論文の内容の要旨

論文題目：Studies of compactifications of affine homology 3-cells into del Pezzo fibrations
(Del Pezzo ファイブレーションへのアフィンホモロジー 3-胞体のコンパクト化の研究)

氏名：長岡　大

Hirzebruch [6] はアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ を開部分多様体として含み, 第 2 Betti 数 B_2 が 1 となる非特異完備多様体の分類問題を提起した. 本論文 [13] では, この Hirzebruch の問題を起源に持つ 3 つの問題について, 埋め込み先が曲線上の del Pezzo ファイブレーションとなる場合に研究している. 以下, 複素数体上の代数多様体を考える. また, 本論文 [13] を引用する際は該当箇所を丸括弧で囲む.

1　3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^3$ の特徴付け

1 つ目の問題はアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の特徴付けである. 正の整数 n に対し, アフィンホモロジー n-胞体とは, $\mathbb{A}^n$ と同型な特異ホモロジー環を持つ非特異アフィン多様体のことである. 様々な研究結果 [9, 14, 15] により, $\mathbb{A}^n$ とは同型でない多くのアフィンホモロジー n-胞体の存在が知られている. すると自然な問いとして, 全てのアフィンホモロジー n-胞体の集合において, $\mathbb{A}^n$ はどのように特徴付けられるか, が考えられる. 古島 [4] はこの問いに対し, $\mathbb{A}^3$ はアフィンホモロジー 3-胞体のうち, $B_2 = 1$ を満たす非特異 Fano 多様体に埋め込まれる唯一の多様体であることを示した. 一方, tom Dieck-Petrie [15] や岸本 [8] の結果から, 埋め込み先の B_2 が 2 以上の場合は, 古島による $\mathbb{A}^3$ の特徴付けの単純な拡張は成り立たないことが分かる. そこで, 本論文では次の条件を満たすコンパクト化を考えた.

定義 1 (Definition 2.1.1)**.** X を $B_2(X) = 2$ を満たす非特異射影多様体, $f\colon X \to C$ を曲線 C への端射線収縮射, $D \subset X$ を被約有効因子, $U \coloneqq X \setminus D$ とする. D がある f-ファイバーを含む時, 三つ組 (X, D, f) を f **と両立する** U **のコンパクト化**という. また, $D_f \subset D$ を f-ファイバー, $D_h \coloneqq D - D_f$ を残りの因子とする時, f と両立する U のコンパクト化を三つ組 (X, D_h, D_f) で表すこともある.

すると $\mathbb{A}^3$ は $\mathbb{P}^2$ 束と両立するよう埋め込まれる唯一のアフィンホモロジー 3-胞体であることが容易にわかる (Lemma 2.6.1). 本論文の Chapter 2 では, 主定理の一つとして, $\mathbb{A}^3$ は全てのファイバーが二次曲面であるファイブレーション（以下, **二次曲面ファイブレーション**という）と両立するよう埋め込まれる唯一のアフィンホモロジー 3-胞体であることを証明している:

定理 1 (Theorem 2.1.3)**.** Q を 3 次元非特異射影多様体, $q\colon Q \to C$ を曲線上の二次曲面ファイブレーションとする. 被約有効因子 $D_h \subset Q$ と q-ファイバー D_f に対して, 次は同値.

(1) 補集合 $Q \setminus (D_h \cup D_f)$ はアフィンホモロジー 3-胞体である.
(2) C は有理的であり, 補集合 $Q \setminus (D_h \cup D_f)$ は $\mathbb{A}^3$ と代数的同型である.

補足として, 定理 1 の条件 (2) を満たす例は構成できる (Example 2.1.5). 更に, 後述の定理 2, 3 を用いれば,

同条件を満たし, 互いに異なる例を加算無限個構成できる. 一方で, 境界因子がファイバーを含まなければ, 定理 1 が成り立たないことを示す例も構成している (Example 2.5.4).

また, 定理 1 の詳細版 (Theorem 2.4.2) を用いれば, 未発見であった $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化が構成できる. 例えば, 岸本の分類表 [8, Table 1] で誤って除外されていた $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化 (Examples 2.5.1, 2.5.2) や, Müller-Stach の分類表 [12, Table 1] で誤って除外されていた $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化 (Example 2.5.3) も構成している.

2 標準的なコンパクト化への双有理写像の体系的構成

2 つ目の問題は, $\mathbb{A}^n$ の一般のコンパクト化から標準的なコンパクト化への双有理写像の体系的な構成である. 森 [11] は Hirzebruch 曲面の間に 3 種類の具体的な双有理写像を定義し, 任意の $\mathbb{A}^2$ の Hirzebruch 曲面へのコンパクト化に対して, それらの双有理写像を有限回合成すると, 射影平面への標準的なコンパクト化 $(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1)$ への双有理写像が構成できることを示した.

本論文の Chapter 2 では, 二次曲面ファイブレーションと両立する任意の $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化に対し, 3 次元射影空間への標準的なコンパクト化 $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2)$ への双有理写像を体系的に構成した. これらの双有理写像は, 以下の elementary link を合成することで得られる.

定義 2 (Definition 1.2.1)**.** X を 3 次元非特異射影多様体, $\sigma\colon X \to C$ を相対 Picard 数が 1 の端射線収縮射とする. $r \subset X$ を非特異閉部分曲線または点とし, $\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ を r に沿った爆発とする. ここで $-K_{\widetilde{X}}$ が $(\sigma \circ \varphi)$-豊富だと仮定する. すると, 森錐 $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}/C)$ の他方の端射線も $K_{\widetilde{X}}$-負であるため, その収縮射 $\psi\colon \widetilde{X} \to Y$ が存在する. $\tau\colon Y \to C$ を誘導された射とすると, 次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ X \arrow[d, "\sigma"'] & & Y \arrow[d, "\tau"] \\ C \arrow[rr, equal] & & C. \end{tikzcd} \tag{1}$$

ψ が双有理であるとき, 図式 (1) を **r を中心とした elementary link** という. 本論文では, φ-例外因子の Y での狭義変換を **elementary link の例外因子**と呼ぶ. [1, Proposition 3.5] より, elementary link の例外因子は実際に因子になる. 底多様体 C が明らかな場合, elementary link を $X \dashrightarrow Y$ と略記することもある.

次に列挙する状況では, 定義 2 の仮定が満たされ, elementary link が構成できることが知られていた.

- σ が $\mathbb{P}^2$ 束で r が σ-ファイバー内の直線または点の場合 [10].
- σ が二次曲面ファイブレーションで r が σ-切断の場合 [2].
- σ が二次曲面ファイブレーションで r が非特異 σ-ファイバーの母線の場合 [5]

出力 $\tau\colon Y \to C$ は, 1, 2 番目の状況では $\mathbb{P}^2$ 束, 3 番目の状況では二次曲面ファイブレーションになる. 更に 3 番目の状況において, r が特異 σ-ファイバーの母線の場合でも, 同様の elementary link が構成できることを本論文で示している (Lemma 1.6.1).

体系的な双有理写像の構成方法は, 境界因子の水平的な成分 D_h が正規であるか否かで異なる.

定理 2 (Lemma 1.6.2, Theorem 2.1.6)**.** (Q, D_h, D_f) を二次曲面ファイブレーション $q\colon Q \to \mathbb{P}^1$ と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化とし, D_h が非正規であると仮定する. この時, 以下が成り立つ.

(0) D_h の特異点集合 s は f-切断になる.

(1) s を中心とした elementary link $g_1\colon Q \dashrightarrow P$ を取り, その出力である $\mathbb{P}^2$ 束を $p\colon P \to \mathbb{P}^1$ とする. $D_{f,1}$ を D_f の P での狭義変換, $D_{h,1}$ を elementary link の例外因子とすると, $(P, D_{h,1}, D_{f,1})$ は p と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化となる.

(2) $\infty \coloneqq p(D_{f,1})$ とおく. この時, ある ∞ 上のファイバーの直線または点を中心とした elementary link の合成 $g_2\colon P \dashrightarrow P'$ が存在して, P' は $\mathbb{P}^3$ のある直線 l に沿った爆発であり, その例外因子 $D_{h,2}$ は $D_{h,1}$ の P' での狭義変換となる.

$p'\colon P' \to \mathbb{P}^1$ を elementary link の出力である $\mathbb{P}^2$ 束とすると, 実は p' は l を含む平面の狭義変換がなす線形系で与えられる. 従って $g_3\colon P' \to \mathbb{P}^3$ を l に沿った爆発射, $D_{f,2} \coloneqq p'^*(\infty)$ とすると, $g_{3*}D_{f,2} \subset \mathbb{P}^3$ は l を含む平面となる. これを $\mathbb{P}^2$ で表す. よって $(P', D_{h,2}, D_{f,2})$ は p' と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化である. これらの事実と定理 2 から, $\mathbb{A}^3$ の同型射 $Q \setminus (D_h \cup D_f) \cong \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^2$ を誘導する次の双有理写像を得る:

$$\begin{tikzcd}
(Q, D_h, D_f) \arrow[r, dotted, "g_1"] \arrow[d, "q"'] & (P, D_{h,1}, D_{f,1}) \arrow[r, dotted, "g_2"] \arrow[d, "p"'] & (P', D_{h,2}, D_{f,2}) \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "p'"'] & (\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2) \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1. &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

定理 3 (Theorem 2.1.7)**.** (Q, D_h, D_f) を二次曲面ファイブレーション $q\colon Q \to \mathbb{P}^1$ と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化とし, D_h が正規であると仮定する. $\infty \coloneqq q(D_f)$ とおく. この時, ∞ 上のファイバーの母線を中心とした elementary link の合成 $h_1\colon Q \dashrightarrow Q'$ が存在して, Q' は非特異二次超曲面 $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ のある二次曲線 r に沿った爆発であり, その例外因子 D'_h は D_h の Q' での狭義変換となる. 更に, elementary link の出力として得られる二次曲線ファイブレーションを $q'\colon Q' \to \mathbb{P}^1$ とすると, $D'_f \coloneqq q'^*(\infty)$ は $\mathbb{P}^3$ 内の二次曲線錐と同型である.

実は q' は r を含む超平面切断の狭義変換がなす線形系で与えられる. 従って $h_2\colon Q' \to \mathbb{Q}^3$ を r に沿った爆発射とすると, $h_{2*}D'_f \subset \mathbb{Q}^3$ は r を含む二次曲線錐となる. これを $\mathbb{Q}^2_0$ と表す. $h_3\colon \mathbb{Q}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ を $\mathbb{Q}^2_0$ の頂点からの射影とすると, [4, pp.117–119] と同様の議論により, ある平面 $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ に対し同型射 $\mathbb{Q}^3 \setminus \mathbb{Q}^2_0 \cong \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^2$ が誘導される. よって (Q', D'_h, D'_f) は q' と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化である. これらの事実と定理 3 から, $\mathbb{A}^3$ の同型射 $Q \setminus (D_h \cup D_f) \cong \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^2$ を誘導する次の双有理写像を得る:

$$\begin{tikzcd}
(Q, D_h, D_f) \arrow[r, dotted, "h_1"] \arrow[d, "q"'] & (Q', D'_h, D'_f) \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "q'"'] & (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^2_0) \arrow[r, dotted, "h_3"] & (\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2) \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1. & &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

3　3 次元加法群 $\mathbb{G}_a^3$ の同変コンパクト化

3 つ目の問題は, 加法群の構造を入れたアフィン空間 $\mathbb{G}_a^n$ に対する Hirzebruch の問題の同変版である. $\mathbb{G}_a^n$-variety とは, 稠密開軌道が $\mathbb{G}_a^n$ と同型になる $\mathbb{G}_a^n$-作用をもつ多様体のことである. $\mathbb{G}_a^n$-variety の研究は Hassett-Tschinkel [5] により初めてなされ, 以降 Hassett-Tschinkel [5], Huang-Montero [7], Fu-Montero [3] らによって非特異 Fano $\mathbb{G}_a^n$-variety の分類が進められている.

本論文の Chapter 3 では, $\mathbb{G}_a^3$-variety が del Pezzo ファイブレーションの構造を持つ場合を取り扱う. 結果として $\mathbb{G}_a^3$-variety の構造を与える $\mathbb{G}_a^3$-作用, 即ち $\mathbb{G}_a^3$-構造を持つ del Pezzo ファイブレーションを分類している:

定理 4 (Theorem 3.1.2)**.** $f\colon X \to C$ を曲線上の del Pezzo ファイブレーション, $D \subset X$ を被約有効因子としたとき, 以下は同値.

(1) X は稠密開軌道を $X \setminus D$ とする $\mathbb{G}_a^3$-構造を持つ.

(2) f は $\mathbb{P}^2$-束であり, D は f の部分 $\mathbb{P}^1$-束 D_1 と f-ファイバー D_2 の和である. 更に D_1, D_2 は X の有効因子錐を生成する.

定理 4 の証明の本質的な部分は, f が二次曲面ファイブレーションの場合に $\mathbb{G}_a^3$-構造が存在しないことの証明 (Proposition 3.4.4) である.

参考文献

[1] Alessio Corti. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 4, No. 2, pp. 223–254, 1995.

[2] Harry D'Souza. Threefolds whose hyperplane sections are elliptic surfaces. *Pacific J. Math.*, Vol. 134, No. 1, pp. 57–78, 1988.

[3] Baohua Fu and Pedro Montero. Equivariant compactifications of vector groups with high index. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, Vol. 357, No. 5, pp. 455–461, 2019.

[4] Mikio Furushima. A birational construction of projective compactifications of $\mathbf{C}^3$ with second Betti number equal to one. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 178, pp. 115–128, 2000.

[5] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Spaces of sections of quadric surface fibrations over curves. In *Compact moduli spaces and vector bundles*, Vol. 564 of *Contemp. Math.*, pp. 227–249. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[6] Friedrich Hirzebruch. Some problems on differentiable and complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 60, pp. 213–236, 1954.

[7] Zhizhong Huang and Pedro Montero. Fano threefolds as equivariant compactifications of the vector group. *arXiv preprint arXiv:1802.08090*, 2018.

[8] Takashi Kishimoto. Compactifications of contractible affine 3-folds into smooth Fano 3-folds with $B_2 = 2$. *Math. Z.*, Vol. 251, No. 4, pp. 783–820, 2005.

[9] Mariusz Koras and Peter Russell. Contractible threefolds and $\mathbf{C}^*$-actions on $\mathbf{C}^3$. *J. Algebraic Geom.*, Vol. 6, No. 4, pp. 671–695, 1997.

[10] Masaki Maruyama. On a family of algebraic vector bundles. In *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki*, pp. 95–146. Kinokuniya, Tokyo, 1973.

[11] Shigefumi Mori. $\mathbb{A}^2$ の rational ruled surfaces への埋め込みについて. Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, Vol. 183, pp. 31–50, 1973.

[12] Stefan Müller-Stach. Compactifications of $\mathbf{C}^3$ with reducible boundary divisor. *Math. Ann.*, Vol. 286, No. 1-3, pp. 409–431, 1990.

[13] Masaru Nagaoka. *Studies of compactifications of affine homology* 3*-cells into del Pezzo fibrations*. PhD thesis, The University of Tokyo, 2020.

[14] Chakravarthi Padmanabhan Ramanujam. A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 94, pp. 69–88, 1971.

[15] Tammo tom Dieck and Ted Petrie. Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one. *Japan. J. Math. (N.S.)*, Vol. 16, No. 1, pp. 147–169, 1990.