論文の内容の要旨

論文題目

On induction for twisted representations of conformal nets
(共形ネットの捩れ表現の誘導について)

氏名　野島　遼

この論文では共形ネットの捩れ表現に対して誘導表現にあたるものを導入し, その性質について研究を行った. 内容について説明するために, 共形ネットと背景となる話題について先に触れておく.

Haag-Kastler による代数的場の量子論の枠組みでは, 時空の各領域でパラメータ付けされた von Neumann 環の族により場の量子論を記述する. 当初は 4 次元 Minkowski 空間を時空とする場合が考えられてきたが, 近年では 2 次元共形場理論のカイラル成分をこの枠組みで定式化した共形ネットが盛んに研究されている. この場合, 時空にあたるものは単位円周 S^1 であり, 共形ネット $\mathcal{A}$ は各開区間 $I \subset S^1$ によりパラメータ付けされた von Neumann 環の族 $\{\mathcal{A}(I)\}$ でいくつかの公理を満たすものとして定義される.

共形ネットに対してその表現を自然な方法で定義することができ, 表現論は共形ネットを研究する上での主要な技術の一つである. ところで, 表現をそのまま扱うことは難しいため, この分野では表現の代わりに $\mathcal{A}$ (より正確には $\mathcal{A}(I)$ で生成される環の) の自己準同型を考えるといったことが行われる. 実際, すべての表現は $\mathcal{A}$ のある自己準同型と同値であり, 表現に対応する自己準同型は Doplicher-Haag-Roberts (DHR) 自己準同型と呼ばれる. DHR 自己準同型の合成により表現同士のテンソル積を定義でき, さらにテンソル積の左右を入れ替える対称性 (braiding) が存在することが知られている. すなわち, $\mathcal{A}$ の表現圏は braided tensor category となる. ここで braiding には 2 通りの選び方があることを述べておく.

さて, 共形ネット $\mathcal{B}$ が別の共形ネット $\mathcal{A}$ の部分ネットと実現している場合を考える. このような状況の一般論は, 部分因子環の手法を用いることで Longo-Rehren によって考察されている. 特に包含 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ の Jones 指数と呼ばれる量が有限な場合には, ある特別な DHR 自己準同

型 θ と θ が持つある種の積構造により拡大 $\mathcal{A}$ を特徴づけられることが示された．さらに, 同論文では表現の誘導と制限の概念が導入された．これらはそれぞれ α-誘導, σ-制限と呼ばれ, Xu や Böckenhauer-Evans, Böckenhauer-Evans-Kawahigashi らの論文でその性質が詳しく調べられ, 共形ネットの研究において重要な役割を果たしている．後の説明のために α-誘導について詳しく触れておく．部分ネット $\mathcal{B}$ の DHR 自己準同型 λ に対して, その α-誘導はもとの自己準同型を $\mathcal{A}$ に拡張することで与えられる．この拡張は θ と λ の間の braiding を用いることで定義され, $\alpha_\lambda^{\pm}$ のように書かれる．ここで $+$ と $-$ の符号は braiding の選び方を区別するためのものである． 一般に $\alpha_\lambda^{\pm}$ は DHR 自己準同型になるとは限らないが, その既約成分で $+$ と $-$ のどちらにも表れるようなものは $\mathcal{A}$ の DHR 自己準同型を与える．このようにして $\mathcal{B}$ の表現圏と θ (とその積構造) から $\mathcal{A}$ の表現全てを構成することができる．

部分ネットの代表的な例として, 有限群による orbifold と呼ばれるものがある．これは有限群 $G < \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ をとり, その不動点環 $\mathcal{A}^G$ として得られるものである．この場合に, $\mathcal{A}$ の言葉で $\mathcal{A}^G$ の表現圏をどう理解すればよいかというのは自然な問題意識である．この問題は Müger により体系的に論じられ, $\mathcal{A}$ の表現だけでなく捩れ表現と呼ばれるものまで考えることで解決される．ここで, $g \in G$ に対して g-捩れ表現は $\mathcal{A}$ のある種の自己準同型として定義される．全ての $g \in G$ に対して, g-捩れ表現全てを集めてきて得られる圏を $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ と書く．Müger は $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ に braided G-crossed category と呼ばれる構造が入ることを示した．大雑把に説明すると, braided G-crossed category とは G の作用付きの tensor category で G-crossed braiding と呼ばれる通常の braiding のようなテンソル積の入れ替えに関する対称性を持つものである．これらの構造にから, $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}^G$ の表現圏の braided tensor category としての構造を復元できる．

以下では, 本論文で行った研究について概説する．本論文では, 共形ネットとその部分ネット $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ と部分群 $G < \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ でその各元が $\mathcal{B}$ を保つようなものが与えられている状況を考えた．群 G を $\mathcal{B}$ に制限して得られる群を G' と書くことにする．このような状況で, $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ と $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ の関係はどうなっているかというのは自然な問題意識である．より具体的には, 通常の表現の時のように $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ と θ から $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ を復元できないかという問題を考えた (すぐに述べるように, 実際には $\mathcal{B}$ 側にさらに追加の情報が必要である)．このような問題意識のもと, 本論文では α-誘導の操作を捩れ表現に対して一般化することに取り組んだ．α-誘導は表現圏における braiding を用いることで定義されていたので, $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ の G'-crossed braiding を用いるというのは自然なアイデアである．しかし, 一般には $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ と θ だけからは $\mathcal{A}$ に作用する G の情報は復元できないので, $\mathcal{B}$ の側で群 G に関する追加の構造を考える必要がある．そのような構造として, θ の G-equivariant structure と呼ばれるものを用いることができる．本論文の序盤において, θ に定まる G-equivariant structure と拡大への G の作用の関係について詳しくまとめておいた．ただし, そこでは簡便のため, 共形ネットの包含ではなく部分因子環の設定を考えている．また, 群 G を $\mathcal{B}$ に制限する操作が $G \cong G'$ を誘導する場合については, Bischoff-Jones-Lu-Penneys によってこのような関係は既に論じられていることを述べておく．

さて, α-誘導をどのようにして一般化するかという話題に戻ると, $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ の G'-crossed braiding に加えて上記の G-equivariant structure を用いるとよい一般化ができるのではないかと

期待できる．本論文では, これらの構造を用いて $\mathcal{B}$ の捩れ表現 (自己準同型で定義されるのであった) を $\mathcal{A}$ の自己準同型に拡張する方法を 2 通り定義した．これらは α-誘導を一般化するものになっており, α-誘導で知られている性質のほとんどが適切な翻訳のもと新しく定義した誘導表現に対しても成り立つことを確認した．具体的には, 次のような流れで捩れ表現の誘導について研究を行った．最初にいくつかの基本的な性質をまとめたのち, 捩れ表現に対する誘導の intertwiner の空間について考察し, 次元に関する公式を導いた．これは通常の α-誘導で知られている公式の一般化になっている．また, σ-制限との関係も調べ, 通常の α-誘導で知られている $\alpha\sigma$-reciprocity 公式の一般化を導くこともできた．特に, これらの帰結として 2 種類の誘導表現のどちらにも表れるような既約成分が $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ の表現を与えていることが分かる．さらに, $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ の G-crossed braiding も $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ の G'-crossed braiding により記述できることを示した．本論文の結果により, $G-\mathrm{Loc}\mathcal{A}$ と $G'-\mathrm{Loc}\mathcal{B}$ の関係を一般論として整理できたと考えている．