審査の結果の要旨

氏　名　　古川　賢

本論文では, 非圧縮流体の運動を記述する偏微分方程式であるナヴィエ・ストークス方程式とそれに関係する方程式について, 適切性, 漸近解析, 特異極限問題, 最大正則性等の数学解析の問題を研究している. ナヴィエ・ストークス方程式は流体力学における最も基本的な偏微分方程式である. また, 非常に豊かな構造を持っているため, 数学的にも莫大な研究が蓄積されており, 現在でも活発に研究がなされている.

第 1 章では, 3 次元オセーン渦 (ラム・オセーン渦) に対して L^2-漸近安定性を考察している. Oseen 渦は, 流体力学における渦の最も基本的なモデルの一つであり, ナヴィエ・ストークス方程式の古典解の一つでもある. このオセーン渦に対して初期摂動を与え, それをナヴィエ・ストークス方程式によって時間発展させ, その解とオセーン渦の L^2 での誤差が時間無限大でゼロに収束するかという問題 (L^2-漸近安定性問題) を考える.

2 次元平面での漸近安定性については完全に解決されているが, 3 次元オセーン渦に対しては, 適切性や漸近安定性に関する結果はほとんど知られていない.

本章では, 鉛直方向に対して周期境界条件を持つ層状領域において, 必ずしも小さいとは限らない初期摂動に対して, 全循環が十分小さい 3 次元オセーン渦は L^2-漸近安定であることを証明している.

第 2 章では, 海や大気など薄い 3 次元領域内で満たされた流体の運動を記述するプリミティブ方程式の導出の数学的正当化を行う. プリミティブ方程式に対しては時間大域適切性が既に知られている. この事実は 3 次元ナヴィエ・ストークス方程式に対しては時間大域適切性が有名な未解決問題となっていることと対照的であることから, プリミティブ方程式に対する数学的な研究は近年活発に行われている.

厚さ ε の薄い領域内では, レイノルズ数の観点から水平方向の粘性係数が一定なのに対し, 鉛直方向の粘性係数が ε^2 であるようなナヴィエ・ストークス方程式を考える. 厚さが 1 になるようにスケーリングを行うことで得られるナヴィエ・ストークス方程式で $\varepsilon = 0$ とおくとプリミティブ方程式を得る. この導出が解のレベルで正当化できることを L^p 空

間の枠組で示した．従来のエネルギー法による L^2 空間での収束結果を最大正則性理論を用いて大幅に一般化した.

第 3 章では, 周期境界条件の場合よりも物理的に自然な状況であるディリクレ境界条件の下で, 第 2 章で考察したプリミティブ方程式の導出の数学的正当化問題を考察する．折り返しを考えることによりディリクレ・ノイマン境界条件の場合も含まれる．プリミティブ方程式の導出の数学的正当化問題に関してこれらの境界条件を課している結果は新しいものである．また, 第 2 章と同様に, 十分小さい ε に対するスケールされたナヴィエ・ストークス方程式の最大正則性のクラスでの適切性も証明できる.

問題点に関しても第 2 章と同様であるが, ディリクレ境界条件の下では, 線型化作用素振る舞いが本質的に異なるため, 最大正則性を得ることが難しくなる．また, 速度の鉛直成分 w の正則性評価に関しても第 2 章で用いた手法を直接的に用いることができなくなる. 最初の問題点を解決するため, 最大正則性を示す十分条件の一つである作用素の純虚数べきの ε によらない有界性を示す．周期境界条件の場合 ε によらない評価が比較的容易に得られたが, ディリクレ境界条件では, その論法は使えない．線形化作用素の純虚数べきの評価は, 実解析手法により表示を得たのちに, フーリエ掛け算作用素の有界性に関する定理を用いることで証明する．w の正則性評価は, 問題の起こる境界付近でカットオフを施し評価を行い, 貼り合わせを行うことにより導出できる.

第 4 章では, 動的境界条件付き偶数階線形楕円型方程式の最大正則性のクラスでの可解性を有界領域と外部領域において考察する．動的境界条件とは, 境界上での方程式に時間微分が含まれているものを意味する．このようなタイプの偏微分方程式は, 自由境界問題に関連してしばしば現れる.

動的境界条件付き楕円型方程式に対する最大正則性のクラスでの可解性に関する個別の結果はいくつかあるものの, 一般的な研究結果は知られていない.

本章では主結果として, 動的境界条件付き線形楕円型方程式に対して, 最大正則性のクラスで一意的な解が存在することを示した.

これらはいずれも、国際学術雑誌に出版できる高レベルの研究である．よって, 論文提出者 古川賢は, 博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.