# 論文の内容の要旨

論文題名　On asymptotic behavior and maximal regularity of the Navier-Stokes equations and related problems
(ナヴィエ・ストークス方程式とそれに関連する問題に対する漸近挙動と最大正則性について)

氏名　古川 賢

本論文では, 非圧縮流体の運動を記述する偏微分方程式であるナヴィエ・ストークス方程式とそれに関係する方程式について, 適切性, 漸近解析, 特異極限問題, 最大正則性等の数学解析の問題を研究する. ナヴィエ・ストークス方程式は流体力学における最も基本的な偏微分方程式である. また, 非常に豊かな構造を持っているため, 数学的にも莫大な研究が蓄積されており, 現在でも活発に研究がなされている. 本論文で扱われる方程式は, 渦, 天気予報, 自由境界問題など我々に身近な流体現象と深いかかわりを持っている.

第 1 章では, 3 次元オセーン渦 (ラム・オセーン渦) に対して $L^2$-漸近安定性を考察する. Oseen 渦は, 流体力学における渦の最も基本的なモデルの一つであり, ナヴィエ・ストークス方程式の古典解の一つでもある. このオセーン渦に対して初期摂動を与え, それをナヴィエ・ストークス方程式によって時間発展させ, その解とオセーン渦の $L^2$ での誤差が時間無限大でゼロに収束するかという問題 ($L^2$-漸近安定性問題) を考える.

2 次元平面での漸近安定性については完全に解決されているが, 3 次元オセーン渦に対しては, 適切性や漸近安定性に関する結果はほとんど知られていない. 3 次元オセーン渦の数学解析の難しさとして, 鉛直方向に関する空間減衰が全く得られないことと強い特異性を持っていることが挙げられる.

本章では, 鉛直方向に対して周期境界条件を持つ層状領域において, 必ずしも小さいとは限らない初期摂動に対して, 全循環が十分小さい 3 次元オセーン渦は $L^2$-漸近安定であることを証明している. 証明の基本的なアイデアは, 領域が 2 次元平面に近ければ, 3 次元オセーン渦に対しても漸近安定性が示せるのではないかという考察に基づく. まず摂動方程式の弱解の存在を示し, その後, その弱解の $L^2$-ノルムが時間無限大でゼロに減衰することを示す. 減衰は, 弱解を (鉛直成分に関する平均がゼロ

の項)+(鉛直成分に関する平均がゼロではない項) に分解し, ポアンカレの不等式と2次元 Oseen 渦の漸近安定性を証明する際に用いられている手法を援用することによって証明できる. この結果は, 現在雑誌に投稿中である.

第2章では, 海や大気など薄い3次元領域内で満たされた流体の運動を記述するプリミティブ方程式の導出の数学的正当化を行う. プリミティブ方程式に対しては時間大域適切性が既に知られている. この事実は3次元ナヴィエ・ストークス方程式に対しては時間大域適切性が有名な未解決問題となっていることと対照的であることから, プリミティブ方程式に対する数学的な研究は近年活発に行われている.

薄い領域内では, レイノルズ数の観点から水平方向の粘性係数が $O(1)$, 鉛直方向の粘性係数が $O(\varepsilon^2)$ であるようなナヴィエ・ストークス方程式が成立し, この方程式に対し, スケーリングを行うことで得られるナヴィエ・ストークス方程式 (以後, (SNS) で表す)

$$
\begin{aligned}
\partial_t v - \Delta v + u \cdot \nabla v + \nabla_H \pi &= 0, \\
\partial_t w - \Delta w + u \cdot \nabla w + \frac{\partial_z \pi}{\varepsilon^2} &= 0, \\
\operatorname{div} u &= 0
\end{aligned}
$$

を得る. これに対して $\varepsilon \to 0$ とすると, 形式的にプリミティブ方程式を導出することができる. ここで, $\pi$ は圧力, $v$ は水平方向の速度, $w$ は鉛直方向の速度で $u = (v, w)$ と表しており, $\nabla_H$ は水平方向の勾配, div は発散, $\Delta$ はラプラス作用素である. そこで, この形式的な収束の数学的背景を研究することにより, プリミティブ方程式とナヴィエ・ストークス方程式との関係が明らかとなり, ひいてはナヴィエ・ストークス方程式の時間大域適切性に対する新たな知見が得られるのではないかと期待される.

導出の数学的正当化に関する研究はいくつか知られており, エネルギー空間での収束が成り立つこと, さらにその収束のオーダーは $O(\varepsilon)$ であることが証明されている. 本章では, プリミティブ方程式の導出の数学的正当化を最大正則性のクラス $\mathbb{E}_1(T) := W^{1,p}(0,T; L^q(\mathbb{T}^3)) \cap L^p(0,T; W^{2,q}(\mathbb{T}^3))$ $(T > 0)$ において得ている. ここで, $L^p$ はルベーグ空間 (ただし, $1 < p < \infty$), $W^{m,p}$ は $m$ 次ソボレフ空間 (ただし, $m$ は整数, $1 < p < \infty$). 最大正則性とは, 大雑把に言えば, $2m$ 階の放物型方程式に対して, 外力が $L^p(0,T; L^q(\mathbb{T}^3))$ の時空ルベーグ空間に属すとき, 解が時間一階, 空間 $2m$ 階分の正則性を得て $W^{1,p}(0,T; L^q) \cap L^p(0,T; W^{2m,q})$ に属するということを意味する.

証明は, プリミティブ方程式の解と (SNS) の解の誤差が満たす方程式 (以後, 誤差方程式という) を導出し, 誤差方程式の解を $O(\varepsilon)$ で評価することにより完成される. 誤差方程式の解を評価する際のアイデアは, 小さいデータに対しては小さい解が時間大域的に得られるという半線形偏微分方程式論における基本的な発想による. また, 本章におけるもう一つの重要な結果として, 十分小さな $\varepsilon$ に対する (SNS) の時間大域適切性も得ている.

誤差方程式の解を評価する際に, 線形化作用素の最大正則性とプリミティブ方程式

の解の鉛直成分である $w$ の正則性評価という二つの問題を解決する必要がある. 前者は、スケーリング, リース作用素の有界性, ラプラス作用素の最大正則性を用いることにより示すことができる. 後者は、誤差方程式の外力を評価する際に問題となるが, これまでは, プリミティブ方程式には $w$ の時間発展の方程式が現れないため, 正則性のロスが生じていた. この点については, $w$ の満たす非線形熱方程式を陽的に導出し, ラプラス作用素の最大正則性を用いることにより克服した. これら二つを組み合わせて藤田-加藤式の逐次近似を用いることにより証明が完了する. この結果は, 東京大学の儀我美一教授, 柏原崇人准教授, ダルムシュタット工科大学のマティアス・ヒーバー教授, マーク・ローナ氏, カイザースラウテルン工科大学のアムール・フセイン教授との共同研究によるもので, 現在雑誌に投稿中である.

第 3 章では, 周期境界条件の場合よりも物理的に自然な状況であるディリクレ境界条件の下で, 第 2 章で考察したプリミティブ方程式の導出の数学的正当化問題を考察する. 折り返しを考えることによりディリクレ・ノイマン境界条件の場合も含まれる. プリミティブ方程式の導出の数学的正当化問題に関してこれらの境界条件を課している結果は知られていない. また, 第 2 章と同様に, 十分小さい $\varepsilon$ に対する (SNS) の最大正則性のクラスでの適切性も証明できる.

問題点に関しても第 2 章と同様であるが, ディリクレ境界条件の下では, 線型化作用素振る舞いが本質的に異なるため, 最大正則性を得ることが難しくなる. また, $w$ の正則性評価に関しても第 2 章で用いた手法を直接的に用いることが出来なくなる. 最初の問題点を解決するため, 最大正則性を示す十分条件の一つである作用素の純虚数べきの有界性を示す. 第 2 章では, スケーリングなどを駆使することにより $\varepsilon$ に寄らない評価が比較的容易に得られたが, この議論はディリクレ境界条件の下では機能しなくなる. 線形化作用素の純虚数べきの評価は, 実解析手法により表示を得たのちに, フーリエ掛け算作用素の有界性に関する定理を用いることで証明できる. $w$ の正則性評価は, 問題の起こる境界付近でカットオフを施し評価を行い, 貼り合わせを行うことにより導出できる. この結果は, 東京大学の儀我美一教授, 柏原崇人准教授との共同研究によるものである.

第 4 章では, 動的境界条件付き $2m$ 階線形楕円型方程式の最大正則性のクラスでの可解性を有界領域と外部領域において考察する. 動的境界条件とは, 境界上での方程式に時間微分が含まれているものを意味する. このようなタイプの偏微分方程式は, 自由境界問題に関連してしばしば現れる. 自由境界問題に関連する偏微分方程式は必ずしも 2 階であるとは限らず, 高階の準線型方程式であることもある. 準線型方程式であっても線形化問題の最大正則性のクラスでの可解性が非線形問題の時間局所可解性を保証するということが一般的に知られている. したがって, 一般の動的境界条件付き楕円型の最大正則性のクラスでの可解性を考えることは, 様々な自由境界問題を統一的な視点から理解することにつながる.

動的境界条件付き楕円型方程式に対する最大正則性のクラスでの可解性に関する個別の結果はいくつかあるものの, 一般的な研究結果は知られていない.

本章では主結果として, 動的境界条件付き線形楕円型方程式に対して, 最大正則性のクラスで一意的な解が存在することを示す. 半空間において, フーリエ-ラプラス変換を用いて解作用素のシンボルを求め, それに対して作用素値フーリエ掛け算作用素の有界性定理と解析関数に対する作用素解析を用いることにより解作用素の有界性を示し, その後 1 の分割を用いて領域を一般化し証明が完了する. この研究は, 東京理科大学の梶原直人助教との共同研究によるものである.