

## 審査の結果の要旨

氏名 中井拳吾

中井拳吾氏の学位論文は主に二つのトピックによって構成されている。一つ目は、機械学習を使った新たな乱流研究、特に、高次元ダイナミクスの学習に適したリザーバーコンピューティングと呼ばれるものを利用して流体のマクロ集計量の時間発展モデルを構築したことである。二つ目は、分数冪ラプラシアンをもつ Navier-Stokes 方程式の解の正則性の判定条件を構築したことである。

先ずは一つ目のトピックを説明したい。流体乱流の研究、特に工学や気象学への応用では、通常、流体粒子の速度等のマイクロなダイナミクスよりも、それらの平均を取ったマクロ集計量のダイナミクスが重要になる。しかしながら、そういった乱流のマクロ集計量の時間発展を描写する閉じた方程式を解析的に導出することは困難であることが広く知られている。これをクロージャー問題と言い、今現在でも世界を揺るがす大問題であり続けている。流体粒子のマイクロダイナミクスを参照する必要のない閉じた乱流方程式を導くことが実用上重要だが、最終的には各研究者の経験則にゆだねられてしまっているのが現状である。コルモゴロフの $-5/3$  則といったコンセンサスの得られている統計則とは違って、賛否両論が常に巻き起こってしまっているのがこのクロージャー問題である。

そのような中、中井拳吾氏は、そういった経験則を乱流研究の出発点とはせず、機械学習を使った新たな乱流研究に取り組んだ。より具体的には、高次元ダイナミクスの学習に適したリザーバーコンピューティングと呼ばれるものを利用して流体のマクロ集計量の時間発展モデルの構築に取り組んだ。機械学習の研究は近年盛んに行われているが、現在でも時間発展に適用する例はそこまで多くはなく、2018年に中井氏が斉木氏との共著で *Physical Review E* に掲載された論文が、乱流の時間発展モデルを、機械学習を用いて構築した世界で最初の結果となる。流体力学、力学系理論、数値解析の絶妙なバランス感覚によってその乱流のクロージャー問題を解決した点が高く評価される。機械学習業界で標準的な Python のルーチンなどを用いずに自らプログラミングを行うことで、既存の学習手法にとらわれることなく自在に学習を工夫し、最終的に閉じた乱流方程式の構築を成功させた。

また、実用上入手可能な時系列データの種類は多くなく、背後に存在する力学系の次元

よりも少ないことが多々ある。そのような場合に力学系分野で得られている **Takens**、**Yorke** らによる時間遅れ座標によるアトラクタの再構成のアイデアに基づいて、1次元観測データの  $N$  次元時間遅れベクトルの学習から、そのダイナミクスを支配する高次元力学系の数理モデリングを成功させた。この結果は、斉木氏との共著論文として **Discrete and Continuous Dynamical Systems S** に採択されている。論文では計算量を低減する上で実用上とても有用な知見を明らかにしており、時間発展の機械学習モデリングにおいて（流体乱流に限らず）参照される重要な論文になることだろう。

次に二つ目のトピックを説明したい。中井氏は、分数冪ラプラシアンを持つ **Navier-Stokes** 方程式の解の正則性の判定条件についての洞察を進めた。その研究結果は、単独研究として、2019年に **Journal of Mathematical Fluid Mechanics** にすでに掲載されている。分数冪ラプラシアンについては、その微分階数が  $5/2$  以上の時に滑らかな時間大域解をもつことを1969年に **J. L. Lions** によって示された。微分階数がちょうど2の時が有名なミレニウム懸賞問題に対応するので、この  $5/2$  をどこまで下げられるかという観点から、今も研究が活発に進められている。そのような中、中井氏は、1993年の **Constantin-Fefferman** の渦度方向による解の正則性判定条件の古典的結果はもちろんの事、**Serrin** 型の爆発判定条件を組み合わせた以下の3つの先行結果：2002年の **Beirao-da-Veiga**、同じく2002年の **Beirao-da-Veiga-Berselli**、2005年の **Zhou** の結果を包含する形の正則性判定条件を構築した。ヘルダーの不等式やヤングの不等式といった基礎的な不等式が解析道具ではあるものの、沢山ある **index** のバランスを勘案しながら絶妙に不等式を施していかなければならず、かなりの計算力を要する。そのような中、彼はこの **field** で最新の数学結果を創出することに成功した。

以上のように、研究業績は機械学習、数学解析と多岐に渡り、その上、それぞれがそれぞれの最前線に位置づけられる結果となっている。よって、論文提出者 中井拳吾 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。