論文の内容の要旨
論文題目　Spectral and scattering theory for generalized Schrödinger operators (一般化シュレディンガー作用素に関するスペクトル理論と散乱理論)

氏名　平良晃一

本論文では，一般化 Schrödinger 作用素のスペクトル理論，散乱理論について考察する．本論文における一般化 Schrödinger 作用素とは，$\mathbb{R}^n$ 上の微分作用素や $\mathbb{Z}^d$ 上の差分作用素を含む広い範囲の Schrödinger 作用素を指すこととする．特に，一般化 Schrödinger 作用素の本質的自己共役性と，その自己共役拡大のスペクトルの性質，及びレゾルベントの有界性について得られた結果を述べる．

Schrödinger 作用素の研究は 1930 年代の von Neumann の研究や 1940 年代の加藤敏夫の研究に端を発し，現在でも活発に研究されている．Schrödinger 作用素のスペクトルは量子力学における物理量の取り得る観測値を意味しており，その研究は物理学において非常に重要である．数学においても，時間発展方程式の平滑化効果への応用がある．また力学系の分野で，Anosov ベクトル場に対してスペクトル理論と散乱理論の手法が，1960 年代以来未解決であった Smale 予想の解決に大きく貢献した．

以下では，各章の内容について述べる．

第 2 章では，本論文中で必要となる基礎的な事実について記述している．

第 3 章と第 4 章では，微分作用素 P の本質的自己共役性及び自己共役拡大のスペクトルの性質について論ずる．微分作用素の本質的自己共役性は，物理学的にはその作用素の自然な境界条件が一意であることを意味しており，重要な性質である．また，対応する時間依存 Schrödinger 方程式：

$$i\partial_t u(t,x) - Pu(t,x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

の時間大域解 $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ の一意存在性と同値であり，偏微分方程式論においても重要な概念である．時間依存 Schrödinger 方程式 (1) は量子力学における基礎方程式であるが，古典力学における基礎方程式として Hamilton 方程式がある．つまり，$p : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を P の微分作用素としてのシンボルとして，$T^*\mathbb{R}^n$ 上の常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = \partial_\xi p(z(t), \zeta(t)), \\ \frac{d}{dt} \zeta(t) = -\partial_x p(z(t), \zeta(t)), \end{cases} \qquad \begin{cases} z(0) = x, \\ \zeta(0) = \xi, \end{cases} \tag{2}$$

を Hamilton 方程式という．方程式 (1) と (2) の解の性質の間には密接な関係があることが知られており，この関係を調べることは Schrödinger 方程式の研究において最も主要なテーマのひとつである．本質的自己共役性に関わる話題として，以下のような問題がある．

Question 1. *P の本質的自己共役性は，そのシンボル p に対応する Hamilton 方程式 (2) の大域可解性とどのような関係にあるか？*

関連する結果として，1 次元の Schrödinger 作用素 $P=-\partial_x^2+V(x)$ と Riemann 多様体 (M,g) 上の Laplace-Beltrami 作用素 $P=-\Delta_g$ についての結果が知られている．前者に関しては，V に関する比較的緩い仮定の下で，P の本質的自己共役性と (2) の一意可解性が同値であることが知られている．後者に関しては，(M,g) が測地的に完備であれば（これは (2) の大域可解性と同値である），$P=-\Delta_g$ は本質的自己共役であることが知られている．一方で，この逆は成り立たない．つまり，$P=-\Delta_g$ は本質的自己共役であっても (M,g) が測地的に完備ではない例が知られている．

Question1 のより正確な定式化は未だなされていない．また，より一般の微分作用素に対して Question1 を研究するための手法は未だ確立されおらず，実際に Question1 に関わる研究は少ない．第 3 章と第 4 章における研究動機のひとつは，超局所解析を用いた Question1 へのアプローチを与えることである．実際に P の本質的自己共役性について，超局所解析を用いることにより，(2) との関係性に着目した解析を行った．

第 3 章では，Lorentz 多様体 $(\mathbb{R}^n,g)$ 上の d'Alembert 作用素 $P=-\Box_g$ の本質的自己共役性及び，その自己共役拡大のレゾルベントの実軸付近での（重み付き）有界性について考察する．d'Alembert 作用素 $P=-\Box_g$ に対しては，方程式 $(P-\lambda)u=f$（$\lambda\in\mathbb{R}$）の Cauchy 問題（波動方程式の初期値問題）を考えるのが自然である．しかし場の量子論において，特別な解 u を与える Feynman 伝播関数 G と呼ばれる逆作用素 "$(P-\lambda)^{-1}$" を考える必要がある．Feynman 伝播関数 G は g が Minkowski 計量である場合には，

$$Gf(x)=\lim_{\varepsilon\to0}(P-\lambda-i\varepsilon)^{-1}f(x) \tag{3}$$

と表される．ここで，右辺の極限の中身は Fourier 掛け算作用素としての逆作用素を表し，極限は超関数の意味で考えることとする．そこで g が Minkowski でない場合，つまり g が 0 でない曲率を持つ場合を考える．このとき，自然な問題として Feynman 伝播関数が (3) のように表されるか，という問題が挙げられる．しかしこのとき，P は Fourierm 掛け算作用素でないため，まず (3) の右辺の意味は明らかではない．そこで第 3 章では

- P が本質的自己共役であることを示し，$(P-\lambda-i\varepsilon)^{-1}$ を $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素としてのレゾルベントとして定式化し，
- (3) の右辺に現れる $\lim_{\varepsilon\to0}(P-\lambda-i\varepsilon)^{-1}$ の極限の存在を，重み付き L^2 空間上の有界作用素の空間上で正当化した．

第 4 章では，$\mathbb{R}^n$ 上の反発型 Schrödinger 作用素

$$P=-\Delta-(1+|x|^2)^{\alpha},\quad \alpha>1,$$

が本質的自己共役でないことについて，超局所解析を用いた証明を与えた．この作用素は，粒子を無限遠方向に逃すような斥力ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素である．その直感に対応して，Hamilton 方程式 (2) の解は有限時間で爆発し，大域解を持たないことが知られている．P が本質的自己共役でないという事実は古典的に知られているが，その手法は 1 次元の微分方程式の手法に基づいていた．そのため，Hamilton 方程式 (2) の解の性質と，P が自己共役でないという事実との対応関係は明示的でない．そこで，本章では Question1 へのアプローチ可能であるような証明を与えたと同時に，P の複素固有関数を具体的に構成することにより，P のスペクトルのより詳細な性質について解析した．

また応用として，P の maximal domain が L^2 へコンパクトに埋め込めることと，1 次元の場合にその自己共役拡大のスペクトルが離散的になることを示した．滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ 上の有界領域上の Laplacian $P=-\Delta$ を考えると，本章で示した結果と同様の主張が成り立つ．つまり，以上の定理は反発型 Schrödinger 作用素が，有界領域上の Laplacian と似たスペクトルの性質を持つことを意味している．

第 5 章，第 6 章と第 7 章では離散 Schrödinger 作用素のレゾルベントの有界性やスペクトルの性質及び固有関数の性質について論ずる．離散 Schrödinger 作用素 H_0 とは以下のような $\mathbb{Z}^d$ 上の差分を表す作用素である：

$$H_0u(x) = -\sum_{|x-y|=1} \left(u(x)-u(y)\right), \quad u:\mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}.$$

離散 Schrödinger 作用素は $\mathbb{R}^d$ 上の Laplacian の自然な離散化と考えられる他，物性物理学の電子の強束縛近似のモデルとしても現れる．特に近年では物性物理学におけるトポロジカル絶縁体との関係から，数学，物理の両分野において関心が高まっている．

第 5 章，第 6 章と第 7 章では，離散 Schrödinger 作用素のレゾルベントのスペクトル付近での有界性（極限吸収原理）の証明，波動作用素の存在と完全性の証明，共鳴状態（固有関数）の漸近解析を行った．これらを研究する際に離散空間 $\mathbb{Z}^d$ 上で現れる特有の困難として，主に次の二点がある．

- 一般に Schrödinger 作用素は粒子の速度が 0 となるエネルギー（閾値）が存在する．閾値での Schrödinger 作用素の挙動は，対応する Schrödinger 時間発展作用素の時間大域挙動とも関連し，重要な研究対象である．$\mathbb{R}^d$ 上の Laplacian はスペクトルの端点でのみ閾値を持つが，離散 Schrödinger 作用素はスペクトルの内部にも閾値を持ち，その性質は大きく異なる．

- $\mathbb{Z}^d$ は $\mathbb{R}^d$ と比べて空間の対称性が低い．特に，空間の方向に依って作用素の性質が変わる．作用素のスペクトルの解析の際に，この異方性による障害が起きる．

これまでの研究では，主に $\mathbb{R}^d$ 上の Schrödinger 作用素の場合と同様の手法で得られる研究結果が多く，上記の困難を扱っている研究は非常に少なかった．そこで，本論文において以下のような結果を得た．

- 内部の閾値の周りのレゾルベントの評価を双曲型作用素の分散型評価の問題に帰着させて証明した．（第 5 章）

- 摂動（ポテンシャル）が球対称な場合と L^p クラスとの場合にレゾルベント評価を比較し，前者では連続 Schrödinger 作用素と同様の評価を得たが，後者では，$d \geq 5$ であれば $\mathbb{Z}^d$ 上の異方性に起因して連続 Schödinger 作用素より悪い評価しか得られないことを示した．（第 5 章）
- 上記ふたつの結果を利用し，波動作用素の存在と完全性を示した．またより一般に，Fourier 掛算作用素の，レゾルベントの L^p 空間から L^q 空間へのレゾルベントの有界性，Hölder 連続性，Carleman 型評価について研究した．p と q の範囲は，エネルギー面のフーリエ変換の無限遠での減衰度で決まることを示した．更に，これらを Dirac 作用素と分数冪 Laplacian の散乱理論に応用して波動作用素の有界性と完全性，固有値の離散性などを示した．（第 6 章）
- 閾値における共鳴状態の漸近挙動と存在性の研究を行った．具体的には，スペクトルの端点における閾値の共鳴状態の漸近展開を求め，$\mathbb{R}^d$ 上の連続 Schrödinger の共鳴状態との類似性を証明した．また，スペクトルの内部における閾値の共鳴状態の非存在を証明した．（第 7 章）