc 特異点を持つログ対，DはX上の$\mathbb{R}$-Cartier 因子とする．そのとき，$\mathrm{lct}((X,B),\ D)$と$\mathrm{lct}((X,B),\ |D|_{\mathbb{R}})$は以下のようにされる．

$$\mathrm{lct}((X,B)D) = \sup\{t \geq 0 | (X,B+tD)\text{は lc 特異点を持っている}\}.$$

$$\mathrm{lct}((X,B),\ |D|_{\mathbb{R}}) = \inf\{\mathrm{lct}((X,B)M) | M \in |D|_{\mathbb{R}}\}.$$

そのうえで，(X,B)は弱ログ Fano 対の場合は，α不変量$\alpha(X,B)$は以下のように定義される．

$$\alpha(X,B) = \mathrm{lct}((X,B),\ |-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}).$$

この章は主に下記の定理を説明する.

定理2．1． 固定した自然数dと正実数θ，下降鎖条件を満たす実数の部分集合Sに対して，klt 特異点を持つd次元弱ログ Fano 対のクラス$\mathfrak{D}$を下のように定義する.

$$\mathfrak{D}=\{(X,B) \mid (X,B)\text{は klt 特異点を持つ弱ログ Fano},\ \operatorname{vol}(-(K_X+B))>\theta,$$
$$\alpha(X,B)>\theta,\ B\text{の係数は}S\text{に属する}\}.$$

そのとき，$\mathfrak{D}$は有界である.

定理2．1の境界Bはゼロである場合は C． Jiang によって証明されている[Jia15]. その場合は，Xが$\mathbb{Q}$-Fano 多様体と呼ばれている.

さらに，定理2．1の条件で，以下の定理によって，(X,B)に対して有界な補因子も構成できる.

定理2．3． 定理2．1中の$\mathfrak{D}$に対して，以下の条件を満たす$[0,1]$の有限部分集合Γ_1，Γ_2と自然数nが存在する. (X,B)は$\mathfrak{D}$の元とする. このとき(X,B)に対して$\frac{1}{n}$-lc (n,Γ_1,Γ_2)-補因子が存在する.

ここで，(n,Γ_1,Γ_2)-補因子は Han-Liu-Shokurov によって，以下のように定義される[HLS19].

定義2．4． (X,B)はログ対，nは自然数，Γ_1とΓ_2は$[0,1]$の有限部分集合とする. (n,Γ_1,Γ_2)-補因子と言うのは，以下の条件を満たすX上の因子K_X+B^+である.

(1) $B^+\geq B$,

(2) ある自然数rとΓ_1の元$a_1,a_2,\dots,a_r$,

(3) $\sum_{i=1}^r a_i=1$,

(4) あるX上の有効因子B_i，B_iの係数はΓ_2に属する,

(5) $\sum_{i=1}^r a_i B_i=B^+$,

(6) $n(K_X+B_i)\sim 0$，(X,B_i)は lc ログ Calabi-Yau 対である.

$\Gamma_1=\{1\}$, と共に$r=1$の場合は，K_X+B^+が強n-補因子と言う.

また，有界な弱ログ Fano の族に対して，以下の有界な補因子についての定理も示される.

定理2．5． 自然数dと正実数θを固定して，$\mathcal{P}$は有界なd次元弱ログ Fano の族とする. そのとき，以下の条件を満たす自然数nが存在する. もし(X,B)は$\mathcal{P}$の元なら，$\operatorname{vol}\big(-(K_X+B)\big)>\theta$と$\alpha(X,B)>\theta$を満たせば，$(X,B)$に対して$\frac{1}{n}$-lc 強$n$-補因子が存在する.

3. 体積とアルファ不変量の多重乗積の有界性

双有理幾何学では，多様体の有界性以外に，ほかの不変量の有界性も重要と考えされている. 以下の定理で，不変量として体積とアルファ不変量のある多重乗積の有界性を示している.

定理３．１． 自然数dを固定すると，d次元 klt 特異点を持つ弱ログ Fano(X,B)に対して，体積とアルファ不変量のある多重乗積

$$\alpha\,(X,B)^{d-1}\mathrm{vol}(-(K_X+B))$$
は上に有界である．

定理３．１．の中で，$\alpha\,(X,B)^{d}\mathrm{vol}(-(K_X+B))$は上に有界であることはよく知られている[Kol97]．一方，正実数tに対して，$\alpha\,(X,B)^{d-1-t}\mathrm{vol}(-(K_X+B))$は上に有界ではない例も存在する．

参考文献

[Bira] C. Birkar, Anti-pluricanonical systems on Fano varieties, 2016, to appear in Ann. of Math.
[Birb] C. Birkar, Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties, arXiv:1609.05543, 2016, preprint.
[Che18] W. Chen, Boundedness of varieties of Fano type with alpha-invariants and volumes bounded below, 2018, to appear in Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences.
[HLS] J. Han, J. Liu, V. V. Shokurov, ACC for minimal log discrepancies of exceptional singularities, 2019, preprint.
[Jia17] C. Jiang, Boundedness of $\mathbb{Q}$-Fano varieties with degrees and alpha-invariants bounded from below, 2017, to appear in Annales scientifiques de l'ENS.
[Kol97] J. Koll'ar, Singularities of pairs, Algebraic geometry-Santo Cruz 1995, pp. 221-287, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.