

# Hierarchical structure in the Vlasov-Ampere system characterized by Casimir invariants

-Casimir 不変量によって特徴づけられる Vlasov-  
Ampere 系の階層構造 -

47-206066 前角 弘毅  
(指導教員 齋藤 晴彦 准教授)

Key Words : collision-less plasma, Hamiltonian system, simulation, Vlasov system

## 1. はじめに

粒子間の衝突が十分に大きいプラズマでは粘性の影響により粒子の分布は Maxwell 分布に基づいた比較的単純な形になるため、MHD (電磁流体) モデルに基づいたシミュレーションが可能となっており、MHD に基づかない運動 (運動論効果と呼ばれる) についても Maxwell 分布からのずれという定式化によって解明が進んでいる。一方で核融合発電/実験装置におけるプラズマは一般的に粒子間の衝突が十分に小さいため、Maxwell 分布からどの程度ずれているかという既存の定式化では運動論効果がいつ/どのように現れるかを解明できない。本研究では自由度の大きい運動論モデルと自由度の小さい MHD モデルの両方を包摂し、パラメータによって自由度を変化させることで、無衝突プラズマにおける運動論効果がいつ/どのように現れるかを表現することを試みる。

既にこのような目的で、Water-bag と呼ばれる一次元のモデルを応用できることが示唆されている[1]。

### 1.1 研究背景 (Casimir 不変量)

#### 1.2.1 Casimir 不変量の導入

モデルの自由度の評価[2]に用いる Casimir 不変量について説明するために、まずハミルトン力学系における物理量  $F(\mathbf{z})$  の時間変化  $\dot{F}(\mathbf{z})$  を以下に示す。

$$\dot{F}(\mathbf{z}) = \{F(\mathbf{z}), H(\mathbf{z})\} \quad (1)$$

ここで  $\mathbf{z}$  は状態を表すベクトル、 $H(\mathbf{z})$  はエネルギーを表すハミルトニアン、 $\{, \}$  は Poisson 括弧と呼ばれる演算子である。(1)式の記法により、物理系をハミルトニアン  $H(\mathbf{z})$  によってあらわされる物理現象そのものの影響と、Poisson 括弧  $\{, \}$  によって表現される (状態を表すベクトル  $\mathbf{z}$  が属する空間、つまり物理モデルに依存する) 幾何学的な影響に分けて表現することができる。

#### 1.1.1 Casimir 不変量の定義と性質

Casimir 不変量はハミルトニアン  $H(\mathbf{z})$  によらず  $\{C(\mathbf{z}), H(\mathbf{z})\}$  が常に保存するような物理量  $C(\mathbf{z})$  と定義できる。これは Poisson 括弧が特定の条件を満たす線形作用素  $J$  と内積  $(,)$  によって  $\{C, H\} = \{C, H\} = \{C, H\}$  と書けるが、純粋な運動論 (正準ハミルトン系) より自由度が小さい場合  $Jc = \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{0}$  でないベクトル  $c$  ( $\text{Ker}(J)$  の元) が生じてしまうために発生する保存量である。これはハミルトニアンを排したモデルのみの影響によって決まり、モデルの自由度を増加させる必要のある

状況が生じる (運動論効果が発生する) ことはそれに対応した物理量が Casimir 不変量でなくなることと同視できる。

## 2. 研究手法

本研究では Water-bag モデルのパラメータ変化による一次元分布関数の自由度の変化の影響について Casimir 不変量を用いて評価する。

### 2.1 Water-bag モデル

ここで Water-bag モデルについて説明を行う。Water-bag モデルは一次元の分布関数  $f(x, v, t)$  を速度方向のみ  $N$  段の階段関数で近似するものである。このとき分布関数は速度の等高線を表す関数  $V_k(x)$  ( $k = 1 \dots N + 1$ ) を用いて、

$$f(x, v, t) = \begin{cases} 0 & (v < V_1(x), V_{N+1}(x) \leq v) \\ A_i V_i(x) & (V_i(x) \leq v < V_{i+1}(x)) \end{cases} \quad (2)$$

と表せる ( $A_i$ : 定数,  $i = 1 \dots N$ )。ここでこの系をハミルトン力学系として考えると、Poisson 括弧は

$$\{F, G\} = \left( \begin{pmatrix} \partial_{V_1} F \\ \vdots \\ \partial_{V_{N+1}} F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{a_1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & -\frac{1}{a_{N+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{V_1} G \\ \vdots \\ \partial_{V_{N+1}} G \end{pmatrix} \right) \quad (3)$$

と書ける。このとき、速度の等高線  $V_k(x)$  の積分  $\int_X V_k dx$  が Casimir 不変量となる。

### 2.2 自由度変化の影響

パラメータ  $N$  をもつ Water-bag モデルを  $N$ -bag モデルとする。今回、 $N$ -bag モデルでは Casimir 不変量だがその系を包摂する  $(N + 1)$ -bag モデルでは Casimir 不変量ではなくなる物理量を発見した。

$U_i$  は  $V_i(x) \leq v < V_{i+1}(x)$  の領域内 (つまり階段関数の 1 つの段) の粒子に限定した流体速度を計算する物理量であり、以下のように書ける。

$$U_i = \int_X u_i dx \quad (4)$$

Where  $u_i = \frac{\int_X v f(x, v, t) dx}{\int_X f(x, v, t) dx}$

$U_i$ はN-bag モデルでは

$$U_i = \int_x \frac{V_i(x) + V_{i+1}(x)}{2} dx$$

となり、異なる Casimir 不変量同士の線形結合も Casimir 不変量であるため $U_i$ は Casimir 不変量となっている。しかし、新たな自由度 $V_{i+\frac{1}{2}}$ と定数 $A_{i+\frac{1}{2}}$ を導入した $(N+1)$ -bag モデルを導入すると、

$$U_i = \frac{1}{2} \int_x \frac{-A_i V_i^2(x) - (A_i - A_{i+\frac{1}{2}}) V_{i+\frac{1}{2}}^2(x) + A_{i+2} V_{i+2}^2(x)}{-A_i V_i(x) - (A_i - A_{i+\frac{1}{2}}) V_{i+\frac{1}{2}}(x) + A_{i+2} V_{i+2}(x)} dx$$

となるため、Casimir 不変量の線形結合で書けず Casimir 不変量にはならなくなる。

ここで、N-bag モデルが $(N+1)$ -bag モデルの部分系であることを考えると、 $(N+1)$ -bag モデルから見たN-bag モデルの運動論効果は分布関数の対称性が何らかの形で破れることによる $U_i$ の保存の破綻という形で表現できることが分かる。ここで、 $(N+1)$ -bag モデルにおいて分布関数 $f$ の微小変換 $\tilde{f} = \{f, U_i\}$ が $U_i$ の保存する条件となるが、これを分布関数の対称性と同一視する。これを計算すると

$$V_{i+1}(x) = (1 - \alpha)V_i(x) + \alpha V_{i+2}(x) \quad (5)$$

という形で書ける ( $\alpha$ : 定数( $0 < \alpha < 1$ ))。これは、 $(N+1)$ -bag model において、 $U_i$ の積分区間に含まれる3本の等高線 $V_i(x)$ ,  $V_{i+1}(x)$ ,  $V_{i+1/2}(x)$ のうち、1本が残り2本の線形結合で書けることを意味する。つまり、この対称性が破れることが、 $(N+1)$ -bag model から見たN-bags model の運動論効果の発生であるということが出来る。

### 2.3 シミュレーション

この条件#(5)が $U_i$ が保存するための条件であることを具体的なハミルトニアンを与えられた上でシミュレーション上でも確認できることを示した。 $N=5$ のときN-bag モデルと $(N+1)$ -bag モデルを比較する。 $V_{i+\frac{1}{2}}$ を追加する自由度としたとき、 $i=1, \dots, 5$ の場合の $U_i$ の時間変化を確認する。

分布関数の初期条件 (図1) を、 $i=3$ の場合のみ条件#(5)を満たさないように決定する。この場合の $U_i$ の初期値からの変化率の時間変化を図2に示す。図2のプロットでは $U_3$ のみ  $t=0$  での時間変化 $\partial_t U_3$ が $\partial_t U_i$  ( $i \neq 3$ ) と比べて十分に大きいため、条件#(5)が $U_i$ が保存するための条件であることの例とみなすことができる。

### 3 結論

無衝突プラズマにおける運動論効果が①いつ②どのように起きるかを、Waterbag モデルを用いることで、①「N-bag モデルにおいて、このモデルを構成する2つの等高線があったとき、この2つの等高線の間に新しい等高線を用意した $(N+1)$ -bag モデルを考えた場合に、合計3本の等高線のうち1本が残り2本の等高線に線形従属しているという対称性」の破れによって②N-bag モデルにおける階段関数のある段の流体速度 $U_i$ の保存の破れとして、表現できるということを解明した。

シミュレーションではその条件を用いて評価基準の物理量の変動を予測できることを確認できた。

Appendix として、2次元以上の Waterbag モデルの数値計算スキーム構築の基本的な構成とその例を紹介している。

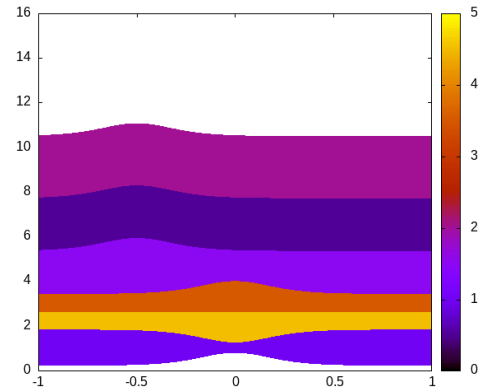


図1 横軸が $x$ 、縦軸が $y$ 、白抜き部分が $f(x, v, t) = 0$ 、その他の領域の $f$ の値はカラーバーに従う。 $N=6$ のモデルを用いることで、 $N=5$ のモデルに新たな速度等高線を追加した場合を考えることができる。

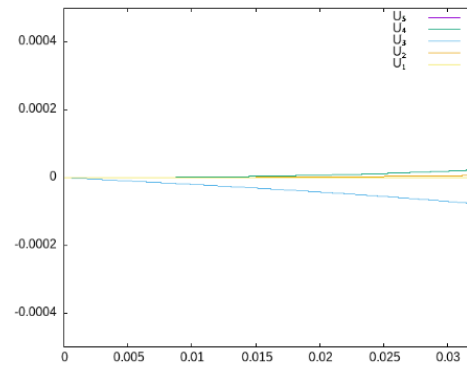


図2 横軸が時間、縦軸が $U_i$ の初期値からの変化率のプロット

### 参考文献

- [1] Perin, M., Chandre, C., Morrison, P. J., & Tassi, E. (2015). Hamiltonian fluid closures of the Vlasov-Ampère equations: From water-bags to N moment models. *Physics of Plasmas*, 22(9), 092309.
- [2] Yoshida, Z. (2016). Self-organization by topological constraints: hierarchy of foliated phase space. *Advances in Physics: X*, 1(1), 2-19.