東京大学 大学院新領域創成科学研究科
基盤科学研究系
先端エネルギー工学専攻

2021 年度

修士論文

コールドガスジェットを用いたバネ吊下式 6 自由度スラストスタンドの性能検証

Performance validation of the spring-hanging 6 degree-of-freedom thrust stand by using a cold gas thruster

2022 年 1 月 25 日提出
指導教員　小泉　宏之　准教授

47206070　山内　健太郎

目次

第 1 章　序論 6

1.1　超小型宇宙機ミッションの多様化 6

1.2　スラストスタンド 9

1.2.1　1 自由度スラストスタンド 9

1.2.2　1 自由度スラストスタンドの問題点 11

1.2.3　多自由度スラストスタンド 12

1.3　研究目的 14

第 2 章　方法 15

2.1　6 自由度スラストスタンドの運動方程式 15

2.1.1　基礎式 15

2.1.2　オイラー角 16

2.1.3　運動エネルギー 19

2.1.4　ポテンシャル 21

2.1.5　ラグランジアン 22

2.2　測定原理 23

2.2.1　力，トルク測定原理 23

2.2.2　変位測定原理 24

2.3　実験装置 32

2.3.1　スラストスタンド本体 32

2.3.2　VCM 駆動回路 36

2.3.3　ローパスフィルタ 37

2.3.4　真空系 37

2.3.5　コールドガスジェットモジュール 41

2.3.6　電子天秤 41

2.4　スラストスタンド較正方法 43

2.4.1　合力，合トルク 43

2.4.2　電磁力較正 44

2.4.3　各方向の較正 45

2.4.4　重回帰分析 45

2.5　コールドガスジェット噴射実験 47

2.5.1　実験手順 47

2.5.2　実験条件 47

第 3 章　結果 48

3.1 スラストスタンド較正 48
3.2 コールドガスジェット噴射実験結果 56
3.2.1 力，トルク時間履歴 56
3.2.2 推進剤消費量推定 59
3.2.3 推力推定 62

第 4 章 考察 63
4.1 推力理論値 63
4.2 スラストスタンド分解能 67

結論 71

参考文献 72

謝辞 77

関連発表 79

図目次

1.1 CubeSat specifications in the framework of overall small satellite classifications 6
1.2 Evolution of CubeSat Mission Type 7
1.3 FF missions' classification based on the maximum mass of spacecraft 8
1.4 Constellation pattern of OneWeb and Starlink 8
1.5 Map of Artemis I 9
1.6 Typical small spacecraft in-space propulsion trade space (thrust vs. specific impulse) . . 10
1.7 Schematic of 3 types of pendulum thrust stand 10
1.8 Calibration System of Pulley and Weight 11
1.9 Dual pendulum thrust stand for hall thruster 12
1.10 Dual axis torsional pendulum thrust stand for electrospray thruster 13
1.11 Magnetic levitation 6 degree-of-freedom thrust stand 13
1.12 Model thruster for calibration of the magnetic levitation 6DOF thrust stand 14

2.1 Definition of angular velocity vector 16
2.2 6DOF Thrust Stand CAD 23
2.3 Placement of Displacement Sensors. 25
2.4 Displacement 26
2.5 Displacement Sensors Spot 28
2.6 Appearance of 6DOF Thrust stand 32
2.7 Appearance of the magnetic damper. 33
2.8 Magnetic damper CAD 33
2.9 VCM Vertical Cross Section 34
2.10 VCM Horizontal Cross Section 34
2.11 VCM placement CAD. 35
2.12 Schematic of the experiment system. 35
2.13 Feeding wires through the vacuum barrier 36
2.14 Appearance of Compact RIO System 36
2.15 Schematic of VCM drive circuit 37
2.16 Appearance of VCM drive circuits 38
2.17 Low Pass Filter 38
2.18 Appearance of rotary pump. 39
2.19 Appearance of Vacuum gauge. 39
2.20 Appearance of the cold gas thruster module 41
2.21 Appearance of electric balance 42

2.22 Definition of VCM force direction 43
2.23 Typical waveform of calibration and displacement to input 46
2.24 Data selection of multiple linear regression 46

3.1 F_x:Calibration waveform 49
3.2 F_y:Calibration waveform 49
3.3 F_z:Calibration waveform 50
3.4 T_x:Calibration waveform 50
3.5 T_y:Calibration waveform 51
3.6 T_z:Calibration waveform 52
3.7 Averaged Fx 53
3.8 Averaged Fy 53
3.9 Averaged Fz 54
3.10 Averaged Tx 54
3.11 Averaged Ty 55
3.12 Averaged Tz 55
3.13 Displacement in a cold gas thruster ejection 56
3.14 Force of cold gas thruster ejection 57
3.15 F_x,F_y of cold gas thruster ejection 57
3.16 Torque of cold gas thruster ejection 58
3.17 Resultant force 59
3.18 Mass loss estimation. 60
3.19 Time history of measured CGJ module mass 61
3.20 Thrust estimation 62

4.1 Schematic diagram of CGJ and definition of characters used for thrust theoretical value calculation. 63
4.2 Time history of ambient pressure 64
4.3 The relationship between nozzle expansion ratio A_2/A_t and pressure ratio p_1/p_2. 66
4.4 Theoretical Thrust between cold gas ejection 66
4.5 Displacement sensor resolution in previous research 67
4.6 Displacement measured by each displacement sensor during the first 30 seconds of the ejection experiment 70

第 1 章

序論

1.1　超小型宇宙機ミッションの多様化

小型の宇宙機はその質量によって図 1.1 のように 100-180 kg の Minisatellite,10-100 kg の Microspacecraft,1 kg-10 kg の Nanospacecraft,1 kg 未満の Picospacecraft”の段階に分けられる [2]．さらにその下に 0.01 kg-0.1 kg の Femtospacecraft という区分があり，”ChipSat”[3] が該当する [2]．一般的に，日本語で超小型宇宙機とは 100 kg 以下の宇宙機のことをいう．超小型宇宙機の大きさを表現するために 1U や 1P といった基本単位が用いられる．1U は 10 cm × 10 cm × 10 cm の立方体で，1U を基本単位として構成される宇宙機は CubeSat とよばれる．1P は 5 cm × 5 cm × 5 cm の立方体で，Picosatellite の大きさを表すために用いられ，1P を基本単位として構成される宇宙機は PocketQube と呼ばれる．

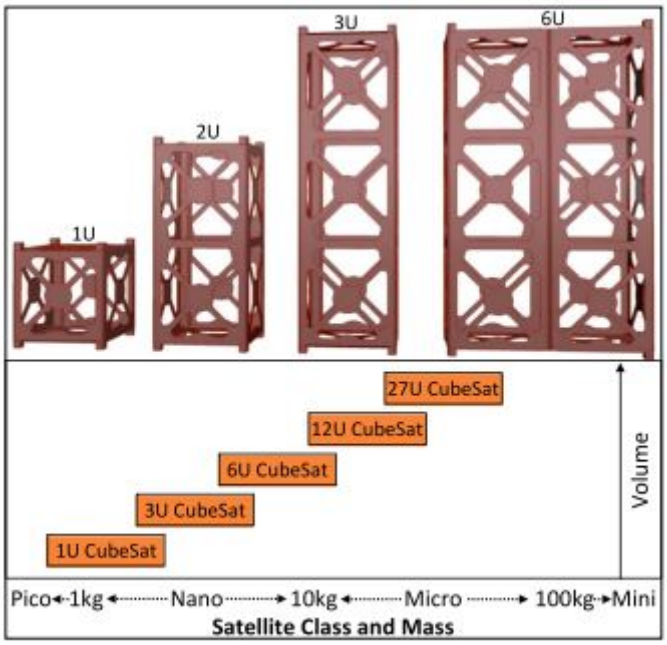


図 1.1: CubeSat specifications in the framework of overall small satellite classifications [1]

超小型宇宙機は大型宇宙機と比較して低コストかつ短期間で開発できるため，教育機関や民間企業での運用，研究が可能である [1]. 例えば,「ほどよし」[4] や”PROCYON”[5] は日本国内の教育機関を中心に開発され，運用された超小型宇宙機である．民間企業の事例としては，株式会社 ALE が東北大学と共同開発した人工衛星を打ち上げている [6]．これらはいずれも 50 kg 級の Microsatellite である．近年では CubeSat のミッ

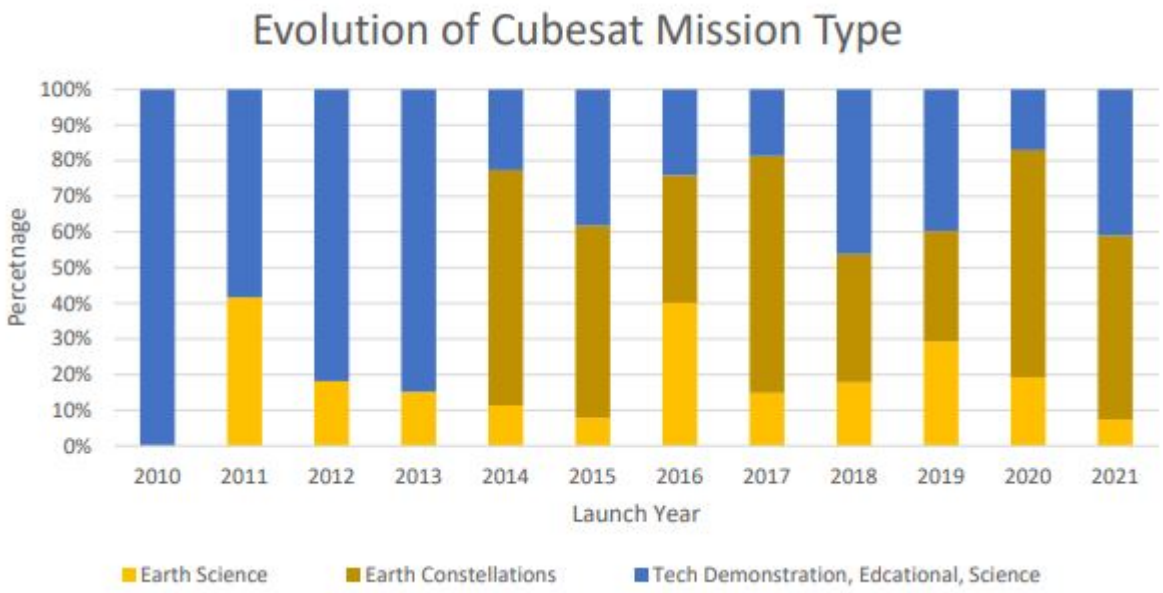


図 1.2: Evolution of CubeSat Mission Type[2].

ションも，データ処理能力や伝送能力の向上，スラスタの搭載などの技術的進歩によって，図 1.2 のように多様化している [2].

多様化するミッションの中で，複数の人工衛星を連動させて運用するミッションがフォーメーションフライングやコンステレーションである．フォーメーションフライング (FF) は，複数の宇宙機を同時に運用するミッションで，少なくとも 1 機の宇宙機が他の宇宙機の運動に追従するように制御されるミッションである [7]．複数の宇宙機を同時に運用し，FF の条件を満たさないものはコンステレーション (以下，コンステ) という．FF では，小さな誤差がそのまま編隊の軌道誤差となるため，推進系の正確な推力が求められる [8]．FF のミッション目的は技術実証，宇宙科学，地球科学，地球観測/リモートセンシングの 4 つに分けられる [14]．図 1.3 は，2000 年-2025 年に打ち上げが実施/予定された FF ミッションにおける，宇宙機の分類の割合を示す．Nanosatellite の割合が 3 割以上で最大であるが，大型宇宙機の割合も 2 割以上ある．Nanosatellite での FF ミッションの実現例のひとつが，CanX-4&5 である [9]．CanX-4 と CanX-5 はそれぞれ 1 辺 20 cm の立方体，質量は 6 kg で，SF_6 を推進剤とするスラスターを 4 基備えていた．近年の日本では，重力波望遠鏡 B-DECIGO[10]，赤外線干渉計 SEIRIOUS[11]，X 線干渉計 MIXIM[13] というように，FF を活用するミッションが計画され，その実現に向けた研究が行われている．

一方，コンステでは，地球観測の他，インターネット通信や IoT が主な目的である．現在打ち上げ済みの人工衛星の数は SpaceX 社の Starlink がもっとも多く，1500 基以上である．次いで OneWeb が多く，394 基の人工衛星を打ち上げ済みである [16]．Oneweb と Starlink のコンステパターンを図 1.4 に示す，1 基の質量は Starlink が 260 kg[18]，OneWeb が 150 kg である [19]．Starlink,OneWeb ともに推進系としてホールスラスタを搭載している．Nanosatellite のコンステでは，退役した分も含め，Planet Labs 社が 475 基，Spire 社が 143 基の 3U CubeSat を打ち上げ済みである [15]．Planet Labs 社のコンステの目的は光学地球観測, Spire 社のコンステの目的は気象，海事，航空機の監視，観測である．Spire 社の CubeSat には自動船舶識別装置 (AIS) などの受信機が搭載されている [20]．なお，Planet Labs 社，Spire 社ともに, コンステレーションを形成する CubeSat に推進系は搭載されていない．日本の企業では，株式会社アクセルスペースが 100 kg の人工衛星 GRUS を 5 基打ち上げており，光学観測を行っている [21].

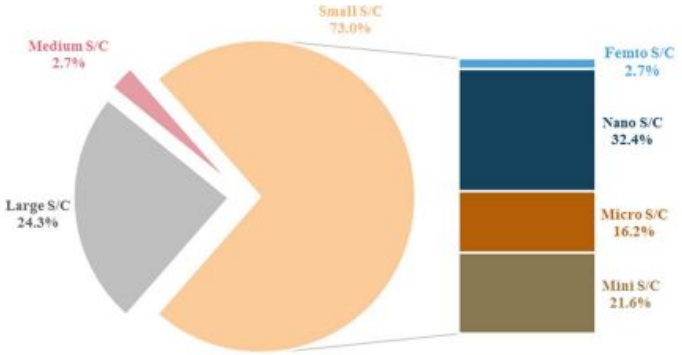
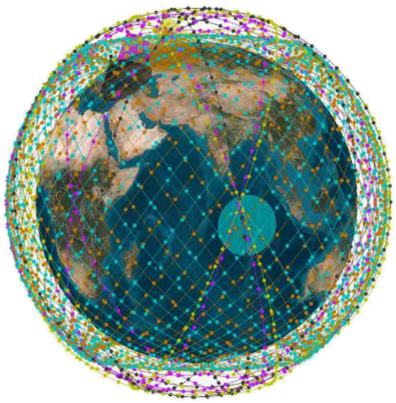


図 1.3: FF missions' classification based on the maximum mass of spacecraft (S/C) (data from 2000 to 2025).[14]

(a) Oneweb Constellation Pattern.



(b) Starlink Constellation Pattern.

図 1.4: Constellation pattern of OneWeb and Starlink[17].

スラスタ搭載が可能になったことにより，CubeSat の利用は深宇宙探査の分野にも広がっている．世界で初めて深宇宙探査を実現した CubeSat は，2018 年に火星着陸機 InSight の相乗りで打ち上げられた Mars Cube One(MarCO) である [22]．MarCO は 2 対の質量 13.5 kg の 6U CubeSat で，R-236fa を推進剤とするコールドガスジェット (CGJ) を搭載していた [23]．宇宙機群 (fleet) としては，アルテミス 1 号の相乗り衛星として打ち上げられる 10 機の CubeSat が世界初となる予定である [24]．なお，当初は相乗り衛星として 13 機が選ばれたが，COVID-19 の流行に伴う開発の遅れ等が原因となり，3 機は収容に間に合わなかった [26]．図 1.5 はアルテミス 1 号の航路図である．表 1.1 に 10 機の CubeSat の名称とその推進系および推力を示す．姿勢制御用のスラスタのみを搭載している場合は，それを明記した．LunIR,CuSP,BioSentinel の 3 機にはデルタ V スラスタは搭載されていない．Lunar IceCube と LunaH-map はともに BUSEK 社のヨウ素を推進剤とするイオンスラスタを搭載している．Team Miles の静電加速型スラスタもヨウ素を推進剤とする．NEAscout は 0.0601 mm/s^2 の加速度を得る 80 m^2 のソーラーセイルを主な推進系とし，R-236fa を推進剤とする VACCO 社の CGJ を併用する [2]．CuSP の推進系は R-134a を推進剤とする VACCO 社製の姿勢制御用スラスタである．OMONETASHI の推進系にも VACCO 社の R-134a を推進剤とする CGJ が搭載されている．BioSentinel の姿勢制御用 CGJ は，R-236fa を推進剤とし，スラスタの大部分は立体リソグラフィで成形された [37]．ArgoMoon の推進系は VACCO 社製で，LMP-103S を推進剤とするデルタ V スラスタと，R134a を推進剤とする姿勢制御用スラスタからなる [39]．EQUULEUS は水を推進剤とするレジストジェッ

ト AQUARIUS を搭載している [36].

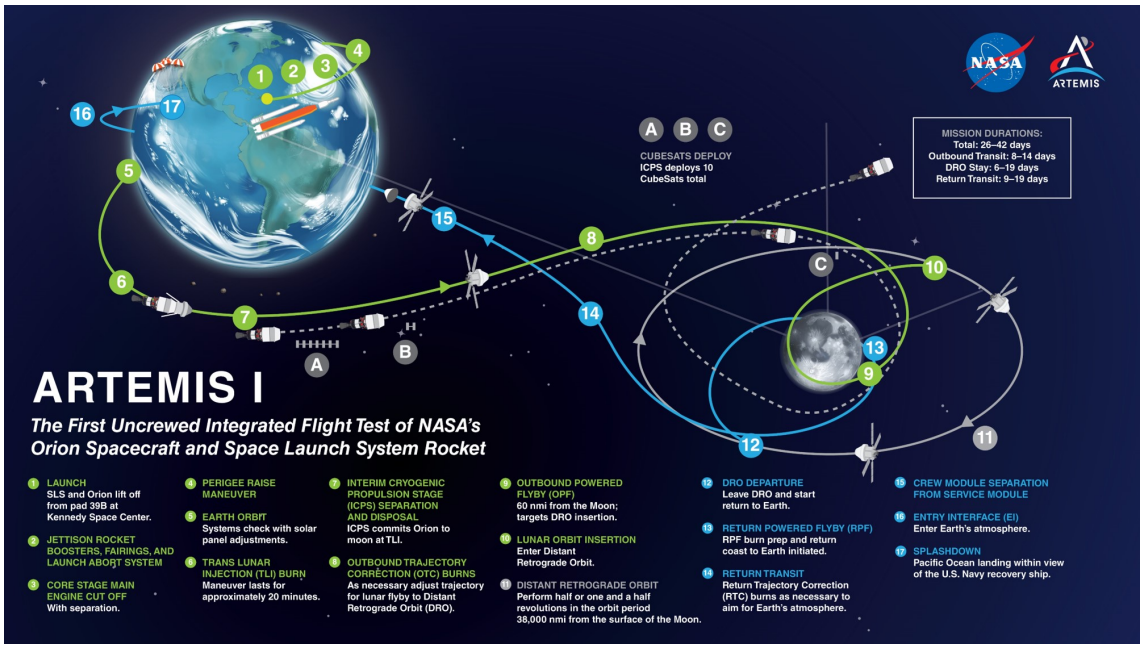


図 1.5: Map of Artemis I [25]

表 1.1: Propulsion Systems in Artemis I Payloads [27]

Spacecraft	Propulsion System	Thrust	Ref.
Lunar IceCube	BIT-3 Ion Thruster	1 mN	[28]
LunaH-Map	BIT-3 Ion Thruster	1 mN	[29, 30]
OMOTENASHI	R-236fa CGJ	25 mN	[31]
LunIR	Only CGJ for attitude control	-	[32]
CuSP	Only CGJ for attitude control	25 mN	[32, 33]
NEAscout	Solar Sail,CGJ	700 μN,25 mN	[34, 35]
EQUULEUS	Water Resistojet	4 mN	[36]
BioSentinel	Only CGJ for attitude control	40-70 mN	[32, 37, 2]
ArgoMoon	LMP-103S CGJ	100 mN	[38, 39]
Team Miles	Electrostatic Thruster	5 mN	[32, 40]

1.2 スラストスタンド

1.2.1 1 自由度スラストスタンド

宇宙機のスラスタは軌道遷移，軌道保持，姿勢制御のために使用される．超小型宇宙機で用いられるスラスタの推力と比推力の分布を図 1.6 に示す．

大推力スラスタの推力測定では，ロードセルを用いたスラストスタンドが用いられる [42]．ロードセルは荷重を電気信号に変換する装置であり，ひずみゲージや圧電素子などの種類がある．しかし，超小型宇宙機の推

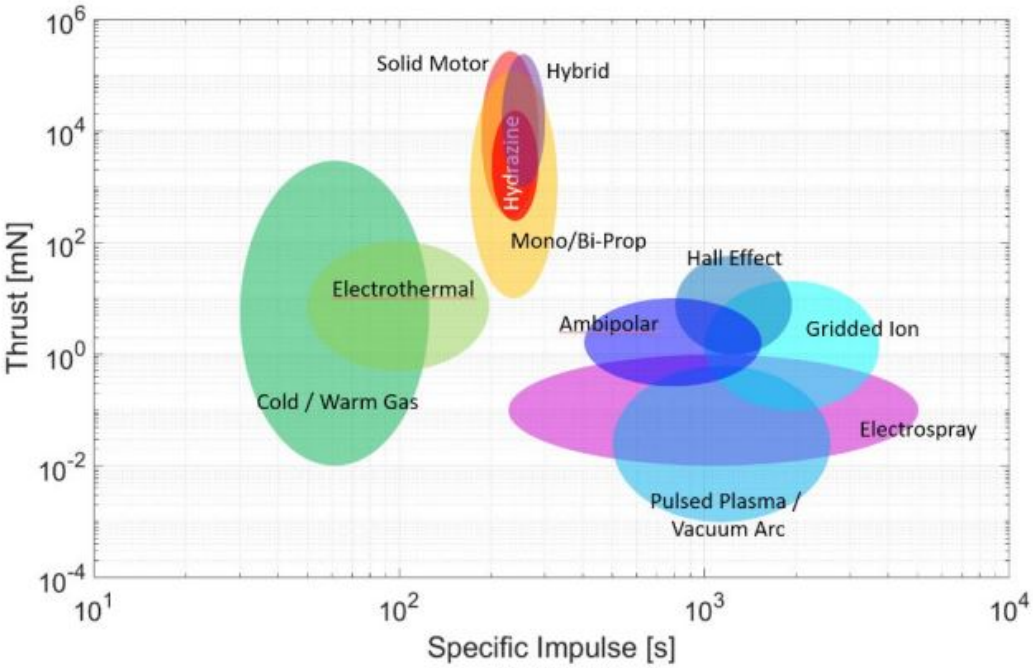


図 1.6: Typical small spacecraft in-space propulsion trade space (thrust vs. specific impulse)[2]

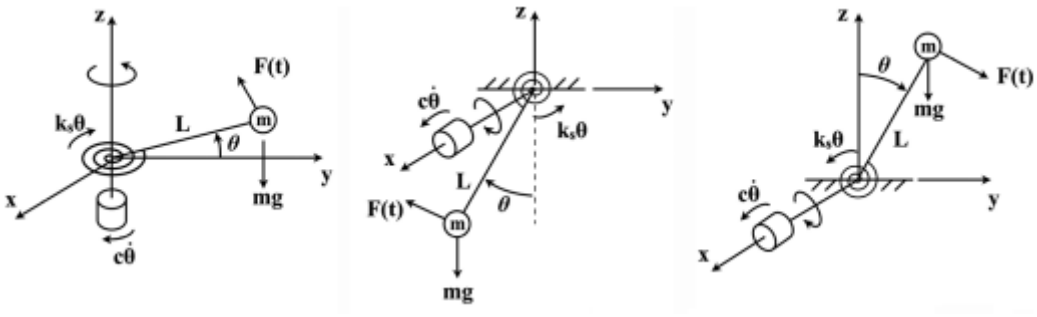


図 1.7: Schematic of 3 types of pendulum thrust stand. Left:Torsional pendulum, Center: Hanging pendulum, Right: Inverted pendulum[41].

進系のなかでも，電気推進のスラスタや，低推力のコールドガスジェットは推力重量比が小さい．したがって，宇宙機およびスラスタの重量が支配的となり，ロードセルを使用して推力測定を行うのが困難である．そこで，振り子を利用したスラストスタンドが主に用いられる．振り子を利用したスラストスタンドは，ねじり振り子式，吊り下げ振り子式，倒立振り子式の 3 つに大別される [41]．これらはいずれも振り子の変位がスラスタの推力に比例することを利用するものである．測定手法は偏位法と零位法の 2 つに分けられる．前者は，変位計で測定した変位から推力を推定する方法である．偏位法で測定する推力は，定常推力とインパルス推力に分けられる [43]．スラスタの作動周期が振り子の周期より短い場合は，インパルス推力測定が行われる．零位法は，アクチュエータを利用してスラスタ推力と釣り合うような力を加えて振り子の変位変動を抑え，アクチュエータを駆動するのに要した電流から推力を推定する方法である．零位法には，外部からスラスタに電力や推進剤を供給する導線，配管の影響を排除できる, ダンパが不要というメリットがある．一方，偏位法は，変位を制御する必要がないため導入が比較的容易である．

スラストスタンドの較正は，力と変位，あるいは力とアクチュエータ駆動電流の関係を調べるために行われ

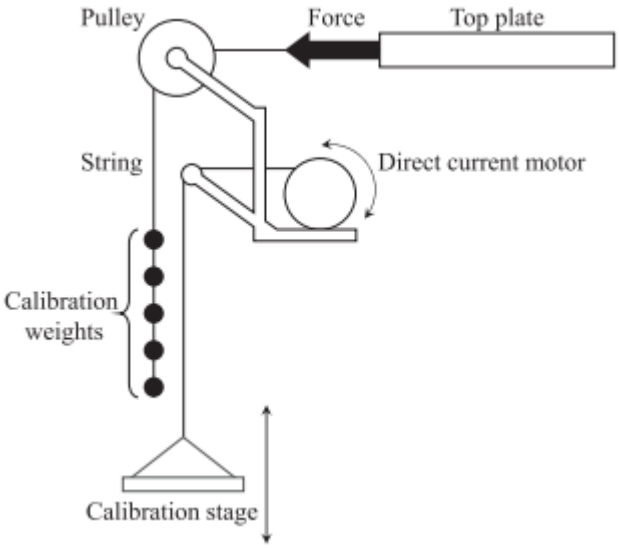


図 1.8: Calibration System of Pulley and Weight[45].

る．較正の手法は，接触，非接触の 2 通りがある．インパルス推力の較正のための接触手法として，インパルスハンマやインパルス振り子 [44] が使用される．定常推力較正のために，プーリーとおもりの装置が用いられる．図 1.8 は，プーリーとおもりを使用して較正を行う装置の概略図である．この装置は，皿をモーターで動かすことで，皿に乗るおもりの数を変え，スラストスタンドにかかる荷重を変化させるものである．質量が既知であるおもりを使用することにより，力と変位の関係を得ることができる．非接触の較正装置として，静電櫛歯アクチュエータ [46] や電磁アクチュエータが利用される [47]．静電櫛歯アクチュエータは 100μN から数 mN までの力を加えることができるが，数 mN の力を加えるためには数百 V の高電圧を加える必要がある [46]．一方，電磁アクチュエータであるボイスコイルモーター (VCM) の場合，磁場とコイルの巻き数を確定させれば，電流に比例する力を加えられるという利点がある．

1.2.2　1 自由度スラストスタンドの問題点

実際の宇宙機を運用する際には，1 自由度スラストスタンドでは測定できない力，トルクにより想定外の挙動を示す可能性がある．まず，太陽輻射圧や空気力学的な力，重力勾配といった外乱によるトルクがある [48]．これらは宇宙の環境によるものであり，地上試験で測定することはできない．次に，スラスタそのものに由来する要素として，推力の横方向成分やスワールトルクがある．スワールトルクはイオンの旋回により生じるロールトルクである [49]．さらに，宇宙機にスラスタを取り付けた後に問題となりうる要素として，スラスタの推力ベクトルが宇宙機重心を貫かないことによって生じるトルクがある．

これらの要素によって生じる不要トルクには，通常リアクションホイール (RW) を使用して対応する．リアクションホイールは，フライホイールの回転数を変えることで宇宙機にトルクを与えるという機構である．しかし，一定の外トルクが与えられ続け，上げられる回転数が限界に達する場合がある．この場合，フライホイールの回転数を下げるためにアンローディングが行われる．アンローディングを行う方法として，ジンバルや磁気トルカ，姿勢制御用スラスタの噴射がある．ジンバルはスラスタの向きを変える機構で，CubeSat 用スラスタでも採用例がある [50]．磁気トルカは，外部磁場との作用で宇宙機にトルクを与える装置である [51]．しかし超小型宇宙機の場合，重量や容積の制約があり，ジンバルを搭載できない場合がある．また，地球磁場から離れる深宇宙探査機の場合は，磁気トルカを使用できない [52]．姿勢制御用スラスタは宇宙機に複数搭載

され，それらからなる姿勢制御システムはリアクションコントロールシステム (RCS) とよばれる．RCS による発生トルクは各スラスタの推力と宇宙機での配置から計算されるが，取り付け時の誤差によって，実際に生じるトルクとのずれが生じうる．

これらの要素を測定するためには，6 自由度; 並進 3 方向の力とトルクの測定が可能なスラストスタンドが必要である．推進系モジュール単体で 6 自由度測定を行う場合は，宇宙機全体の重心データと推進系の重心データの両方が必要である．一方，宇宙機全体を載せて 6 自由度測定が可能であれば，推進系単体の重心特性は不要である．宇宙機全体を載せて測定を行うのは，数 10 kg 以上の小型宇宙機では現実的ではない．しかし，質量 10 kg 以内の Nanosatellite であれば，宇宙機全体を載せて 6 自由度測定を行うことが比較的容易である．

1.2.3 多自由度スラストスタンド

先行研究の中で，推力レンジが数 10 N 以上の固体ロケットやハイブリッドロケットを対象したスラストスタンドでは，6 自由度測定を行うものがある [53, 54]．これらはロードセルを使用しており，推力重量比の小さい超小型宇宙機スラスタの推力測定で使用するのには適さない．

超小型宇宙機スラスタを対象にした先行研究としては，ホールスラスタを対象に 2 自由度測定を行うスラストスタンド [55] や，エレクトロスプレーを対象に 2 自由度測定を行うスラストスタンド [56]，磁気浮上を利用した 6 自由度スラストスタンド [57] がある．

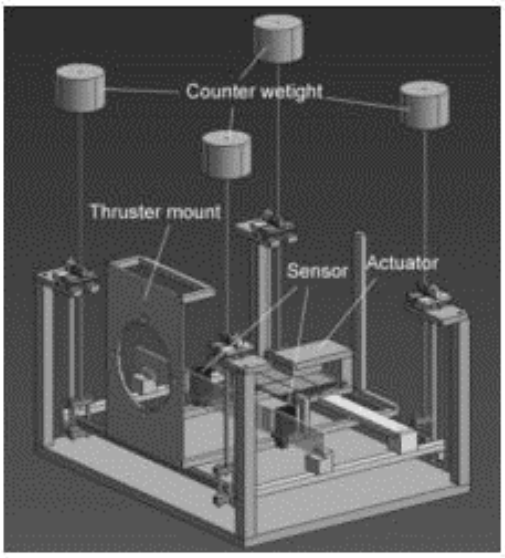


図 1.9: Dual pendulum thrust stand for hall thruster[55].

図 1.9 は，ホールスラスタを対象にした 2 自由度測定を行うスラストスタンドの概略図である．ここで，2 自由度とは主方向推力と横方向推力のことを指す．このスラストスタンドは 2 重振り子式である．内側の振り子にスラスタを設置し，外側の振り子との距離を測定することにより，熱ドリフトの影響を排除して推力測定を行うことができる．2 つの振り子の腕はナイフエッジで支持されている．このスラストスタンドでは，電磁アクチュエータを使用して零位法による推力測定を行う．電磁アクチュエータは，内側振り子に取り付けられた 2 本の直交する銅線と，外側振り子に取り付けられた磁気回路からなる．推力の較正にはプーリーとおもりからなるシステムが用いられる．較正により計算された測定誤差は，主方向推力が 0.25 mN(2.1 %)，横方向推力が 0.09 mN(1.4 %) であった [55].

図 1.10 は，エレクトロスプレースラスタを対象に 2 自由度測定を行うスラストスタンドの概略図である．こ

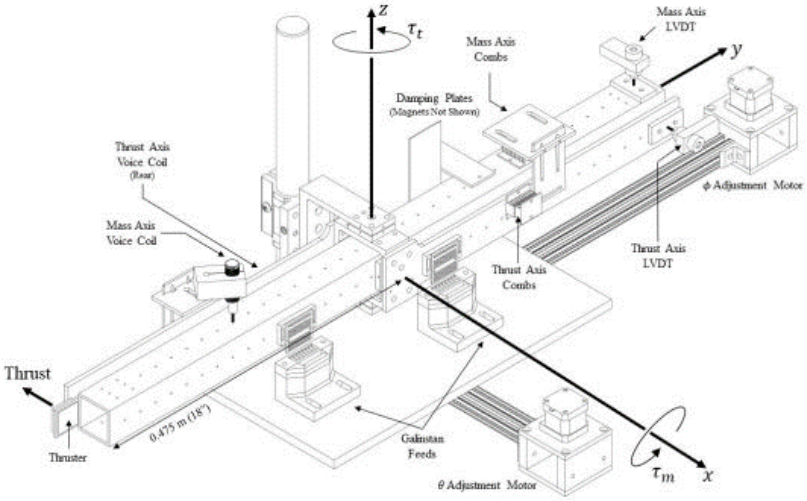


図 1.10: Dual axis torsional pendulum thrust stand for electrospray thruster[56].

のスラストスタンドでは，主方向推力と推進剤消費質量を測定する．スタンドの中心にはフレックスピボットで支持された 2 軸ジンバルがあり，外側の構造が z 軸まわりに回転，内側の構造が x 軸まわりに回転する．このスラストスタンドでは 2 個のボイスコイルを使用して零位法による測定を行う．ボイスコイルの較正を行うために，櫛歯型静電アクチュエータが使用される．中心から 0.511 m の場所にスラスタを設置した状態で，測定可能な推力，質量減少の範囲は，±1200 μN，±70 mg であった [56].

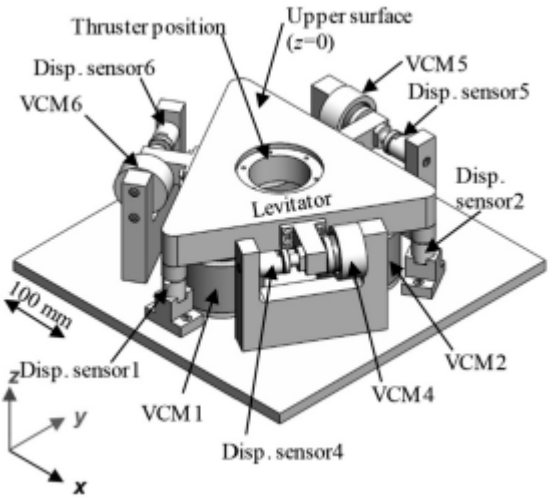
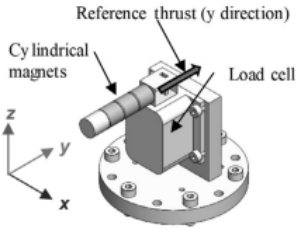


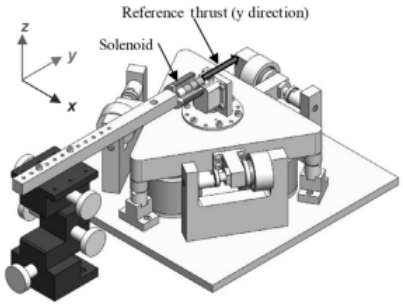
図 1.11: Magnetic levitation 6 degree-of-freedom thrust stand[57].

図 1.11 は 1 N 以内の推力測定を行う磁気浮上式 6 自由度スラストスタンドの概略図である．このスラストスタンドでは，磁気浮上体の上にスラスタを載せ，ボイスコイルモーター (VCM) の電磁力により変位を一定に保つ零位法により測定を行う．スラストスタンドの較正は図 1.12 のような模擬スラスタを使用して行われた．模擬スラスタはロードセルと円柱状磁石からなり，磁石をソレノイドコイルに挿入することで力を発生させる．各方向の較正を行うため，模擬スラスタを設置する際の姿勢を変えて複数回行われた [57].

以上の先行研究の中で，超小型宇宙機の低推力スラスタを対象に 6 自由度測定を行うものは磁気浮上式スラ



(a) Model thruster[57].



(b) Model thruster set up[57].

図 1.12: Model thruster for calibration of the magnetic levitation 6 degree-of-freedom thrust stand[57].

ストスタンドのみである．先に述べたように，このスラストスタンドでは，磁気浮上体の変位が 0 になるよう VCM の電磁力で制御する．しかし，z 軸方向に力を加える VCM1 から VCM3 では，磁気浮上体と搭載するスラスタの重量を支えるためにも力を加える必要がある．したがって，搭載可能な重量に制限があり，質量が数 kg である Nanosatellite 全体を載せて測定を行うのは困難である．

1.3 研究目的

先行研究の磁気浮上式 6 自由度スラストスタンドでは，浮上可能な重量に制限があった．そこで，菊池らは，重量制限の緩和を図り，バネ吊下式 6 自由度スラストスタンドを提案した [58]．先行研究では，試作スラストスタンドが組み立てられ，較正方法が提案された．本研究では，推進剤の噴射を伴う実験を行って実際に推力測定を行い，スラストスタンドの性能を検証することを目的とする．

第 2 章

方法

2.1　6 自由度スラストスタンドの運動方程式

2.1.1　基礎式

表記規則

本節では，物理量としてのベクトルを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}$ などの太字で表す．ベクトル $\boldsymbol{e}$ は基底を表すのに使用し，慣性座標系の基底を $\left\{\boldsymbol{e}_1^{(0)}, \boldsymbol{e}_2^{(0)}, \boldsymbol{e}_3^{(0)}\right\}$ と表す．基底どうしの演算として，内積とクロス積を定義する．内積は「$\cdot$」，クロス積には「$\times$」の記号を使用する．

具体的には，あるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，内積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \cdot (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned} \tag{2.1}$$

となり，クロス積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a_1b_2\boldsymbol{e}_3 - a_1b_2\boldsymbol{e}_2 - a_2b_1\boldsymbol{e}_3 + a_2b_3\boldsymbol{e}_1 + a_3b_1\boldsymbol{e}_2 - a_3b_2\boldsymbol{e}_1 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．さらに，ベクトルどうしの演算として直積を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a_1b_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + a_2b_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + a_1b_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\ &+ a_1b_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + a_2b_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + a_1b_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ &+ a_1b_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + a_2b_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + a_3b_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{2.3}$$

と定義する．

オイラー・ラグランジュ方程式

自由度 N の系で，一般化座標を $q_i (i = 1, 2, 3, ..., N)$，ラグランジアン L を $L(q_i, \dot{q}_i)$ とすると，オイラー・ラグランジュ方程式は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2.4}$$

と表せる．また，ラグランジアンは運動エネルギー T とポテンシャル U により

$$L = T - U \tag{2.5}$$

と表せる．

6 自由度スラストスタンドの三角形状の宇宙機搭載プレートが，3 本のバネで吊り下げられた剛体であるとみなす．系の独立変数を設定し，ラグランジアンを求めれば，運動方程式はオイラー・ラグランジュ方程式により得られる．一般化座標として，並進 3 方向については慣性座標系からみた剛体原点の位置ベクトル $\boldsymbol{x_0}$ をとる．$\boldsymbol{v_0} = \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}$ より，一般化速度は $\dot{\boldsymbol{x}}_0$ である．以下，添え字の無い $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{v_0}$ のことを指す．回転については，一般化座標としてオイラー角を使用する．

角速度ベクトル

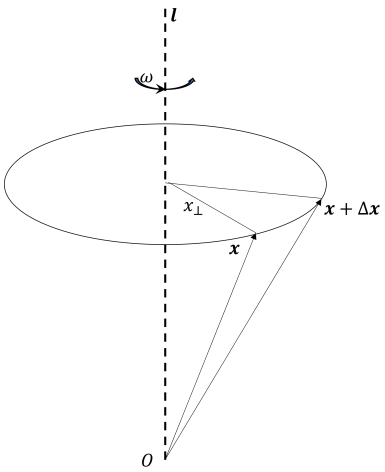


図 2.1: Definition of angular velocity vector

ここでは，角速度ベクトルを定義する．図 2.1 のように，原点 O を通る回転軸ベクトル $\boldsymbol{l}$ と，O からみた位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ を定義する．$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{l}$ に降ろした垂線の長さを $x_\perp$ とする．位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ が Δt 後に $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ に移動するときの角速度を ω とすれば，$\Delta\boldsymbol{x}$ の大きさは $x_\perp \omega \Delta t$ である．したがって，

$$\Delta\boldsymbol{x} = x_\perp \omega \Delta t \frac{\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x}|} \tag{2.6}$$

$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角の大きさを α とすれば，

$$\Delta\boldsymbol{x} = x_\perp \omega \Delta t \frac{\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{x}| \sin\alpha} = \Delta t \omega \hat{\boldsymbol{l}} \times \boldsymbol{x} \tag{2.7}$$

である ($\hat{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l}/|\boldsymbol{l}|$)．ここで，角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} =: \omega\hat{\boldsymbol{l}}$ と定義して

$$\Delta\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x})\Delta t \tag{2.8}$$

と表す．

2.1.2 オイラー角

オイラー角定義

本論文では，三角形プレートの姿勢を表すためにオイラー角を用いる．本論文中のオイラー角の定義を示す．慣性座標系の直交基底 $\left\{\boldsymbol{e}_1^{(0)}, \boldsymbol{e}_2^{(0)}, \boldsymbol{e}_3^{(0)}\right\}$ を第 0 座標系，第 0 座標系を $\boldsymbol{e}_3^{(0)}$ まわりに ψ 回転させた座標系 $\left\{\boldsymbol{e}_1^{(1)}, \boldsymbol{e}_2^{(1)}, \boldsymbol{e}_3^{(1)}\right\}$ を第 1 座標系とよぶ．次に，第 1 座標系を $\boldsymbol{e}_2^{(1)}$ まわりに θ 回転させた座標系

$\left\{\boldsymbol{e}_1^{(2)}, \boldsymbol{e}_2^{(2)}, \boldsymbol{e}_3^{(2)}\right\}$ を第 2 座標系とよぶ．最後に第 2 座標系を $\boldsymbol{e}_1^{(2)}$ まわりに回転させた座標系 $\left\{\boldsymbol{e}_1^{(0)}, \boldsymbol{e}_2^{(0)}, \boldsymbol{e}_3^{(0)}\right\}$ を第 3 座標系とよぶ．ここで，第 3 座標系は剛体座標系 $\left\{\boldsymbol{e}_1^{(R)}, \boldsymbol{e}_2^{(R)}, \boldsymbol{e}_3^{(R)}\right\}$ と等しい．

第 0 座標系と第 1 座標系の関係は

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

第 1 座標系と第 2 座標系の関係は

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(1)} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(1)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(2)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

第 2 座標系と第 3 座標系の関係は

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(3)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(2)} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(2)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(3)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

である．結局，慣性座標系と剛体座標系間の基底の変換として，

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(R)} \end{pmatrix} = \mathcal{R}^t(\psi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix}
\tag{2.12}
$$

が得られる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^t(\psi, \theta, \phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

である．

角速度ベクトルのオイラー角表示

角速度ベクトルをオイラー角を用いて表す．3 つの角度 (ψ, θ, ϕ) の回転速度を $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ とする．$\dot{\psi}$ による Δt 間の回転微小量を $\Delta\boldsymbol{x}_\psi$ とおけば，

$$
\Delta\boldsymbol{x}_\psi = \Delta t \dot{\psi} \boldsymbol{e}_3^{(0)} \times \boldsymbol{x}
\tag{2.14}
$$

同様に，$\dot{\theta}, \dot{\phi}$ による回転微小量はそれぞれ

$$\Delta \boldsymbol{x}_\theta = \Delta t \dot{\theta} \boldsymbol{e}_2^{(1)} \times \boldsymbol{x} \tag{2.15}$$

$$\Delta \boldsymbol{x}_\phi = \Delta t \dot{\phi} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \times \boldsymbol{x} \tag{2.16}$$

である．これらの回転が同時に行われたとすると，

$$\Delta \boldsymbol{x} = \Delta t (\dot{\psi} \boldsymbol{e}_3^{(0)} + \dot{\theta} \boldsymbol{e}_2^{(1)} + \dot{\phi} \boldsymbol{e}_1^{(2)}) \times \boldsymbol{x} \tag{2.17}$$

となる．角速度ベクトルの定義より，

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \boldsymbol{e}_3^{(0)} + \dot{\theta} \boldsymbol{e}_2^{(1)} + \dot{\phi} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \tag{2.18}$$

である．ここで，$\boldsymbol{e}_3^{(0)} = \boldsymbol{e}_3^{(1)} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_1^{(2)} + \cos\theta \boldsymbol{e}_3^{(2)}$，$\boldsymbol{e}_2^{(1)} = \boldsymbol{e}_2^{(2)}$ より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\psi}(-\sin\theta \boldsymbol{e}_1^{(2)} + \cos\theta \boldsymbol{e}_3^{(2)}) + \dot{\theta} \boldsymbol{e}_2^{(2)} + \dot{\phi} \boldsymbol{e}_1^{(2)} \\ &= (-\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi}) \boldsymbol{e}_1^{(2)} + \dot{\theta} \boldsymbol{e}_2^{(2)} + \dot{\psi}\cos\theta \boldsymbol{e}_3^{(2)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

これを剛体座標系に変換すれば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\phi} & \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi & -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.20}$$

である．これを

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1^{(3)} \boldsymbol{e}_1^{(3)} + \omega_2^{(3)} \boldsymbol{e}_2^{(3)} + \omega_3^{(3)} \boldsymbol{e}_3^{(3)} \tag{2.21}$$

と表すとき，$\mathcal{E}$ を

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(3)} \\ \omega_2^{(3)} \\ \omega_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

で定義する．$\boldsymbol{\omega}$ を慣性座標系で表す場合は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_1^{(3)} \boldsymbol{e}_1^{(3)} + \omega_2^{(3)} \boldsymbol{e}_2^{(3)} + \omega_3^{(3)} \boldsymbol{e}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(3)} & \omega_2^{(3)} & \omega_3^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(3)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(3)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} \mathcal{E}^t \mathcal{R}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.23}$$

より，

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} \\ \omega_2^{(0)} \\ \omega_3^{(0)} \end{pmatrix} = \mathcal{R}\mathcal{E} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

である．

2.1.3 運動エネルギー

全運動エネルギー

剛体の運動エネルギーを導出する．慣性座標系における，剛体原点 O から剛体内の任意の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．A の速度ベクトル $\boldsymbol{v_A}$ は，O の速度 $\boldsymbol{v_0}$ と角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて，

$$\boldsymbol{v_A} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{2.25}$$

と表せて，

$${v_A}^2 = v_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{v_0} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{2.26}$$

である．剛体の密度を ρ とする．このとき全運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_V \rho {v_A}^2 d\boldsymbol{r} \\ &= \frac{1}{2}\int_V \rho\{v_0^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{v_0} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} \\ &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\int_V \rho\{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\int_V \rho\{2\boldsymbol{v_0} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{2.27}$$

である ($d\boldsymbol{r} = dr_1 dr_2 dr_3 = dV$)．ここで，剛体の質量を M とした．

第 2 項において，スカラー三重積[*1]，ベクトル三重積[*2]を考慮すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_V \rho\{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \rho\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \rho(r^2\mathbb{I} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{r} \end{aligned} \tag{2.28}$$

と変形できる．さらに，慣性テンソル $\mathbb{J}$ を

$$\mathbb{J} = \int_V \rho(r^2\mathbb{I} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = I_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, I_{ij} = \int_V \rho(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)d\boldsymbol{r} \tag{2.29}$$

と定義すると，

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{2.30}$$

となる．

つぎに第 3 項を変形すると，

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\{2\boldsymbol{v_0} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \int_V \rho\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{2.31}$$

剛体重心の位置ベクトル $\boldsymbol{x_g}$ は

$$\boldsymbol{x_g} = \frac{1}{M}\int_V \rho(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x_0} + \frac{1}{M}\int_V \rho\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} \tag{2.32}$$

である．

$$\int_V \rho\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} = M(\boldsymbol{x_g} - \boldsymbol{x_0}) \tag{2.33}$$

[*1] 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で，$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ が成り立つ．

[*2] 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で，$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ が成り立つ．

を式 (2.31) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_V \rho\{2\boldsymbol{v_0}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\}d\boldsymbol{r} &= M\boldsymbol{v_0}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x_g}-\boldsymbol{x_0})) \\ &= M\boldsymbol{v_0}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c})\end{aligned} \tag{2.34}$$

と変形できる．ただし，重心偏差ベクトル $\boldsymbol{c} =: \boldsymbol{x_g}-\boldsymbol{x_0}$ とした．

(2.27) に (2.30) と (2.34) を代入すると，全運動エネルギー T

$$T = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} + M\boldsymbol{v_0}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c}) \tag{2.35}$$

が得られる．第 1 項は並進運動エネルギー T_t，第 2 項は剛体原点のまわりの回転運動エネルギー T_r，第 3 項は剛体重心が剛体原点のまわりを動く運動エネルギー T_c である．剛体原点と剛体重心が一致する場合,$T_c = 0$ である．

オイラー角表示

並進運動エネルギー T_t は,

$$\boldsymbol{x_0} = x_{0,1}\boldsymbol{e}_1^{(0)} + x_{0,2}\boldsymbol{e}_2^{(0)} + x_{0,3}\boldsymbol{e}_3^{(0)} \tag{2.36}$$

とすれば,

$$T_t = \frac{1}{2}M(\dot{x}_{0,1}^2 + \dot{x}_{0,2}^2 + \dot{x}_{0,3}^2) \tag{2.37}$$

である．

つぎに，回転運動エネルギー

$$T_r = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{2.38}$$

をオイラー角を用いて表す．剛体座標系では慣性テンソル $\mathbb{J}$ は固定される．その成分を

$$\begin{aligned}\mathbb{J} &= I_{ij}^{(R)}\boldsymbol{e}_i^{(R)}\boldsymbol{e}_j^{(R)} \\ &= I_{11}^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)} + I_{12}^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)} + I_{13}^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)} \\ &+ I_{21}^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)} + I_{22}^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)} + I_{23}^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)} \\ &+ I_{31}^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)} + I_{32}^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)} + I_{33}^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)}\end{aligned} \tag{2.39}$$

と表す．剛体座標系の角速度ベクトルの成分表示を使うと,

$$T_r = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\omega_1^{(R)} & \omega_2^{(R)} & \omega_3^{(R)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{11}^{(R)} & I_{12}^{(R)} & I_{13}^{(R)} \\ I_{21}^{(R)} & I_{22}^{(R)} & I_{23}^{(R)} \\ I_{31}^{(R)} & I_{32}^{(R)} & I_{33}^{(R)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^{(R)} \\ \omega_2^{(R)} \\ \omega_3^{(R)}\end{pmatrix} \tag{2.40}$$

である．ここで，表記の簡易化のために

$$\begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\end{pmatrix} \tag{2.41}$$

とすれば，$\omega_i^{(R)} = E_{ij}\dot{\phi}_j$ であるので，回転運動エネルギーを成分表記すると,

$$T_r = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i^{(R)}\omega_j^{(R)} = \frac{1}{2}I_{ij}E_{ik}E_{jl}\dot{\phi}_k\dot{\phi}_l \tag{2.42}$$

を得る．

原点まわりの剛体重心の運動エネルギー T_c は,

$$T_c = M\boldsymbol{v_0} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}) \tag{2.43}$$

である．剛体座標系では $\boldsymbol{c}$ の成分は定数なので，$c_i = c_i^{(R)}$ と書けば,

$$\boldsymbol{c} = c_i \boldsymbol{e}_i^{(R)} = c_i R_{ij}^t \boldsymbol{e}_j^{(0)} = c_i^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} \tag{2.44}$$

である．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c} &= (\omega_1^{(R)} \boldsymbol{e}_1^{(R)} + \omega_2^{(R)} \boldsymbol{e}_2^{(R)} + \omega_3^{(R)} \boldsymbol{e}_3^{(R)}) \times (c_1 \boldsymbol{e}_1^{(R)} + c_2 \boldsymbol{e}_2^{(R)} + c_3 \boldsymbol{e}_3^{(R)}) \\
&= (\omega_2^{(R)} c_3 - \omega_3^{(R)} c_2) \boldsymbol{e}_1^{(R)} + (\omega_3^{(R)} c_1 - \omega_1^{(R)} c_3) \boldsymbol{e}_2^{(R)} + (\omega_1^{(R)} c_2 - \omega_2^{(R)} c_1) \boldsymbol{e}_3^{(R)} \\
&= \begin{pmatrix} \omega_1^{(R)} & \omega_2^{(R)} & \omega_3^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(R)} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

ここで，$\boldsymbol{c}$ に関するチルダテンソル $\mathbb{T}_c$ とその行列 $\mathcal{T}_c$ を定義する．

$$\mathcal{T}_c = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

角速度を

$$\begin{pmatrix} \omega_1^{(R)} & \omega_2^{(R)} & \omega_3^{(R)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \right\}^t = (\mathcal{E}\mathfrak{f})^t = \mathfrak{f}^t \mathcal{E}^t \tag{2.47}$$

と行列で表せば,

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c} = \mathfrak{f}^t \mathcal{E}^t \mathcal{T}_c \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(R)} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

さらに,

$$\boldsymbol{v_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} & \boldsymbol{e}_2^{(0)} & \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_{0,1} \\ \dot{x}_{0,2} \\ \dot{x}_{0,3} \end{pmatrix} = \left\{ \mathcal{R} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \right\}^t \begin{pmatrix} \dot{x}_{0,1} \\ \dot{x}_{0,2} \\ \dot{x}_{0,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(R)} & \boldsymbol{e}_2^{(R)} & \boldsymbol{e}_3^{(R)} \end{pmatrix} \mathcal{R}^t \mathfrak{v} \tag{2.49}$$

を用いれば,

$$T_c = M(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{v_0} = M\mathfrak{f}^t \mathcal{E}^t \mathcal{T}_c \mathcal{R}^t \mathfrak{v} \tag{2.50}$$

成分で表せば,

$$T_c = M\dot{\phi}_i E_{ij} T_{c,jk} R_{kl}^t \dot{x}_l \tag{2.51}$$

である．

2.1.4 ポテンシャル

本スラストスタンドのポテンシャル U は重力ポテンシャル U_g とバネポテンシャル U_s の和,

$$U = U_g + U_s \tag{2.52}$$

である．

重力ポテンシャル

一様な重力加速度 $\boldsymbol{g}$ の下で，重力ポテンシャルは

$$U_g = -M\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x_0} \tag{2.53}$$

バネポテンシャル

本スラストスタンドで使用する 3 本のバネに対して番号を n とし，バネ定数を $k_n, (n=1,2,3)$，自然長を $l_n(n=1,2,3)$ とする．剛体原点からプレート側の取り付け点までの位置ベクトルを $\boldsymbol{a}_n, (n=1,2,3)$，フレーム側の固定点の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}_n, (n=1,2,3)$ とする．

$$\boldsymbol{x_0} = x_{0,i}\boldsymbol{e}_i^{(0)} \tag{2.54}$$

の $x_{0,i}$ が変数である．$\boldsymbol{a}_n$ は

$$\boldsymbol{a_n} = \begin{pmatrix} a_{n,1}^{(R)} & a_{n,2}^{(R)} & a_{n,3}^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,1}^{(R)} & a_{n,2}^{(R)} & a_{n,3}^{(R)} \end{pmatrix} \mathcal{R}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

だから，成分表示すると，

$$\begin{pmatrix} a_{n,1}^{(0)} \\ a_{n,2}^{(0)} \\ a_{n,3}^{(0)} \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_{n,1}^{(R)} \\ a_{n,2}^{(R)} \\ a_{n,3}^{(R)} \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

である．以上より，バネポテンシャル U_s として

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} k_n(|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{b}_n|-l_n)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} k_n\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(x_{0,i}+R_{ij}a_{n,j}^{(R)}-b_{n,i}^{(0)}\right)^2}-l_n\right)^2 \end{aligned} \tag{2.57}$$

を得る．

2.1.5 ラグランジアン

導出した運動エネルギーとポテンシャルより，本スラストスタンドのラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= T_t + T_r + T_c - (U_g + U_s) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{x}}_0^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{J}\cdot\boldsymbol{\omega} + M(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{c})\cdot\dot{\boldsymbol{x}}_0 + M\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x_0} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} k_n(|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{b}_n|-l_n)^2 \end{aligned} \tag{2.58}$$

であり，成分表記すれば，

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}M\sum_{i}^{3}\dot{x}_{0.i}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}^{3} I_{ij}^{(R)}E_{ik}E_{ij}\dot{\phi}_k\dot{\phi}_l + M\sum_{i,j,k}^{3}\dot{\phi}_i E_{ij}T_{c,jk}R_{kl}^t\dot{x}_{0,l} \\ &+ M\sum_{i}^{3} g_i x_{0,i} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} k_n\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(x_{0,i}+R_{ij}a_{n,j}^{(R)}-b_{n,i}^{(0)}\right)^2}-l_n\right)^2 \end{aligned} \tag{2.59}$$

となる．このラグランジアンは変数として $(\boldsymbol{x_0}, \dot{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{\phi}, \dot{\boldsymbol{\phi}})$ を持つ．したがって，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_0}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x_0}} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\phi}} &= 0 \end{aligned} \tag{2.60}$$

により運動方程式が得られる．

2.2 測定原理

2.2.1 力，トルク測定原理

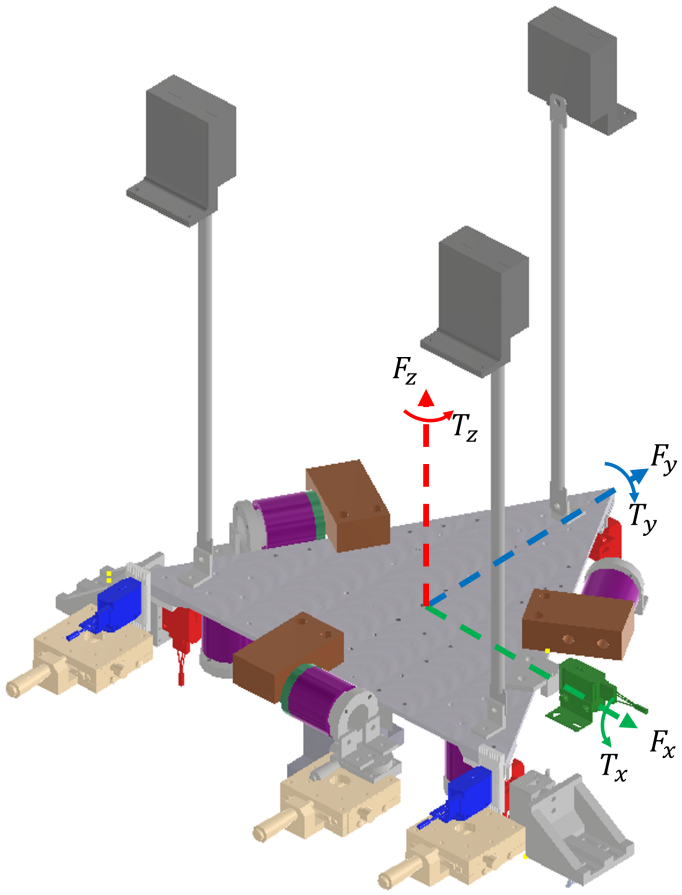


図 2.2: Thrust Stand CAD. F_x, F_y, F_z denote the positive direction of the force. T_x, T_y, T_z denote the positive direction of the torque.

以降，慣性座標系の座標軸を x 軸，y 軸，z 軸とよぶ．図 2.2 に本スラストスタンドの CAD 図と力，トルクの正方向を示す．スラストスタンドに外力 $\boldsymbol{F}$，外トルク $\boldsymbol{T}$ が加えられる場合，運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_0}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x_0}} = \boldsymbol{F} \tag{2.61}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{T} \tag{2.62}$$

と表せる．加速度成分を無視して定常状態に注目すると，外力，外トルクと変位 $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{\phi}$ の関係は，ある 6×6 行列 K を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

と表せる．今，未知数が $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{\phi}$ の 6 個なので，6 個の変位計を適切に配置すれば，ある 6×6 行列 A と，各変位の測定変位からなるベクトル $\boldsymbol{D}$ により，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = A\boldsymbol{D} \tag{2.64}$$

と表せる．これと (2.63) より変位計測定変位 $\boldsymbol{D}$ と力，トルクの関係式

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = KA\boldsymbol{D} = B\boldsymbol{D} \tag{2.65}$$

が得られる．ここで B は 6×6 行列である，本スラストスタンドの較正では，既知の力，トルクを加えた際の $\boldsymbol{D}$ を測定することにより，B を得る．本論文では，この較正をスタンド較正とよぶ.

2.2.2 変位測定原理

前項の通り, スタンド較正で B を求めるため, A を直接求める必要はないが, 本スラストスタンドにおける変位計の配置で $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}$ を測定できる原理を記す．変位測定のために 6 個の LED 変位計を使用する．図 2.3 に変位計 (DS;Displacement Sensor) 配置の CAD 図を示す．x 方向変位を測定する変位計を DSx, y 方向変位を測定する 2 個の変位計を DSy1,DSy2, z 方向変位を測定する変位計を DSz1,DSz2,DSz3 とよぶ．DSz1,DSz2,DSz3 はプレートの裏側に取り付けられている．各変位計で測定する変位を $D_{\mathrm{x}}, D_{\mathrm{y1}}, D_{\mathrm{y2}}, D_{\mathrm{z1}}, D_{\mathrm{z2}}, D_{\mathrm{z3}}$ とする．この変位計は測定対象との距離が大きくなると測定値も大きくなる.

プレートが並進，回転移動するとき，変位計が測定する変位 D を図 2.4 に示す．点 P_0 は初期状態で LED 光が当たっている三角形プレート上の点である．並進，回転により点 P_0 は点 P_1 に移動する．初期状態の測定対象平面を S とし，その法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．移動後の測定対象平面を S' とし，その法線ベクトルを $\boldsymbol{n}'$ とする．空間内において任意の点を通る平面は，法線ベクトルが決まれば特定することができるので，S' は点 P_1 を通り，法線ベクトルが $\boldsymbol{n}'$ の平面である．LED の光軸は一定なので，光軸と S' の交点 P' が移動後の LED 光スポットである.

まず，点 P_0 の位置ベクトルを剛体座標系で

$$\boldsymbol{P_0} = P_{0,1}^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)} + P_{0,2}^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)} + P_{0,3}^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)} \tag{2.66}$$

と表す．ここで，姿勢を表すオイラー角 (ψ, θ, ϕ) が微小であると仮定し，

$$\mathcal{R}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

を線形化する．これにより $\mathcal{R}^t$ で 2 次以上の微小量を 0 と近似すると

$$\mathcal{R}^t = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta - \psi & \phi\theta\psi + 1 & \phi \\ \theta + \phi\psi & \theta\psi - \phi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

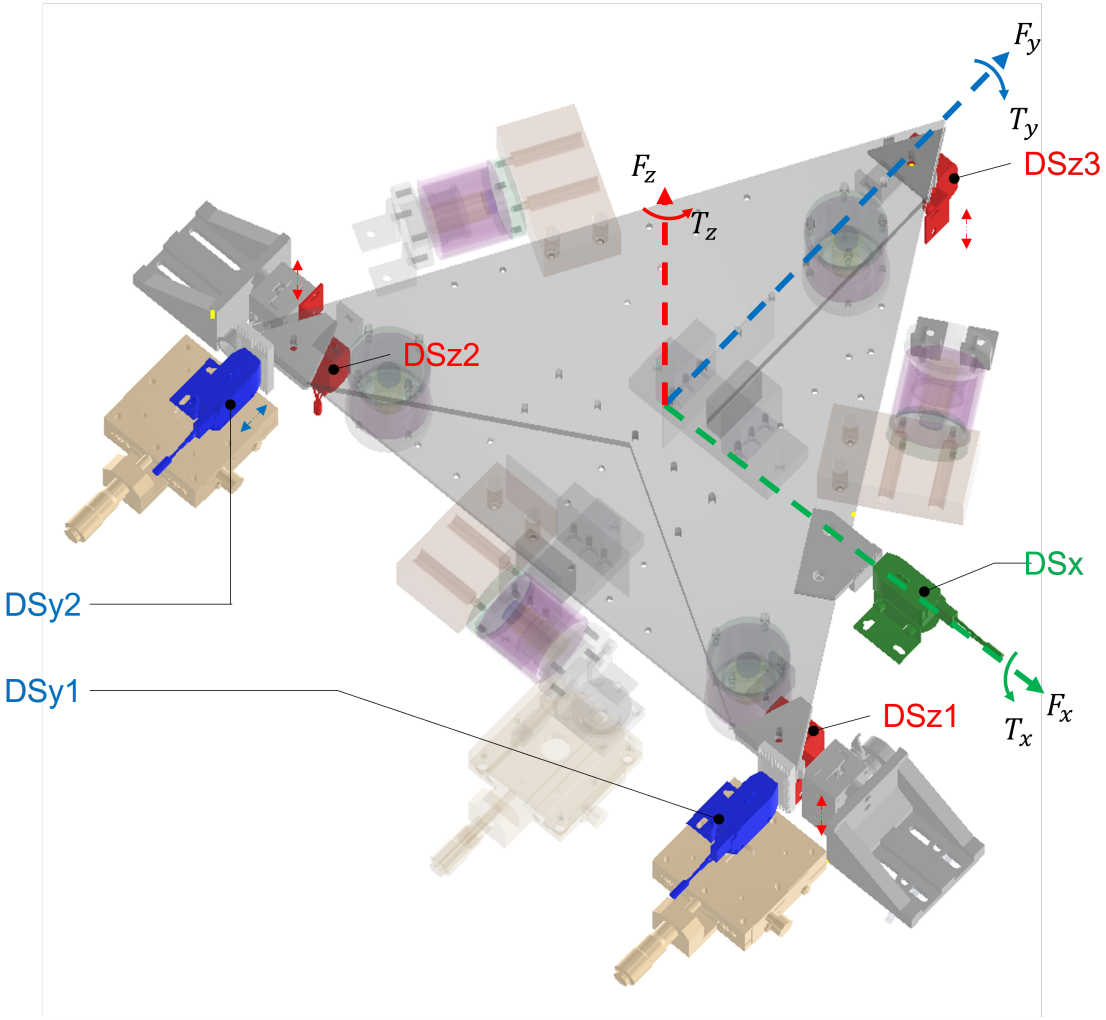


図 2.3: Placement of Displacement Sensors.

と表せる．初期状態において慣性座標系と剛体座標系の原点を同じ点にとり，オイラー角を $(\psi_0, \theta_0, \phi_0)$ とすれば，P_0 の位置ベクトルは慣性座標系で

$$\boldsymbol{P_0} = \begin{pmatrix} P_{0,1}^{(R)} & P_{0,2}^{(R)} & P_{0,3}^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \psi_0 & -\theta_0 \\ -\psi_0 & 1 & \phi_0 \\ \theta_0 & -\phi_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

と表せる．ここで，$\boldsymbol{P} = P_{0,i}^{(0)} \boldsymbol{e}_i^{(0)} = P_{0,i} \boldsymbol{e}_i^{(0)}$ と表記すれば，

$$\begin{aligned} P_{0,1} &= P_{0,1}^{(R)} - \psi_0 P_{0,2}^{(R)} + \theta_0 P_{0,3}^{(R)} \\ P_{0,2} &= \psi_0 P_{0,1}^{(R)} + P_{0,2}^{(R)} - \phi_0 P_{0,3}^{(R)} \\ P_{0,3} &= -\theta_0 P_{0,1}^{(R)} + \phi_0 P_{0,2}^{(R)} + P_{0,3}^{(R)} \end{aligned} \tag{2.70}$$

この P_0 がプレートの並進，回転により P_1 に移動するとき，P_1 の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} P_{0,1}^{(R)} & P_{0,2}^{(R)} & P_{0,3}^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

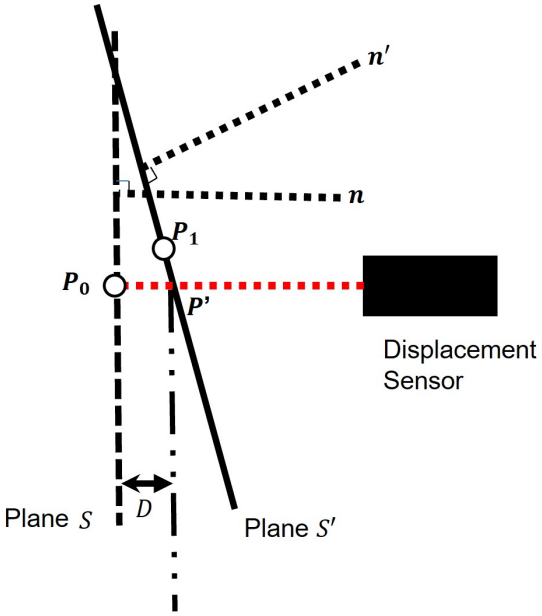


図 2.4: Displacement

である．成分を表記すれば

$$
\begin{aligned}
P_{1,1} &= x_1 + P_{0,1}^{(R)} - \psi P_{0,2}^{(R)} + \theta P_{0,3}^{(R)} \\
P_{1,2} &= x_2 + \psi P_{0,1}^{(R)} + P_{0,2}^{(R)} - \phi P_{0,3}^{(R)} \\
P_{1,3} &= x_3 - \theta P_{0,1}^{(R)} + \phi P_{0,2}^{(R)} + P_{0,3}^{(R)}
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

である．次に，法線ベクトルを考える．S の法線ベクトルを

$$
\boldsymbol{n} = n_1^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)} + n_2^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)} + n_3^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)} = \begin{pmatrix} n_1^{(R)} & n_2^{(R)} & n_3^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \psi_0 & -\theta_0 \\ -\psi_0 & 1 & \phi_0 \\ \theta_0 & -\phi_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \tag{2.73}
$$

とすれば，S' の法線ベクトル $\boldsymbol{n}'$ は，

$$
\boldsymbol{n}' = n_1^{(R)}\boldsymbol{e}_1^{(R)} + n_2^{(R)}\boldsymbol{e}_2^{(R)} + n_3^{(R)}\boldsymbol{e}_3^{(R)} = \begin{pmatrix} n_1^{(R)} & n_2^{(R)} & n_3^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \tag{2.74}
$$

である．ここで，x 方向測定対象面を S として，法線ベクトルを

$$
\boldsymbol{n} = 1\boldsymbol{e}_1^{(R)} + 0\boldsymbol{e}_2^{(R)} + 0\boldsymbol{e}_3^{(R)} \tag{2.75}
$$

とすると，S' の法線ベクトルは

$$
\boldsymbol{n}' = 1\boldsymbol{e}_1^{(0)} + \psi\boldsymbol{e}_2^{(0)} - \theta\boldsymbol{e}_3^{(0)} \tag{2.76}
$$

y 方向測定対象面を S として法線ベクトルを

$$
\boldsymbol{n} = 0\boldsymbol{e}_1^{(R)} + 1\boldsymbol{e}_2^{(R)} + 0\boldsymbol{e}_3^{(R)} \tag{2.77}
$$

とすると，S' の法線ベクトルは

$$
\boldsymbol{n}' = -\psi\boldsymbol{e}_1^{(0)} + 1\boldsymbol{e}_2^{(0)} + \phi\boldsymbol{e}_3^{(0)} \tag{2.78}
$$

z 方向測定対象面を S として法線ベクトルを

$$\boldsymbol{n} = 0\boldsymbol{e}_1^{(R)} + 0\boldsymbol{e}_2^{(R)} + 1\boldsymbol{e}_3^{(R)} \tag{2.79}$$

とすると，S' の法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}' = \theta\boldsymbol{e}_1^{(0)} - \phi\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 1\boldsymbol{e}_3^{(0)} \tag{2.80}$$

である．

LED 変位計の光軸は空間内において P_0 を通る直線である．DSx の光軸が x 軸に，DSy1,DSy2 の光軸が y 軸に，DSz1,DSz2,DSz3 の光軸が z 軸に平行であると仮定すれば，空間内における直線の方程式を

$$\begin{cases} x = P_{0,1} + s_x \\ y = P_{0,2} + s_y \\ z = P_{0,3} + s_z \end{cases} \tag{2.81}$$

で表せる．ただし，x 方向変位計では $s_y = s_z = 0$，y 方向変位計では $s_x = s_z = 0$，z 方向変位計では $s_x = s_y = 0$ である．この直線が平面 S' と交点をもつので，平面 S' の方程式と直線の方程式を連立させると s_x, s_y, s_z の値を求められ，これが変位計で測定する変位と等しい．

平面 S' の方程式は

$$n_1'(x - P_{1,1}) + n_2'(y - P_{1,2}) + n_3'(z - P_{1,3}) = 0 \tag{2.82}$$

であり，これに直線の方程式を代入すると，

$$n_1'(P_{0,1} + s_x - P_{1,1}) + n_2'(P_{0,2} + s_y - P_{1,2}) + n_3'(P_{0,3} + s_z - P_{1,3}) = 0 \tag{2.83}$$

となる．

図 2.5 のように各変位計スポット位置を表す．まず，x 方向測定変位を考える．

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}^{(R)} & P_{0,2}^{(R)} & P_{0,3}^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\mathrm{x} & Y_\mathrm{x} & Z_\mathrm{x} \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

とする．ここで，(2.75),(2.78).(2.80) より，各変位計測定対象面の法線ベクトルの成分に微小量である ψ, θ, ϕ が含まれている．$\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_1}$ の成分にも ψ, θ, ϕ を係数にもつ項があるので，2 次以上の微小量を無視すると (2.83) は，

$$(X_\mathrm{x} - \psi_0 Y_\mathrm{x} + \theta_0 Z_\mathrm{x} + s_x - (x_1 + X_\mathrm{x} - \psi Y_\mathrm{x} + \theta Z_\mathrm{x})) + \psi(Y_x - (x_2 + Y_\mathrm{x})) - \theta(Z_\mathrm{x} - (x_3 + Z_\mathrm{x})) = 0 \tag{2.85}$$

となる．これを計算すると

$$s_x = -Y_\mathrm{x}(\psi - \psi_0) + Z_\mathrm{x}(\theta - \theta_0) + x_1 + x_2\psi - x_3\theta \tag{2.86}$$

となる．

次に，y 方向測定変位を考える．

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}^{(R)} & P_{0,2}^{(R)} & P_{0,3}^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_\mathrm{y} & Y_\mathrm{y} & Z_\mathrm{y} \end{pmatrix} \tag{2.87}$$

とする．(2.83) は，

$$-\psi(X_\mathrm{y} - (x_1 + X_\mathrm{y})) + (\psi_0 X_\mathrm{y} + Y_\mathrm{y} - \phi_0 Z_\mathrm{y} + s_y - (x_2 + \psi X_\mathrm{y} + Y_\mathrm{y} - \phi Z_\mathrm{y})) + \phi(Z_\mathrm{y} - (x_3 + Z_\mathrm{y})) = 0 \tag{2.88}$$

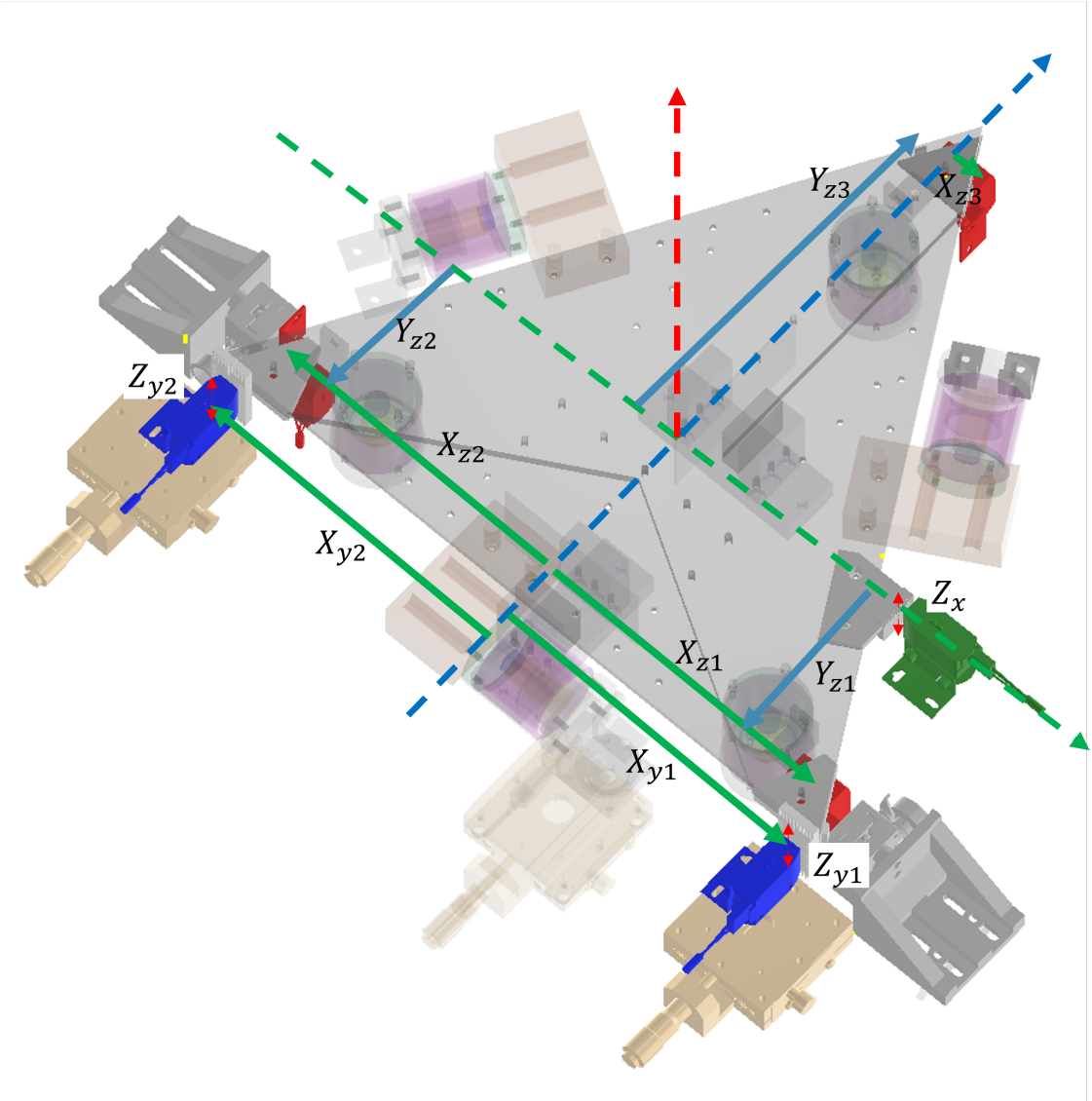


図 2.5: Displacement Sensors Spot

より，

$$s_y = X_{\mathrm{y}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{y}}(\phi - \phi_0) - x_1\psi + x_2 + x_3\phi \tag{2.89}$$

最後に，z 方向測定変位を考える．

$$\begin{pmatrix} P_{0,1}^{(R)} & P_{0,2}^{(R)} & P_{0,3}^{(R)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\mathrm{z}} & Y_{\mathrm{z}} & Z_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

とすると，(2.83) は

$$\theta(X_{\mathrm{x}} - (x_1 + X_{\mathrm{x}})) - \phi(Y_{\mathrm{x}} - (x_2 + Y_{\mathrm{x}})) + (-\theta_0 X_{\mathrm{z}} + \phi_0 Y_{\mathrm{z}} + Z_{\mathrm{z}} + s_z - (x_3 - \theta X_{\mathrm{z}} + \phi Y_{\mathrm{z}} + Z_{\mathrm{z}})) = 0 \tag{2.91}$$

より，

$$s_z = -X_{\mathrm{z}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z}}(\phi - \phi_0) + x_1\theta - x_2\phi + x_3 \tag{2.92}$$

となる．DSx の配置により，$s_x = -D_{\mathrm{x}}$ であることに注意すると，各変位計の測定変位として

$$D_{\mathrm{x}} = Y_{\mathrm{x}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{x}}(\theta - \theta_0) - x_1 - x_2\psi + x_3\theta \tag{2.93}$$
$$D_{\mathrm{y1}} = X_{\mathrm{y1}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{y1}}(\phi - \phi_0) - x_1\psi + x_2 + x_3\phi \tag{2.94}$$
$$D_{\mathrm{y2}} = X_{\mathrm{y2}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{y2}}(\phi - \phi_0) - x_1\psi + x_2 + x_3\phi \tag{2.95}$$
$$D_{\mathrm{z1}} = -X_{\mathrm{z1}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z1}}(\phi - \phi_0) + x_1\theta - x_2\phi + x_3 \tag{2.96}$$
$$D_{\mathrm{z2}} = -X_{\mathrm{z2}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z2}}(\phi - \phi_0) + x_1\theta - x_2\phi + x_3 \tag{2.97}$$
$$D_{\mathrm{z3}} = -X_{\mathrm{z3}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z3}}(\phi - \phi_0) + x_1\theta - x_2\phi + x_3 \tag{2.98}$$

を得る．

本スラストスタンドでは，$Y_{\mathrm{x}}, Z_{\mathrm{x}}, ..., X_{\mathrm{z3}}, Y_{\mathrm{z3}}$ のオーダーが 10^0 mm から 10^2 mm であるのに対して，x_1, x_2, x_3 のオーダーは 10^{-1} mm である．微小量 ψ, θ, ϕ と x_1, x_2, x_3 が掛け合わされた項を無視すれば，

$$D_{\mathrm{x}} = Y_{\mathrm{x}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{x}}(\theta - \theta_0) - x_1 \tag{2.99}$$
$$D_{\mathrm{y1}} = X_{\mathrm{y1}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{y1}}(\phi - \phi_0) + x_2 \tag{2.100}$$
$$D_{\mathrm{y2}} = X_{\mathrm{y2}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{y2}}(\phi - \phi_0) + x_2 \tag{2.101}$$
$$D_{\mathrm{z1}} = -X_{\mathrm{z1}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z1}}(\phi - \phi_0) + x_3 \tag{2.102}$$
$$D_{\mathrm{z2}} = -X_{\mathrm{z2}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z2}}(\phi - \phi_0) + x_3 \tag{2.103}$$
$$D_{\mathrm{z3}} = -X_{\mathrm{z3}}(\theta - \theta_0) + Y_{\mathrm{z3}}(\phi - \phi_0) + x_3 \tag{2.104}$$

を得る．(2.102),(2.103),(2.104) より，

$$\begin{aligned} D_{z2} - D_{z1} &= -(X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}})(\theta - \theta_0) + (Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}})(\phi - \phi_0) \\ D_{\mathrm{z3}} - D_{\mathrm{z2}} &= -(X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}})(\theta - \theta_0) + (Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}})(\phi - \phi_0) \end{aligned} \tag{2.105}$$

の 2 式を得る．それぞれ，$\theta - \theta_0$,$\phi - \phi_0$ が左辺になるよう変形すると，

$$\theta - \theta_0 = -\frac{D_{\mathrm{z2}} - D_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}} + \frac{Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}}(\phi - \phi_0) \tag{2.106}$$
$$\phi - \phi_0 = \frac{D_{\mathrm{z3}} - D_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}} + \frac{X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}}(\theta - \theta_0) \tag{2.107}$$

となる．$\theta - \theta_0$ について解くため，(2.107) を (2.106) に代入して，

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= -\frac{D_{\mathrm{z2}} - D_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}} + \frac{Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}}\left\{\frac{D_{\mathrm{z3}} - D_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}} + \frac{X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}}(\theta - \theta_0)\right\} \\ \left(1 - \frac{Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}}\frac{X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}}\right)(\theta - \theta_0) &= -\frac{D_{\mathrm{z2}} - D_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}} + \frac{Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}}}\frac{D_{\mathrm{z3}} - D_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}} \\ \theta - \theta_0 &= \frac{-(D_{\mathrm{z2}} - D_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}) + (D_{\mathrm{z3}} - D_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}})}{(X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}) - (X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}})} \\ &= \frac{(Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}} + (Y_{\mathrm{z1}} - Y_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}} + (Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}}{(X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}}) - (X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}})} \end{aligned} \tag{2.108}$$

を得る．次に，$\phi-\phi_0$ について解くため，(2.106) を (2.107) に代入して，

$$
\begin{aligned}
\phi-\phi_0 &= \frac{D_{\mathrm{z3}}-D_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}}}+\frac{X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}}}\left\{-\frac{D_{\mathrm{z2}}-D_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}}}+\frac{Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}}}(\phi-\phi_0)\right\} \\
\left(1-\frac{X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}}}\frac{Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}}}\right)(\phi-\phi_0) &= \frac{D_{\mathrm{z3}}-D_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}}}-\frac{X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}}}{Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}}}\frac{D_{\mathrm{z2}}-D_{\mathrm{z1}}}{X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}}} \\
\phi-\phi_0 &= \frac{(D_{\mathrm{z3}}-D_{\mathrm{z2}})(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})-(D_{\mathrm{z2}}-D_{\mathrm{z1}})(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})}{(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z3}})-(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})} \\
&= \frac{(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(X_{\mathrm{z1}}-X_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}}{(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})-(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})}
\end{aligned}
\tag{2.109}
$$

を得る．

$$
\begin{aligned}
x_3 &= D_{\mathrm{z1}}+X_{\mathrm{z1}}(\theta-\theta_0)-Y_{\mathrm{z1}}(\phi-\phi_0) \\
&= D_{\mathrm{z1}} \\
&+ X_{\mathrm{z1}}\frac{(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(Y_{\mathrm{z1}}-Y_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}}{(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})-(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})} \\
&- Y_{\mathrm{z1}}\frac{(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(X_{\mathrm{z1}}-X_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}}{(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})-(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})} \\
&= \frac{(X_{\mathrm{z2}}Y_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z3}}Y_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(X_{\mathrm{z3}}Y_{\mathrm{z1}}-X_{\mathrm{z1}}Y_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(X_{\mathrm{z1}}Y_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z2}}Y_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}}{(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})-(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})}
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

結局，

$$
A_1=\frac{1}{(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})-(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})}
\tag{2.111}
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\phi-\phi_0 &= A_1\{(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(X_{\mathrm{z1}}-X_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}\} \\
\theta-\theta_0 &= A_1\{(Y_{\mathrm{z3}}-Y_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(Y_{\mathrm{z1}}-Y_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(Y_{\mathrm{z2}}-Y_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}\} \\
x_3 &= A_1\{(X_{\mathrm{z2}}Y_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z3}}Y_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(X_{\mathrm{z3}}Y_{\mathrm{z1}}-X_{\mathrm{z1}}Y_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(X_{\mathrm{z1}}Y_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z2}}Y_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}\}
\end{aligned}
\tag{2.112}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\mathrm{y1}}-D_{\mathrm{y2}} &= (X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}})(\psi-\psi_0)-(Z_{\mathrm{y1}}-Z_{\mathrm{y2}})(\phi-\phi_0) \\
\psi-\psi_0 &= \frac{D_{\mathrm{y1}}-D_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}+\frac{Z_{\mathrm{y1}}-Z_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}(\phi-\phi_0) \\
&= \frac{D_{\mathrm{y1}}-D_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}+\frac{Z_{\mathrm{y1}}-Z_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}A_1\{(X_{\mathrm{z3}}-X_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}}+(X_{\mathrm{z1}}-X_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}}+(X_{\mathrm{z2}}-X_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}\}
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}(D_{\mathrm{y1}}+D_{\mathrm{y2}})-\frac{1}{2}(X_{\mathrm{y1}}+X_{\mathrm{y2}})(\psi-\psi_0)+\frac{1}{2}(Z_{\mathrm{y1}}+Z_{\mathrm{y2}})(\phi-\phi_0) \\
&= \frac{1}{2}(D_{\mathrm{y1}}+D_{\mathrm{y2}})-\frac{1}{2}(X_{\mathrm{y1}}+X_{\mathrm{y2}})\left\{\frac{D_{\mathrm{y1}}-D_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}+\frac{Z_{\mathrm{y1}}-Z_{\mathrm{z2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}(\phi-\phi_0)\right\}+\frac{1}{2}(Z_{\mathrm{y1}}+Z_{\mathrm{y2}})(\phi-\phi_0) \\
&= \frac{1}{2}(D_{\mathrm{y1}}+D_{\mathrm{y2}})-\frac{1}{2}\frac{X_{\mathrm{y1}}+X_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}(D_{\mathrm{y1}}-D_{\mathrm{y2}})+\frac{X_{\mathrm{y1}}Z_{\mathrm{y2}}-X_{\mathrm{y2}}Z_{\mathrm{y1}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}(\phi-\phi_0) \\
&= \frac{-X_{\mathrm{y2}}D_{\mathrm{y1}}+X_{\mathrm{y1}}D_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}+\frac{X_{\mathrm{y1}}Z_{\mathrm{y2}}-X_{\mathrm{y2}}Z_{\mathrm{y1}}}{X_{\mathrm{y1}}-X_{\mathrm{y2}}}(\phi-\phi_0)
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

$$A_2 = \frac{1}{X_{\mathrm{y1}} - X_{\mathrm{y2}}} \tag{2.115}$$

$$A_3 = \frac{Z_{\mathrm{y1}} - Z_{\mathrm{y2}}}{X_{\mathrm{y1}} - X_{\mathrm{y2}}} \tag{2.116}$$

とおくと，結局

$$\begin{aligned}
\psi - \psi_0 &= A_2(D_{\mathrm{y1}} - D_{\mathrm{y2}}) + A_1 A_3\{(X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}} + (X_{\mathrm{z1}} - X_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}} + (X_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}\} \\
&= A_2(D_{\mathrm{y1}} - D_{\mathrm{y2}}) + A_1 A_3\{X_{\mathrm{z3-z2}}D_{\mathrm{z1}} + X_{\mathrm{z1-z3}}D_{\mathrm{z2}} + X_{\mathrm{z2-z1}}D_{\mathrm{z3}}\} \\
x_2 &= A_2(-X_{\mathrm{y2}}D_{\mathrm{y1}} + X_{\mathrm{y1}}D_{\mathrm{y2}}) + A_1 A_2(X_{\mathrm{y1}}Z_{\mathrm{y2}} - X_{\mathrm{y2}}Z_{\mathrm{y1}})\{X_{\mathrm{z3-z2}}D_{\mathrm{z1}} + X_{\mathrm{z1-z3}}D_{\mathrm{z2}} + X_{\mathrm{z2-z1}}D_{\mathrm{z3}}\}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

が得られる ($X_{\mathrm{z3-z2}} \equiv X_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z2}}$).

最後に，x_1 は

$$\begin{aligned}
x_1 &= -D_{\mathrm{x}} + Y_{\mathrm{x}}(\psi - \psi_0) - Z_{\mathrm{x}}(\theta - \theta_0) \\
&= -D_{\mathrm{x}} + Y_{\mathrm{x}}(A_2(D_{\mathrm{y1}} - D_{\mathrm{y2}}) + A_1 A_3\{X_{\mathrm{z3-z2}}D_{\mathrm{z1}} + X_{\mathrm{z1-z3}}D_{\mathrm{z2}} + X_{\mathrm{z2-z1}}D_{\mathrm{z3}}\}) \\
&\quad - Z_{\mathrm{x}}(A_1\{(Y_{\mathrm{z3}} - Y_{\mathrm{z2}})D_{\mathrm{z1}} + (Y_{\mathrm{z1}} - Y_{\mathrm{z3}})D_{\mathrm{z2}} + (Y_{\mathrm{z2}} - Y_{\mathrm{z1}})D_{\mathrm{z3}}\})
\end{aligned} \tag{2.118}$$

以上より，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \phi - \phi_0 \\ \theta - \theta_0 \\ \psi - \psi_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} D_{\mathrm{x}} \\ D_{\mathrm{y1}} \\ D_{\mathrm{y2}} \\ D_{\mathrm{z1}} \\ D_{\mathrm{z2}} \\ D_{\mathrm{z3}} \end{pmatrix} \tag{2.119}$$

を満たすような 6×6 行列 A を

$$\begin{pmatrix}
-1 & A_2 Y_{\mathrm{x}} & -A_2 Y_{\mathrm{x}} & A_1(A_3 X_{\mathrm{z3-z2}} - Z_{\mathrm{x}} Y_{\mathrm{z3-z2}}) & A_1(A_3 X_{\mathrm{z1-z3}} - Z_{\mathrm{x}} Y_{\mathrm{z1-z3}}) & A_1(A_3 X_{\mathrm{z2-z1}} - Z_{\mathrm{x}} Y_{\mathrm{z2-z1}}) \\
0 & -A_2 X_{\mathrm{y2}} & A_2 X_{\mathrm{y1}} & A_1 A_2(X_{\mathrm{y1}} Z_{\mathrm{y2}} - X_{\mathrm{y2}} Z_{\mathrm{y1}}) X_{\mathrm{z3-z2}} & A_1 A_2(X_{\mathrm{y1}} Z_{\mathrm{y2}} - X_{\mathrm{y2}} Z_{\mathrm{y1}}) X_{\mathrm{z1-z3}} & A_1 A_2(X_{\mathrm{y1}} Z_{\mathrm{y2}} - X_{\mathrm{y2}} Z_{\mathrm{y1}}) X_{\mathrm{z2-z1}} \\
0 & 0 & 0 & A_1(X_{\mathrm{z2}} Y_{\mathrm{z3}} - X_{\mathrm{z3}} Y_{\mathrm{z2}}) & A_1(X_{\mathrm{z3}} Y_{\mathrm{z1}} - X_{\mathrm{z1}} Y_{\mathrm{z3}}) & A_1(X_{\mathrm{z1}} Y_{\mathrm{z2}} - X_{\mathrm{z2}} Y_{\mathrm{z1}}) \\
0 & 0 & 0 & A_1 X_{\mathrm{z3-z2}} & A_1 X_{\mathrm{z1-z3}} & A_1 X_{\mathrm{z2-z1}} \\
0 & 0 & 0 & A_1 Y_{\mathrm{z3-z2}} & A_1 Y_{\mathrm{z1-z3}} & A_1 Y_{\mathrm{z2-z1}} \\
0 & A_2 & -A_2 & A_1 A_3 X_{\mathrm{z3-z2}} & A_1 A_3 X_{\mathrm{z1-z3}} & A_1 A_3 X_{\mathrm{z2-z1}}
\end{pmatrix} \tag{2.120}$$

と表せる．ここで，変位計で測定するのは外力，外トルクによる初期状態からの変位，姿勢の変動なので，初期姿勢のオイラー角を把握する必要はない．

2.3 実験装置

2.3.1 スラストスタンド本体

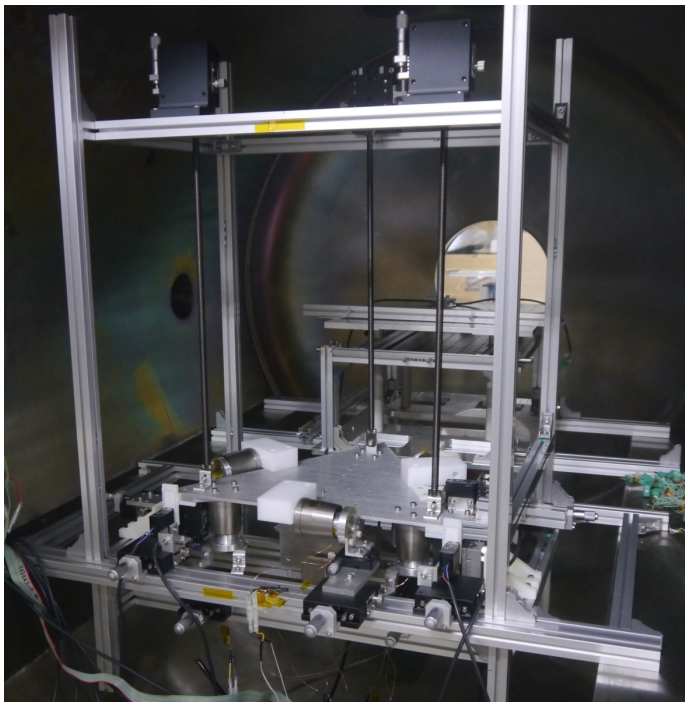


図 2.6: Appearance of 6DOF Thrust stand

図 2.6 に本スラストスタンドの外観を示す．スラストスタンド本体は真空チャンバの中に置かれている．スラストスタンドは宇宙機搭載用のプレート，3 本のバネ，ダンパー，変位計，較正装置という要素からなる．プレートは 1 辺 36 cm，厚み 1 cm の三角形状であり，三角形の各頂点付近に取り付けられた 3 本のバネによって吊り下げられている．バネの上端はフレームに固定されたステージに取り付けられており，z 軸方向の位置調整が可能である．

ダンパー

本スラストスタンドでは，振動を減衰させるのを目的として磁気ダンパを使用する．図 2.7 に磁気ダンパの写真を示す．磁気ダンパはアルミ板と，それを挟み込むネオジム磁石，ヨークからなる．磁石とヨークの CAD 図を図 2.8 に示す．アルミ板はプレート底面に垂直に取り付けられており，zx 平面に平行なものが 1 枚，yz 平面に垂直なものが 1 枚である．

LED 変位計

使用する変位計はオムロン社の Z4D-F04A である．表 2.1 に変位計の諸元を示す．この変位計は投光ビームの拡散反射光を受光する方式の変位計である．測定値として得られるのは電圧値であるが，変位と電圧の関係 1.6 V/mm に基づいて測定変位を得る．

DSx を除く各変位計はフレームに固定したステージに取り付けられており，位置調整が可能である．

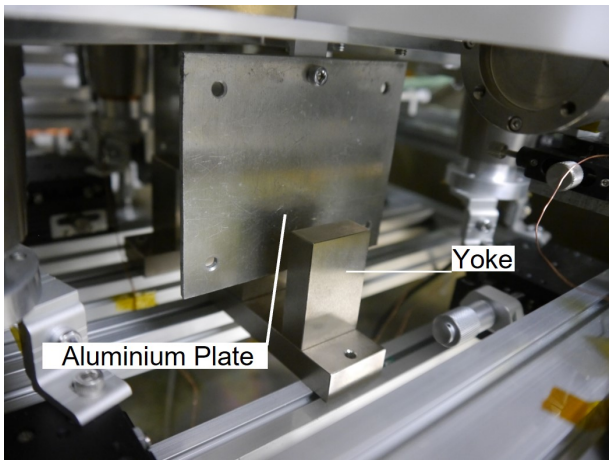


図 2.7: Appearance of the magnetic damper.

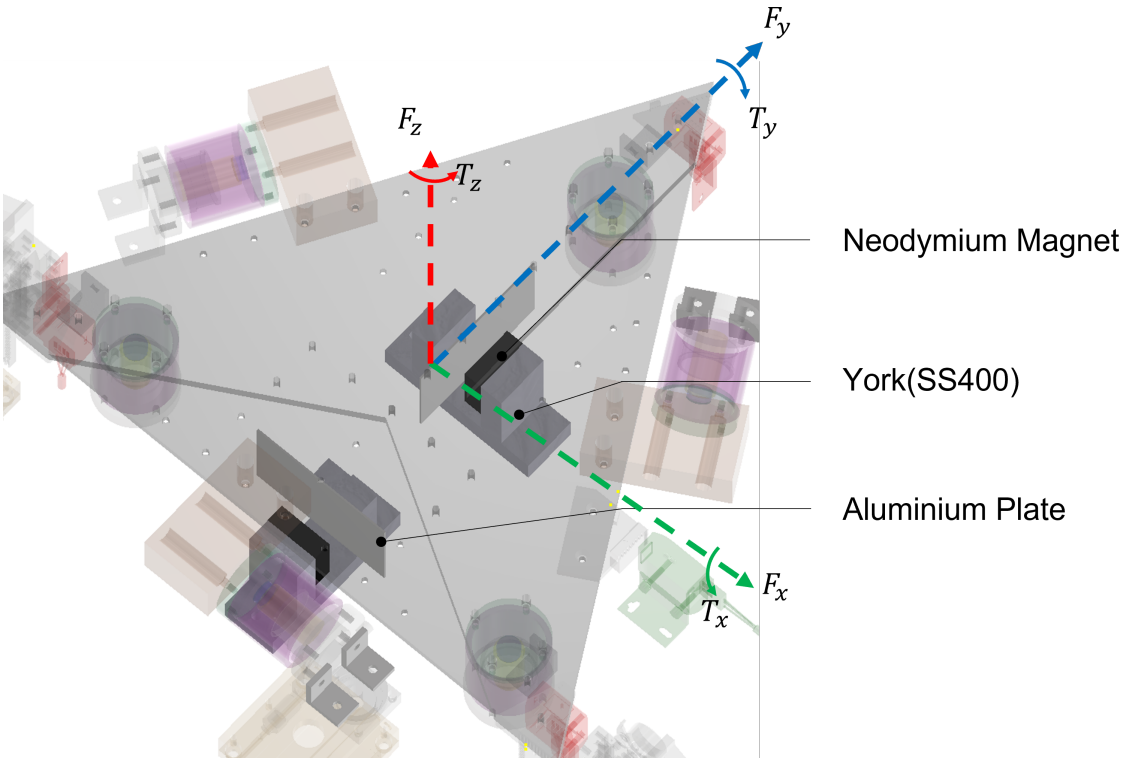


図 2.8: Magnetic damper CAD.Red part: neodymium magnet.

表 2.1: Specification of LED displacement sensor

Maker	OMLON
Model	Z4D-F04A
Range of Detection	4 ±1.25 mm
Response time	5 ms
Resolution	5 μm
Output	1-5 V, (1.6 V/mm ±10%)

VCM

スラストスタンド較正のための装置として，6 個の VCM を使用する．それぞれの VCM の断面図を図 2.9，図 2.10 に示す．各 VCM に VCM1，VCM2，VCM3，VCM4，VCM5，VCM6 と名前を付ける．本スラストスタンドの VCM は可動ヨーク型で，導線のあるコイル部が実験室に固定されている．コイル部は粗動ステージに取り付けられており，水平方向に位置を調整することができる．VCM の配置の CAD 図を図 2.11 に示す．

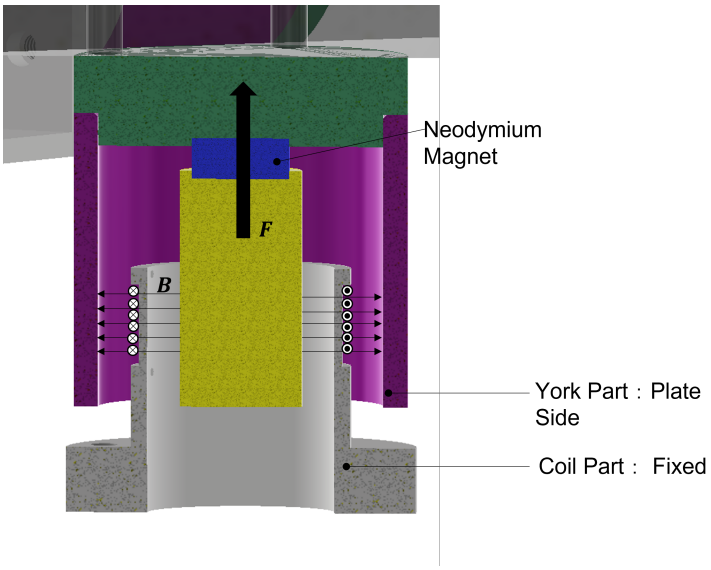


図 2.9: VCM Vertical Cross Section

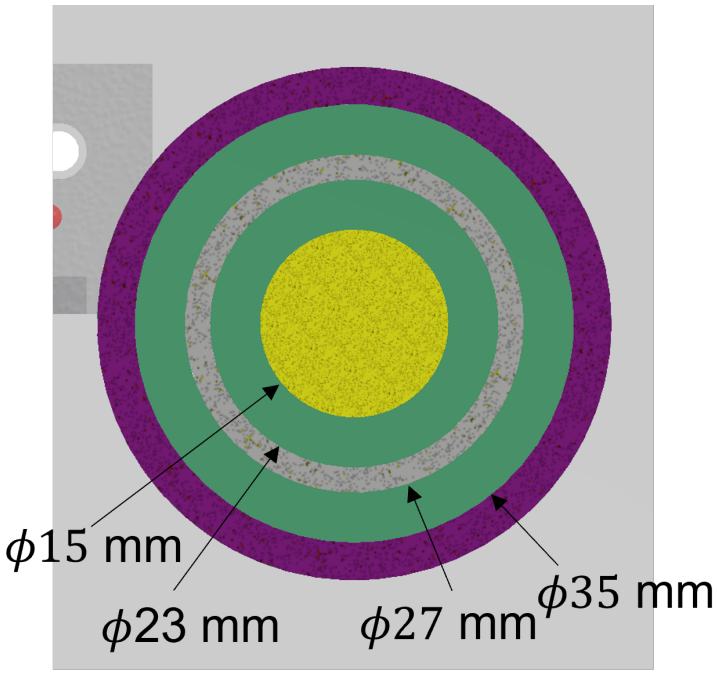


図 2.10: VCM Horizontal Cross Section

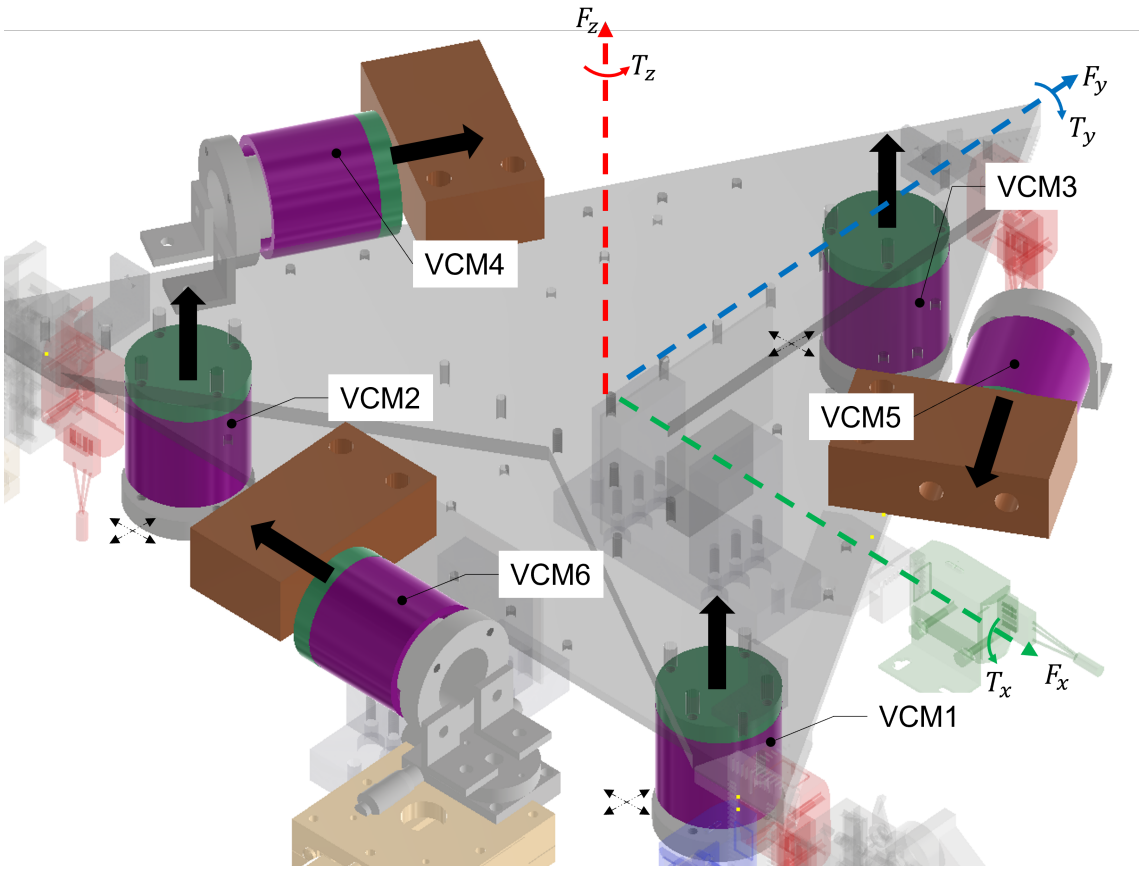


図 2.11: VCM placement CAD.

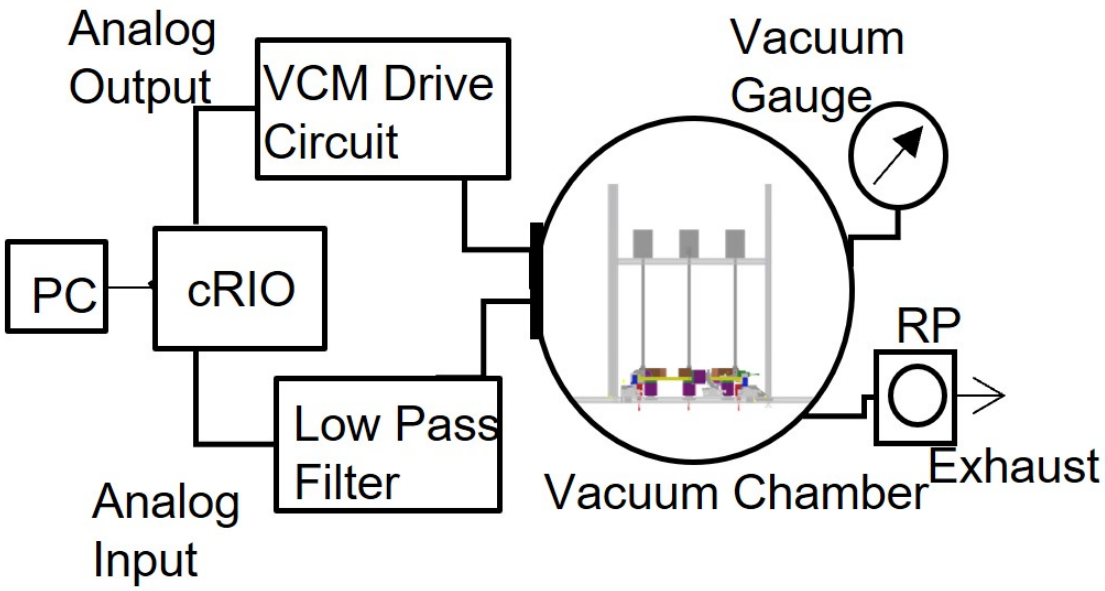


図 2.12: Schematic of the experiment system.

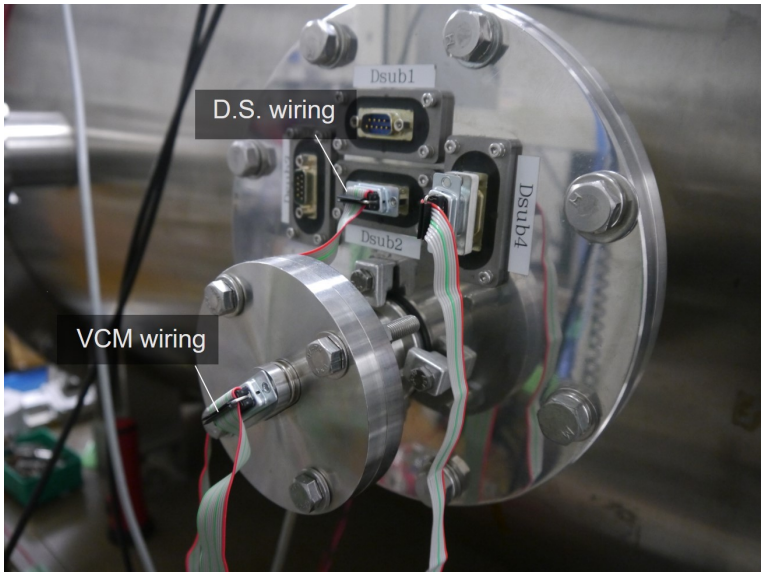


図 2.13: Feeding wires through the vacuum barrier

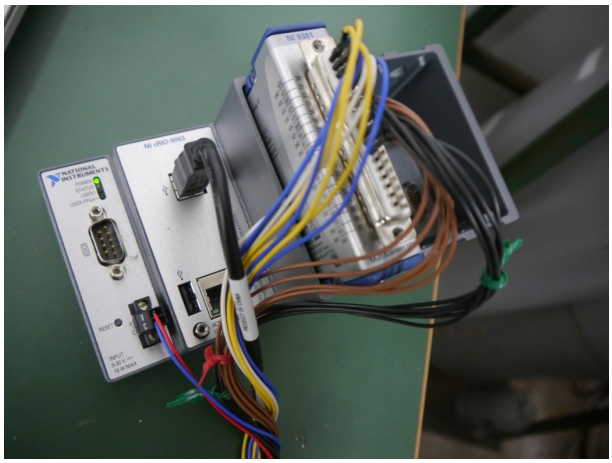


図 2.14: Appearance of Compact RIO System

スラストスタンド本体を含む実験系の概略図を図 2.12 に示す．スラストスタンドは真空チャンバ内に配置し，VCM および変位計の配線は真空フランジ上の端子で導入する (図 2.13)．図 2.12 中の cRIO はナショナルインスツルメンツ社の組み込みコントローラ CompactRIO システムである．本実験で使用する cRIO を図 2.14 に示す．cRIO は NI-cRIO-9063 を使用し，入出力を行うモジュールとして NI9381 を使用する．VCM への出力，変位測定値の記録は cRIO を介してノート PC の LabView プログラムで行う．ノート PC と cRIO は USB ケーブルで接続されている．変位計の測定値はローパスフィルタを介して cRIO に入力される．

真空導入端子を図 2.13 に示す．

2.3.2 VCM 駆動回路

VCM 駆動回路は，cRIO で出力された電圧信号を入力とし，電流を出力する増幅回路と，コイルに流す電流の向きを切り替える 2 極双投トグルスイッチからなる．VCM 駆動回路の回路図を図 2.15 に示す．LabView で設定された電圧の信号が Input に入力され，オペアンプを利用して反転増幅される．オペアンプは出力イン

ピーダンスが低く，コイルに十分な電流を流すことができないので，4 個のトランジスタを使うダイヤモンドバッファを利用する．

図 2.16 にケースの蓋を外した実際の VCM 駆動回路を示す．2 回路入りのオペアンプを 3 個使用して VCM6 個分の駆動回路としている．オペアンプの ±15 V 電源および GND の配線を外部から接続し，cRIO からの入力，VCM への出力は Dsub 端子で行う．

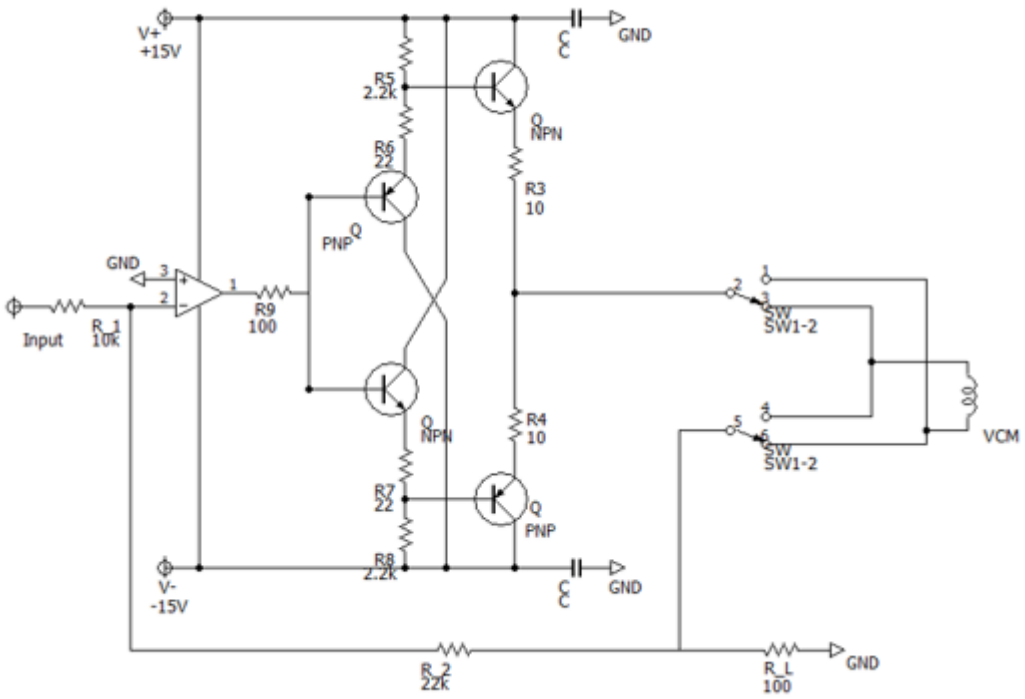


図 2.15: Schematic of VCM drive circuit

2.3.3 ローパスフィルタ

変位計測定値の高周波ノイズを減衰させるために，RC ローパスフィルタを使用する．カットオフ周波数は 3.3 Hz で，22 kΩ の抵抗と，2.2 μF の電解コンデンサを使用している．

ローパスフィルタを図 2.17 に示す．図の右側から変位計測定値の信号が入力され，左側から cRIO に出力する．

2.3.4 真空系

本論文の実験において真空引きでは，アルバック社のロータリーポンプ (RP)VD401(図 2.18) を使用した．真空計はファイファーバキューム社のピラニ真空計 PKR251(図 2.19) を使用した．RP と真空計の諸元を表 2.2，表 2.3 に示す．真空計測定値はグラフテック株式会社の GL840 を使用して記録した．

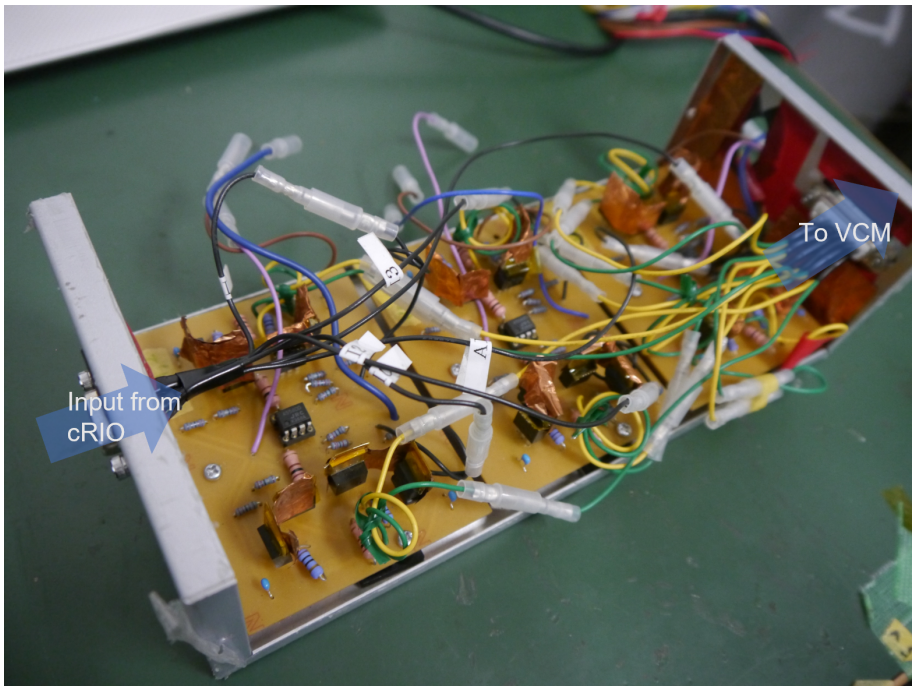


図 2.16: Appearance of VCM drive circuits

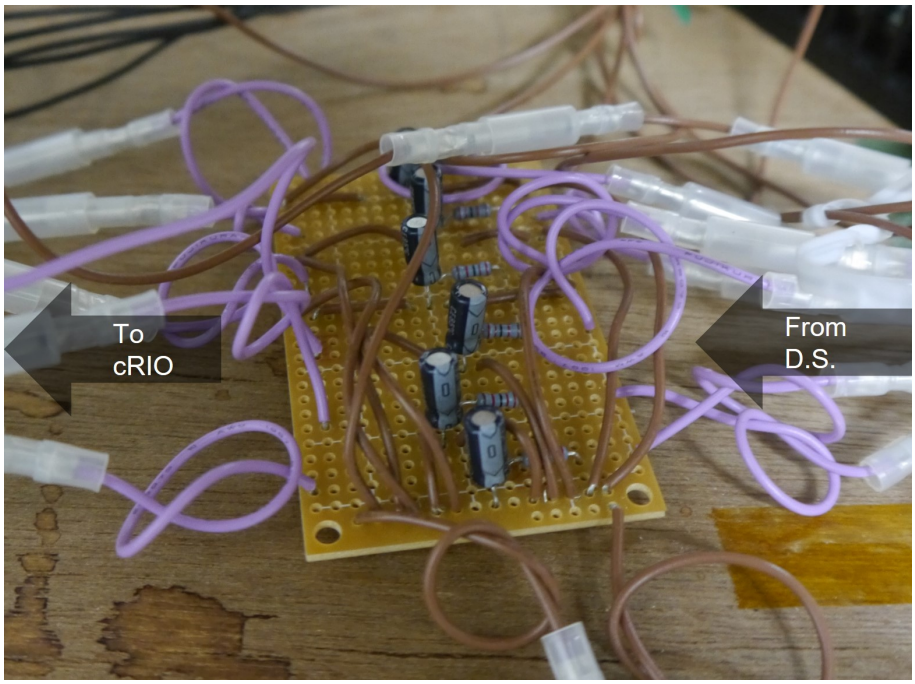


図 2.17: Appearance of Low Pass Filter.The signals of displacement sensors are input from the right side.

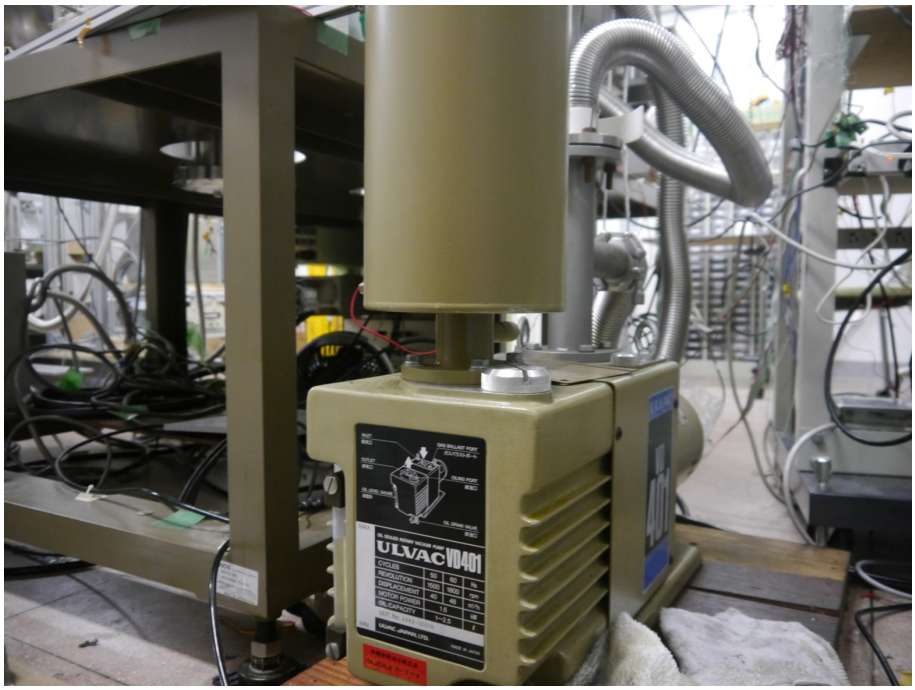


図 2.18: Appearance of rotary pump.

図 2.19: Appearance of Vacuum gauge.

表 2.2: Specification of rotary pump.

Maker	ULVAC COMPANY
Model	VD401
Exhaust rate	670 L/min
Reached pressure	0.67 Pa
System of motor	3 phase motor protected from droplet
Power of motor	1.5 kW,200 V

表 2.3: Specification of vacuum gauge

Maker	PFEIFFER
Model	PKR251
Range of measurement	5.0×10^{-9} Pa
Accuracy	<30 %
Reproducibility	$< 5\%$
Output Voltage	0-10.5 V

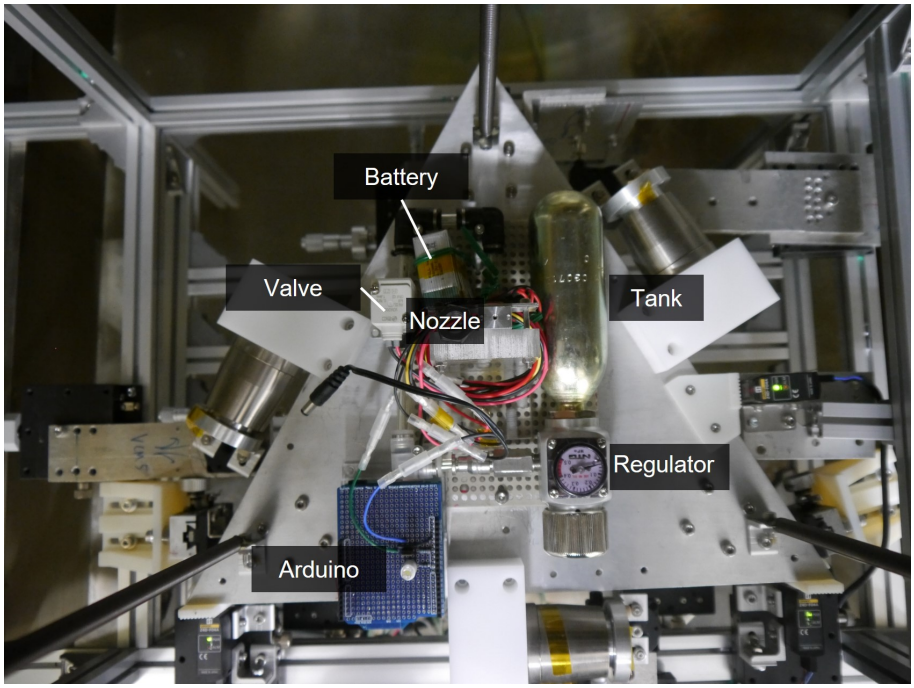


図 2.20: The cold gas thruster module placement on the plate. Battery is not connected to Arduino in this picture.

2.3.5 コールドガスジェットモジュール

本実験で噴射実験を行うために使用した装置が，二酸化炭素 (CO_2) を推進剤とするコールドガスジェット (CGJ) モジュールである．図 2.20 にプレートに置いた CGJ モジュールを示す．モジュールは CO_2 タンクとレギュレータ，電磁バルブおよび各部をつなぐ配管，マイコン Arduino とリチウムイオン電池からなる．

電磁バルブの開閉は，チャンバ外部から Wi-Fi を利用してスマートフォンアプリで行う．したがって，チャンバ内外の配線の影響を排除できる．6 個のリチウムイオン電池を束にして，Arduino およびバルブ駆動の電源とする．

CGJ のノズルは，スロート径 1.3 mm，出口径 2.5 mm のコニカルノズルである．

2.3.6 電子天秤

CGJ モジュールの質量を測定に用いた電子天秤は，アズワン社 IB-1K である (図 2.21)．電子天秤の諸元を表 2.4 に示す．

表 2.4: Specification of electronic balance

Maker	AS ONE Corporation
Model	IB-1K
Maximum Weight	1000 g
Minimum Display	0.1 g
Reproducibility (σ)	0.1 g

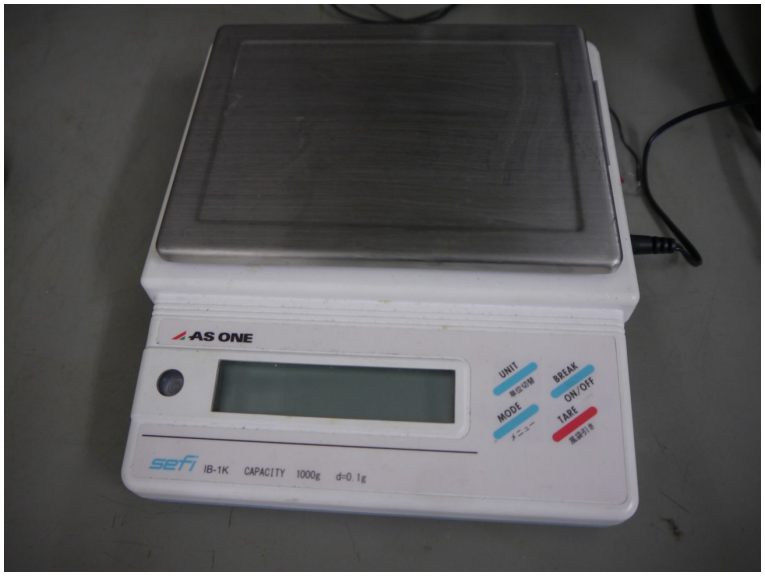


図 2.21: Appearance of electric balance

2.4 スラストスタンド較正方法

2.4.1 合力，合トルク

VCM を用いてプレートに既知の力，トルクを加える方法を述べる．図 2.22 のように，VCM1，VCM2，VCM3 で加える力の正の向きを鉛直上向き，VCM4，VCM5，VCM6 で加える力の正の向きをプレート表面からみて時計周りとする．各 VCM で加える力の値 (スカラー量) を $F_n, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ とする．各 VCM で加える力のベクトルを

$$\boldsymbol{F}_1 = (0\boldsymbol{e}_1^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 1\boldsymbol{e}_3^{(0)})F_1 \tag{2.121}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = (0\boldsymbol{e}_1^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 1\boldsymbol{e}_3^{(0)})F_2 \tag{2.122}$$

$$\boldsymbol{F}_3 = (0\boldsymbol{e}_1^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 1\boldsymbol{e}_3^{(0)})F_3 \tag{2.123}$$

$$\boldsymbol{F}_4 = (\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_3^{(0)})F_4 \tag{2.124}$$

$$\boldsymbol{F}_5 = (\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_3^{(0)})F_5 \tag{2.125}$$

$$\boldsymbol{F}_6 = (-1\boldsymbol{e}_1^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_2^{(0)} + 0\boldsymbol{e}_3^{(0)})F_6 \tag{2.126}$$

と表せる．

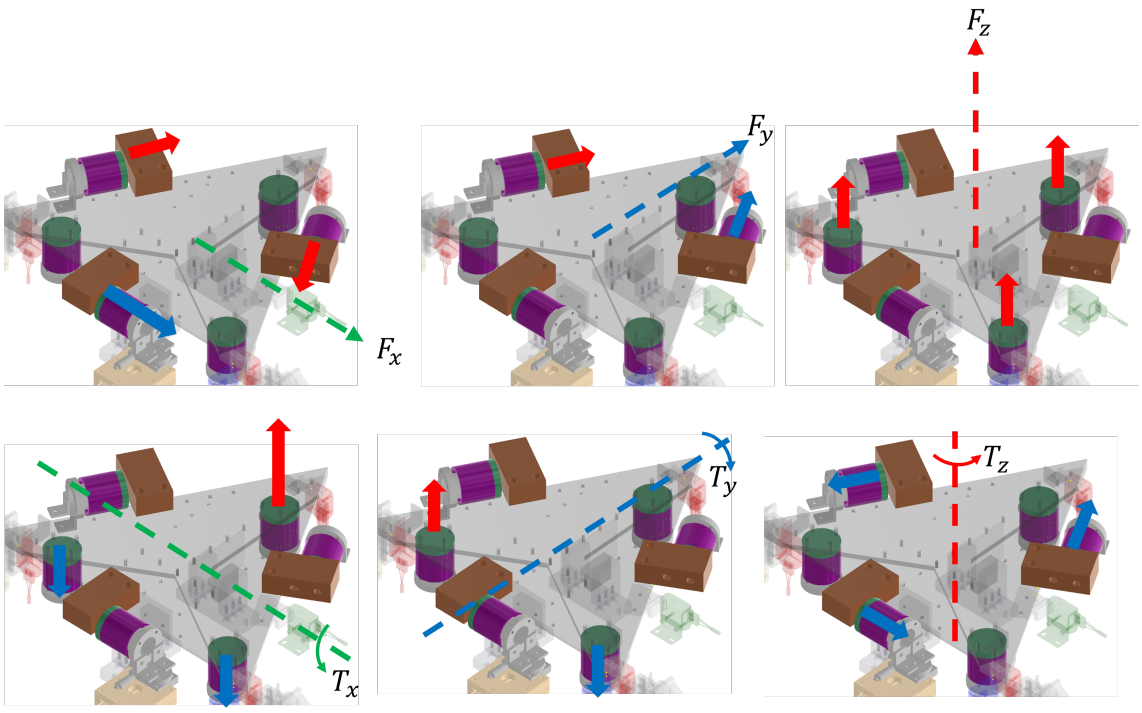


図 2.22: Definition of VCM force direction

以上より，VCM で加える並進方向の合力 $\boldsymbol{F}$ は，

$$\boldsymbol{F} = \sum_{n=1}^{6} \boldsymbol{F}_{\mathrm{n}} \tag{2.127}$$

で与えられる．次に，VCM の電磁力による合トルクを表す．プレート幾何中心からみた VCM n の電磁力作用点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_n$，重心のベクトルを $\boldsymbol{c}$ として，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \sum_{n=1}^{6} (\boldsymbol{r}_{n-c} \times \boldsymbol{F}_n) \\ \boldsymbol{r}_{n-c} &\equiv \boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{2.128}$$

である．ここで，$\boldsymbol{r}_{n-c} \times \boldsymbol{F}_n$ のクロス積において，

$$\boldsymbol{r}_{n-c} \times \boldsymbol{F}_n = (r_{n-c,1}^{(R)} \boldsymbol{e}_1^{(R)} + r_{n-c,2}^{(R)} \boldsymbol{e}_2^{(R)} + r_{n-c,3}^{(R)} \boldsymbol{e}_3^{(R)}) \times (F_{1,1}^{(0)} \boldsymbol{e}_1^{(0)} + F_{1,2}^{(0)} \boldsymbol{e}_1^{(0)} + F_{1,3}^{(0)} \boldsymbol{e}_3^{(0)}) \tag{2.129}$$

のように，座標系が異なっている．これを

$$\begin{aligned} r_{n-c,1}^{(R)} \boldsymbol{e}_1^{(R)} + r_{n-c,2}^{(R)} \boldsymbol{e}_2^{(R)} + r_{n-c,3}^{(R)} \boldsymbol{e}_3^{(R)} &= \begin{pmatrix} r_{n-c,1}^{(R)} & r_{n-c,2}^{(R)} & r_{n-c,3}^{(R)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(R)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(R)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{n-c,1}^{(R)} & r_{n-c,2}^{(R)} & r_{n-c,3}^{(R)} \end{pmatrix} \mathcal{R}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{e}_3^{(0)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.130}$$

と変換する必要があるが，スタンド較正を行う際の初期姿勢は慣性座標に一致，すなわち，

$$\mathcal{R}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

であると仮定する．

2.4.2 電磁力較正

VCM の電磁力と LabView 設定電圧値の関係を述べる．各 VCM の電磁力の大きさ $|F_n|, (n = 1, 2, 3, ..., 6)$ を要素に持つベクトルを $\boldsymbol{F}_{\mathrm{VCM}}$ とする．VCM の電磁力は，6×6 対角行列 α と，各 VCM に流す電流を要素に持つベクトル $\boldsymbol{i}$ により

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{VCM}} = \alpha \boldsymbol{i} \tag{2.132}$$

と表せることが期待される．実際にはコイルの巻き方などによって電流と電磁力の係数は異なる．そこで，各 VCM 単体で，電流と電磁力の関係を求める電磁力較正試験が行われた [58].

LabView で設定する電圧値を要素に持つベクトルを $\boldsymbol{V}$ とすると，$\boldsymbol{i}$ との関係が 6×6 対角行列 β

$$\boldsymbol{i} = \beta \boldsymbol{V} \tag{2.133}$$

と表せるので，各 VCM の電磁力の大きさは

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{VCM}} = \alpha \beta \boldsymbol{V} \tag{2.134}$$

で得られる．LabView での設定電圧と電流の比は，VCM 駆動回路上でテスターを使用することにより求めた．各 VCM の電流と LabView 設定電圧比，電磁力と電流の比を表 2.5 に示す．

表 2.5: Ratio of LabView set voltage and VCM current, and ratio of VCM electromagnetic force and VCM current

	Current to Voltage ratio mA/V	Force to Current ratio N/A
VCM1	22.168	0.17431
VCM2	22.031	0.16360
VCM3	22.216	0.16495
VCM4	22.326	0.17625
VCM5	22.141	0.14832
VCM6	22.338	0.17683

2.4.3 各方向の較正

VCM の電磁力を組み合わせて F_x,F_y,F_z,T_x,T_y,T_z の各方向の較正を行う．合力, 合トルクは (2.127)(2.128) に基づいて決定されるので，目的とする方向の力，トルク以外が打ち消しあうような力を加える．表 2.6 に較正時に設定する電圧の比を示す．ただし，LabView で負の電圧信号を設定することはできないため，トグルスイッチによって電流の向きを切り替える．

スタンド較正では，30 秒ごとに入力電圧をステップ的に増加させ，5 段階目に達したら，ステップ的に減少させる，という操作を 1 セットとする．表 2.6 において 1 または -1 が記入されている VCM において，電圧値の増加の幅を基準電圧とよぶ．F_x, T_x の基準電圧を 0.4 V，F_y, F_z, T_y, T_z の基準電圧を 0.8 V とする．このとき例えば，F_x 較正において VCM1 駆動回路には 0.4-2.0 V，F_z 較正において VCM1 駆動回路には 0.8-4.0 V が入力される．

表 2.6: Ratio of input voltage

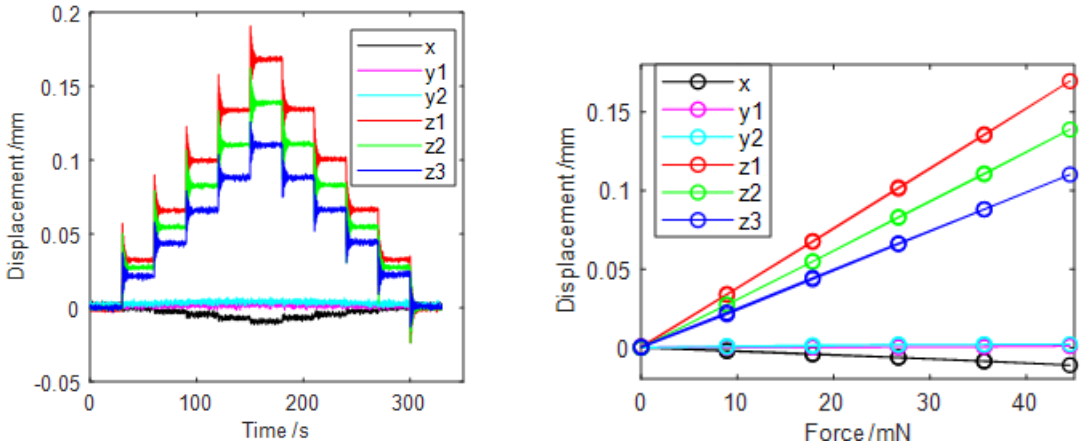
	VCM1	VCM2	VCM3	VCM4	VCM5	VCM6
F_x	0	0	0	1	1	-2
F_y	0	0	0	1	-1	0
F_z	1	1	1	0	0	0
T_x	-1	-1	2	0	0	0
T_y	-1	1	0	0	0	0
T_z	0	0	0	-1	-1	-1

2.4.4 重回帰分析

較正で得られる典型的な波形として F_z 較正を行った場合の例を図 2.23a に示す．この波形に対して 30 秒の各区間ごとで平均値をとり，横軸を F_z にとると図 2.23b が得られる．

ここで，スタンド較正の目的は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{T} \end{pmatrix} = B\boldsymbol{D} \tag{2.135}$$



(a) Waveform of F_z calibration

(b) Averaged displacement to input force F_z

図 2.23: Typical waveform of calibration and displacement to input

の係数 B を求めることである．$\boldsymbol{D}$ の成分は各変位計の測定変位

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_{\mathrm{x}} \\ D_{\mathrm{y1}} \\ D_{\mathrm{y2}} \\ D_{\mathrm{z1}} \\ D_{\mathrm{z2}} \\ D_{\mathrm{z3}} \end{pmatrix} \tag{2.136}$$

である．図 2.24 のように，スタンド較正において入力した力，トルクを目的変数，各変位の平均値を説明変数

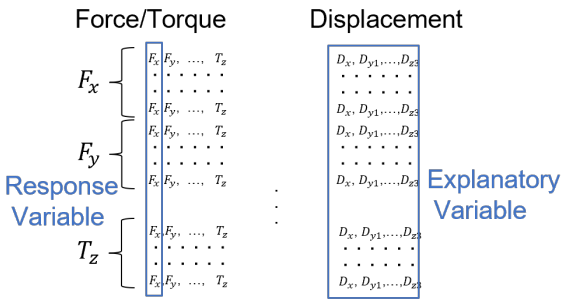


図 2.24: Data selection of multiple linear regression

として重回帰分析を行う．重回帰分析の結果，力，トルクを各変位計の測定変位で表す 6 本の回帰式が得られる．この回帰式は (2.135) の成分を書き下したものと等しいので，重回帰分析で得られる係数を B_{ij} として，

$$F_x = B_{11}D_x + B_{12}D_{y1} + B_{13}D_{y2} + B_{14}D_{z1} + B_{15}D_{z2} + B_{16}D_{z3} \tag{2.137}$$
$$F_y = B_{21}D_x + B_{22}D_{y1} + B_{23}D_{y2} + B_{24}D_{z1} + B_{25}D_{z2} + B_{26}D_{z3} \tag{2.138}$$
$$F_z = B_{31}D_x + B_{32}D_{y1} + B_{33}D_{y2} + B_{34}D_{z1} + B_{35}D_{z2} + B_{36}D_{z3} \tag{2.139}$$
$$T_x = B_{41}D_x + B_{42}D_{y1} + B_{43}D_{y2} + B_{44}D_{z1} + B_{45}D_{z2} + B_{46}D_{z3} \tag{2.140}$$
$$T_y = B_{51}D_x + B_{52}D_{y1} + B_{53}D_{y2} + B_{54}D_{z1} + B_{55}D_{z2} + B_{56}D_{z3} \tag{2.141}$$
$$T_z = B_{61}D_x + B_{62}D_{y1} + B_{63}D_{y2} + B_{64}D_{z1} + B_{65}D_{z2} + B_{66}D_{z3} \tag{2.142}$$

と表せる．

2.5 コールドガスジェット噴射実験

2.5.1 実験手順

実験は以下の手順で行った.

1. CGJ レギュレータ圧をゲージ圧 0.025 MPa に設定.
2. 電子天秤で CGJ モジュール質量測定.
3. CGJ モジュールをプレートに置き，変位計位置等を調整.
4. 真空引き開始.
5. 各方向でスタンド較正.
6. CGJ 噴射.
7. 真空チャンバ大気解放.
8. 電子天秤で CGJ モジュール質量測定.

質量測定

CGJ モジュール質量測定では，Arduino とリチウム電池を除く部分の質量を測定した．噴射前の質量測定は大気圧下において，5-10 分間隔で約 90 分間行った．大気解放の後，噴射前と同様に，5-10 分間隔で 90 分にわたって質量測定を行った．噴射後最初の質量測定は，噴射前最後の質量測定の約 2 時間後に行った.

スタンド調整

スタンド較正や噴射による変位変動を正しく測定できるように，真空引き前にスタンドの各部を調整する必要がある．スタンド調整において，調整の対象となるのは，CGJ モジュールを置く位置，バネ上端の位置，VCM コイル部の位置，変位計の位置である.

CGJ モジュールは図 2.20 のように, ノズルの軸がプレートの中心付近に，タンクが奥側になるように置く．プレートに搭載する物の質量によっては，VCM4,VCM5,VCM6 のコイル部とヨーク部が接触する場合がある．そのような場合は，バネ上端のステージを動かして，コイルとヨークの中心軸が近くなるように平衡点をずらす．また，底面側の VCM1,VCM2,VCM3 においてもコイル部とヨーク部の位置を確認し，接触しそうであればコイル部のステージを動かして調整する．以上を調整した後，変位計測定値の測定値の範囲が 1-5 V なので，測定値が 3 V 付近になるように変位計の位置を調整する．最後に，VCM を使ってインパルス応答を与え，想定通りの波形が観測できることをもって調整の完了とする.

2.5.2 実験条件

レギュレータ圧は，ゲージ圧で 0.025 MPa とした．スタンド較正において，スタンドの幾何中心と重心が一致する ($\boldsymbol{c} = 0$) という仮定をおいた．変位計測定値の記録間隔は 100 ms とした．CGJ 噴射は約 20 秒間行った.

第 3 章

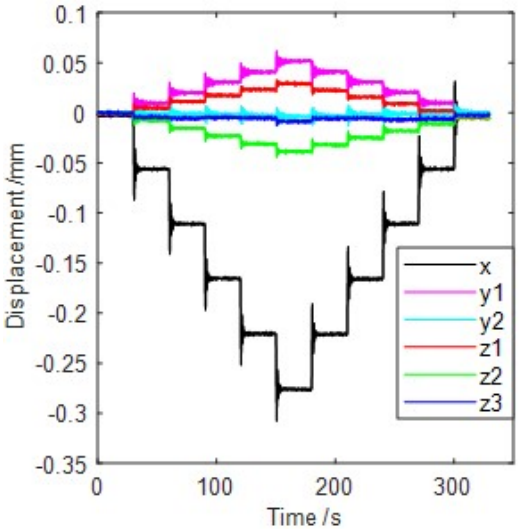
結果

3.1　スラストスタンド較正

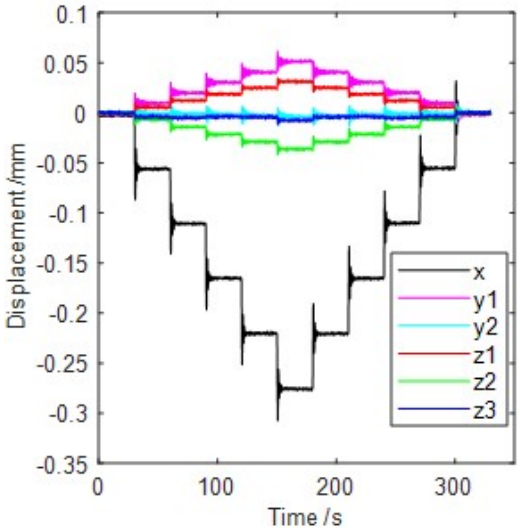
スラストスタンド較正結果を示す．図 3.1，図 3.1，図 3.1，図 3.1，図 3.1，図 3.1 に各方向の較正で得られた波形と，線形トレンドを除去した波形を示す．変位計測定値は電圧値として得られる．図に示すのは，測定値の時間履歴データにおいて初期値との差分をとり，変位計の電圧と距離の関係 1.6 V/mm に従って変換した測定変位である．

各方向の較正で得られた波形が図 3.1a，図 3.2a, 図 3.3a, 図 3.4a, 図 3.5a, 図 3.6a である．どの方向の較正も，力，トルクの入力に対して過渡応答を示し，30 秒間で振動が収束しているが，T_z 較正では振動の収束が遅い．これは磁気ダンパのアルミプレートが zx 平面，yz 平面に平行であり，z 軸まわりの回転に対してはダンパの効果が弱いからである．

較正波形の中で，図 3.3a, 図 3.4a, 図 3.5a，すなわち F_z，T_x，T_y 較正において，比較的大きい右肩下がりのドリフトがあった．そこで，各較正の各変位の時間履歴から線形トレンドを除去した波形が，図 3.1b，図 3.2b，図 3.3b，図 3.4b，図 3.5b，図 3.6b である．F_z，T_x 較正では，線形トレンドの除去によりドリフトが改善した．しかし，図 3.5b では，第 5 区間 (150 秒から 180 秒) の区間で右肩下がりのドリフトが残った．これは変位ドリフトの要因が時間に対して非線形であることを示す．また，線形トレンドを除去する処理において，較正終了時の変位を 0 にするようなフィッティングはしていない．したがって，図 3.5b では較正が終了する 330 秒において，DSz1 の測定変位 D_{z1} が 0 より大きくなっている．本実験では，線形トレンドを除去した波形を用いて較正時の変位平均値を算出した．

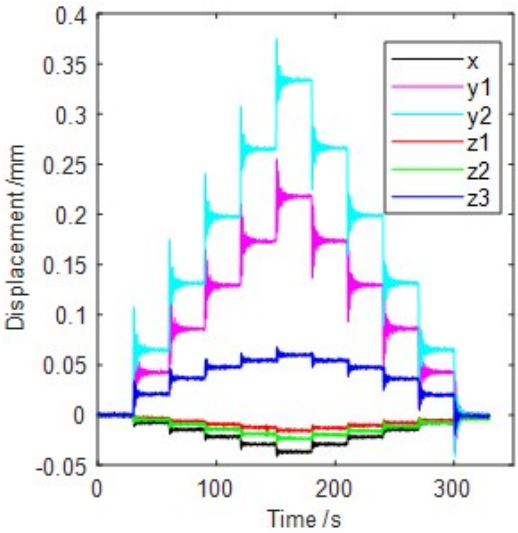


(a) Time history

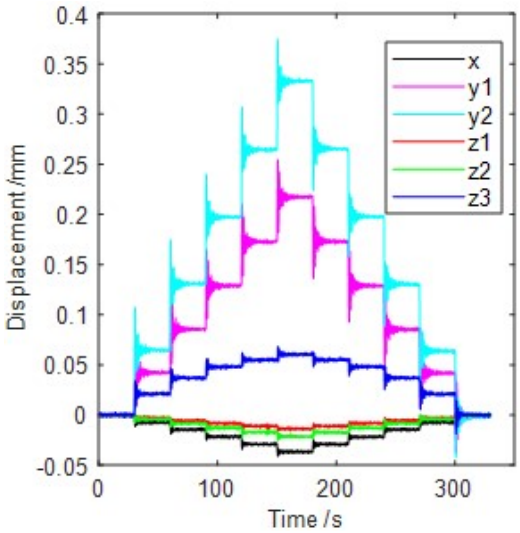


(b) Detrended Time history

図 3.1: F_x:Calibration waveform

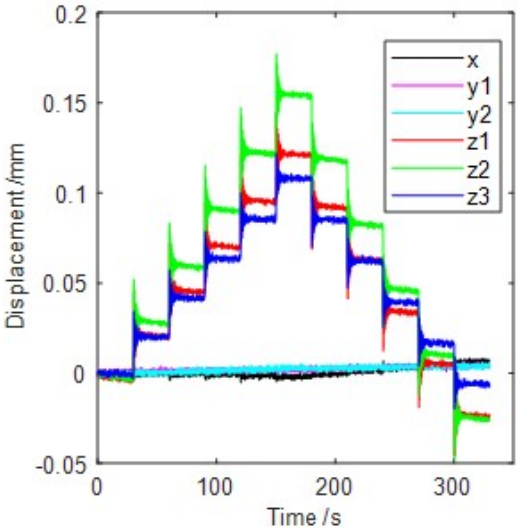


(a) Waveform

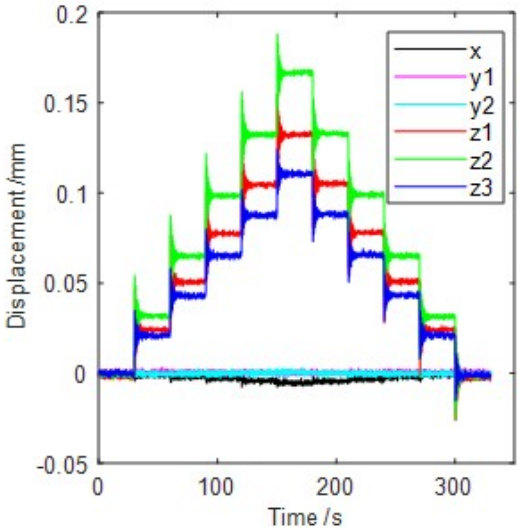


(b) Waveform

図 3.2: F_y:Calibration waveform

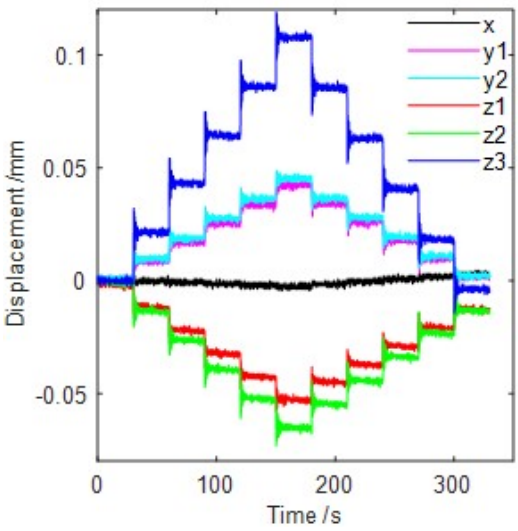


(a) Waveform

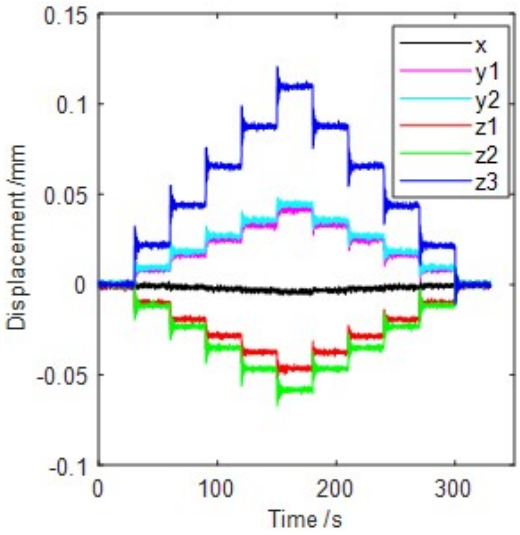


(b) Waveform

図 3.3: F_z:Calibration waveform

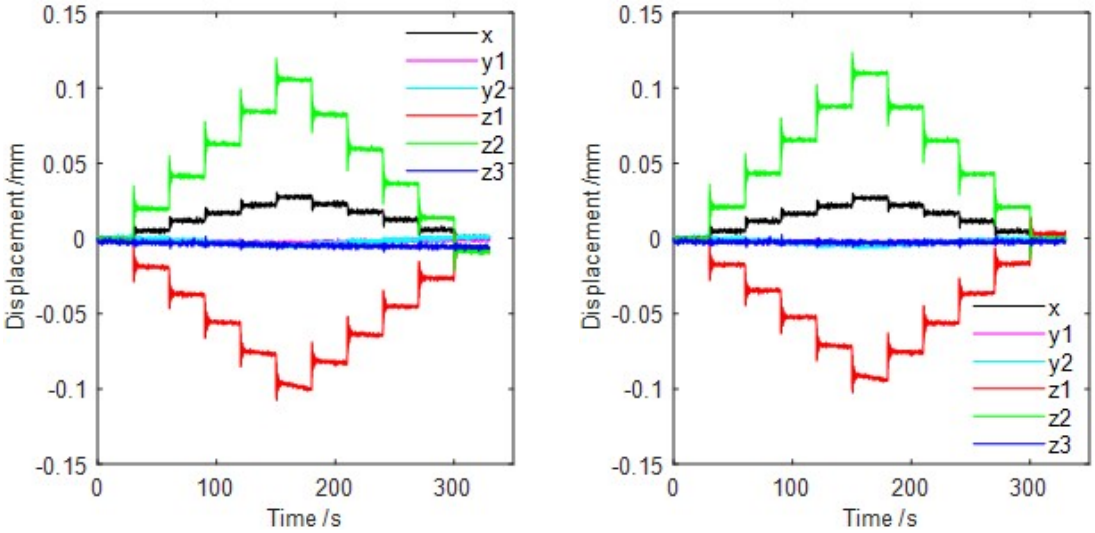


(a) Waveform



(b) Waveform

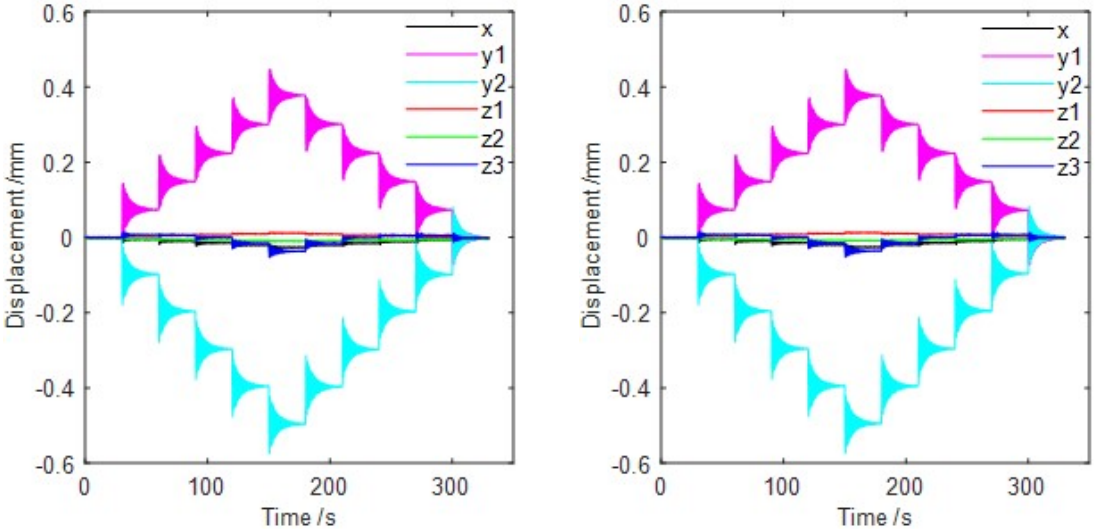
図 3.4: T_x:Calibration waveform



(a) Waveform

(b) Waveform

図 3.5: T_y:Calibration waveform



(a) Waveform (b) Waveform

図 3.6: T_z:Calibration waveform

各較正時の，入力した力，トルクに対する変位の平均値を図 3.7，図 3.8，図 3.9，図 3.10，図 3.11，図 3.12 に示す．

重回帰分析により変位と力，トルクの関係式，

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -88.34 & -4.44 & -2.33 & -14.7 & 9.98 & -1.33 \\ 6.37 & 55.31 & 47.34 & 10.23 & 10.65 & -28.32 \\ -1.60 & -6.68 & -6.39 & 128.00 & 96.58 & 103.69 \\ -1.37 & -3.45 & -3.35 & -9.53 & -6.98 & 21.60 \\ -4.56 & 0.12 & -0.44 & -20.96 & 15.74 & 0.18 \\ 0.57 & 7.94 & -5.34 & 0.38 & 0.11 & -0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\mathrm{x}} \\ D_{\mathrm{y1}} \\ D_{\mathrm{y2}} \\ D_{\mathrm{z1}} \\ D_{\mathrm{z2}} \\ D_{\mathrm{z3}} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

を得た．ただし，右辺の変位 $\boldsymbol{D}$ の単位は mm，左辺の力の単位は mN，トルクの単位は mN·m である．

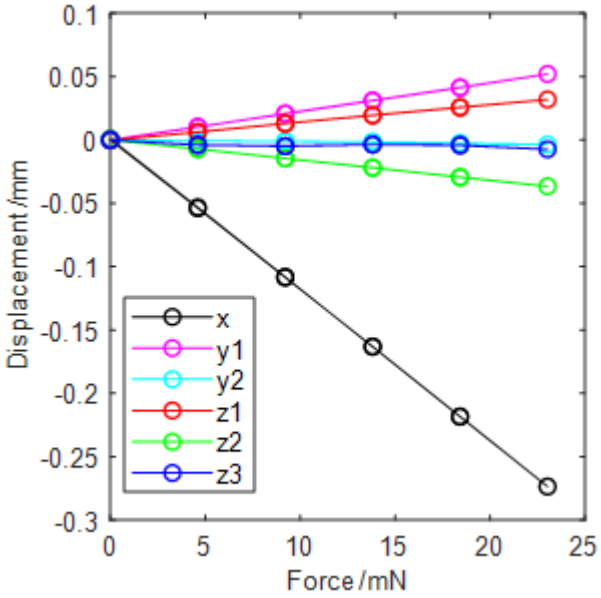


図 3.7: Averaged Fx

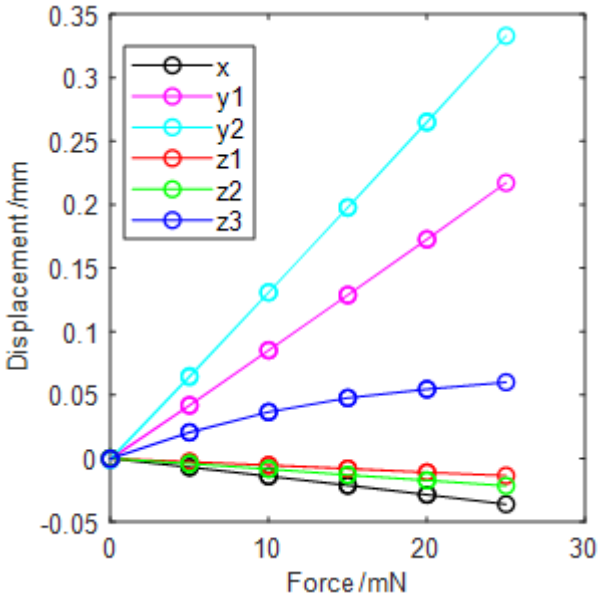


図 3.8: Averaged Fy

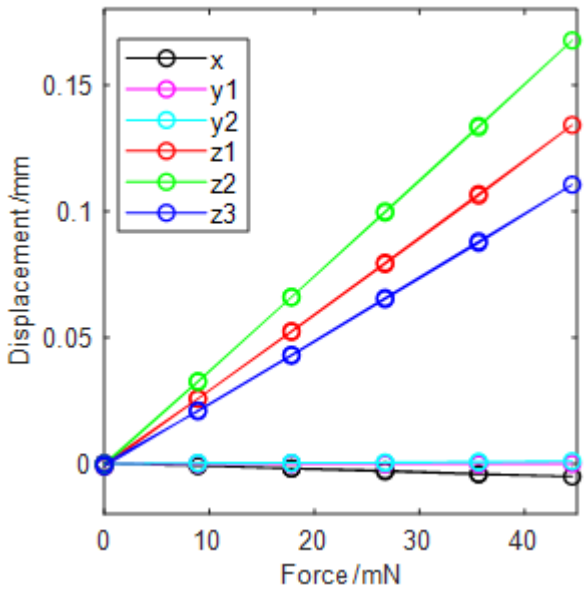


図 3.9: Averaged Fz

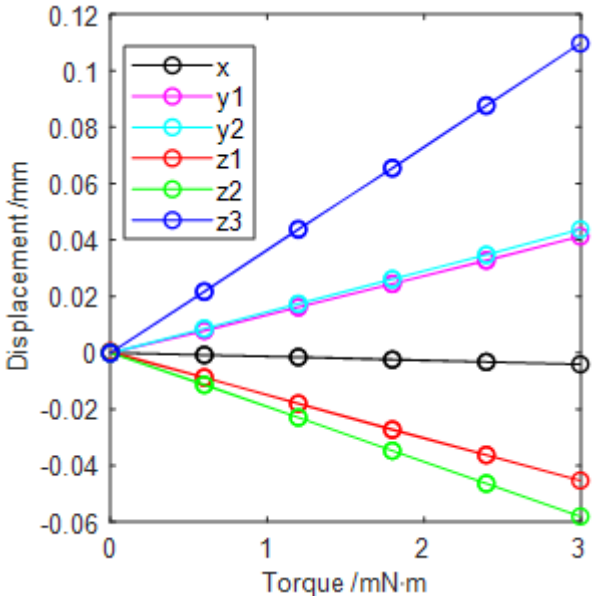


図 3.10: Averaged Tx

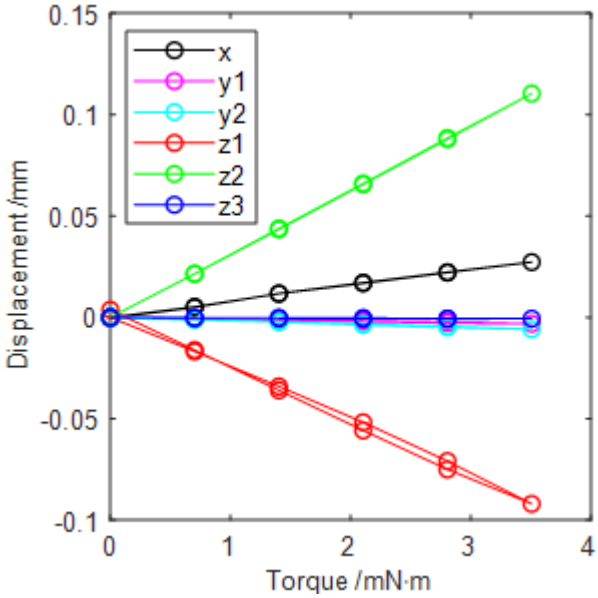


図 3.11: Averaged Ty

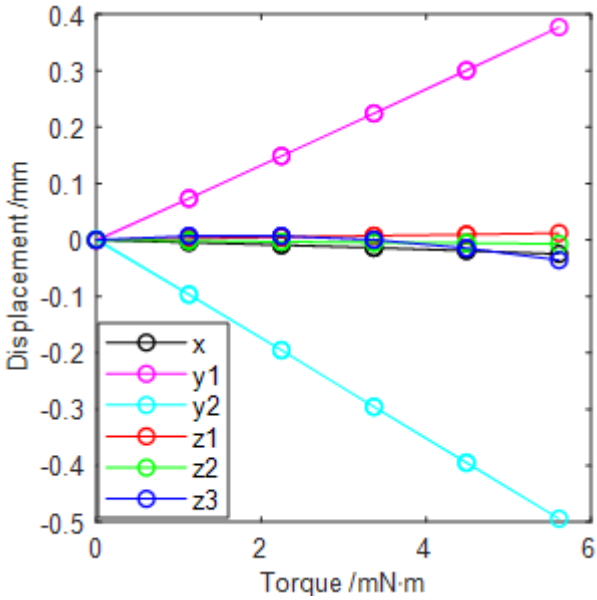


図 3.12: Averaged Tz

3.2 コールドガスジェット噴射実験結果

3.2.1 力，トルク時間履歴

まず，CGJ 噴射を行った際の変位計測定変位の時間履歴を示す．この波形に対して (3.1) を適用し，測定変位を力，トルクに換算した．換算した力を図 3.14 に，トルクを図 3.16 に示す．図 3.15 は図 3.14 の F_x,F_y の波形を抽出したものである．噴射時の F_x，F_y の大きさは 1 mN 以内である．トルクの値に注目すると，T_x，T_y の値は 1 mN·m 以内の変動をしているが，T_z はほとんど値に変化がない．これは CGJ モジュールの重心位置とスラストスタンドの重心位置のずれており，噴射時の推力，推進剤消費質量の変化がトルクとして測定されていることを示唆している．

力，トルクの時間履歴ともに，電磁バルブを開くことによる噴射の開始，閉じることによる噴射の停止に対して過渡応答を示すことを確認できる．

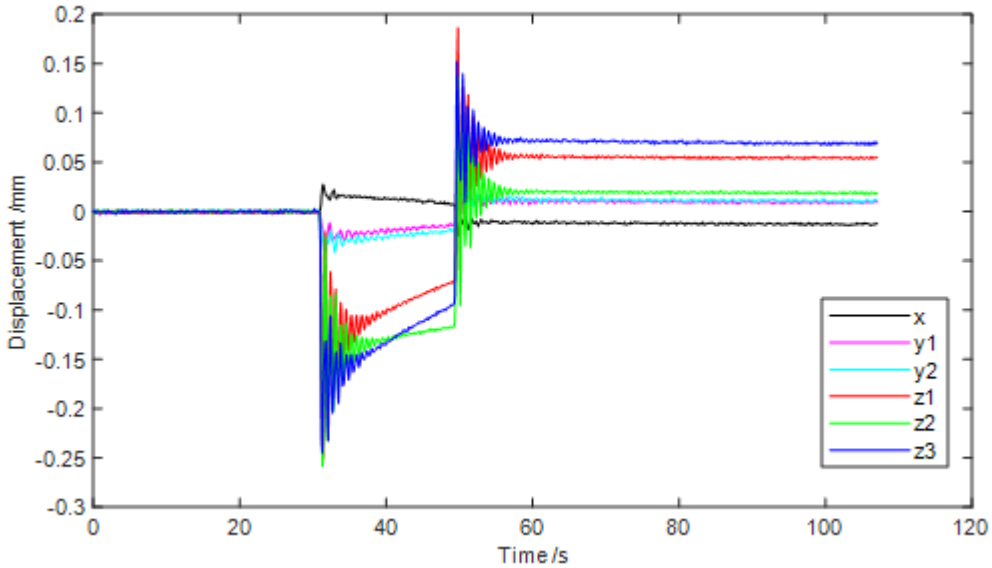


図 3.13: Displacement in a cold gas thruster ejection

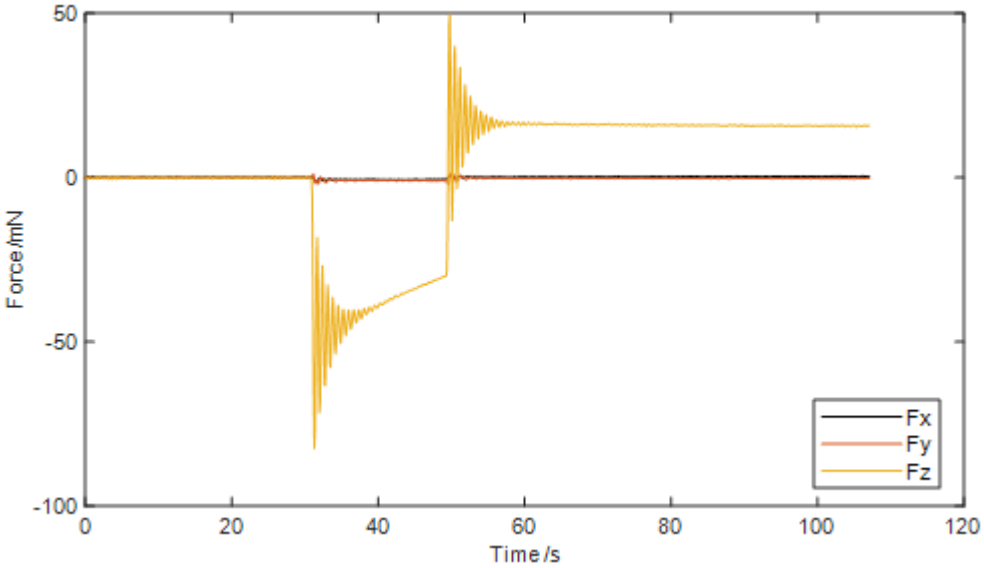


図 3.14: Force of cold gas thruster ejection

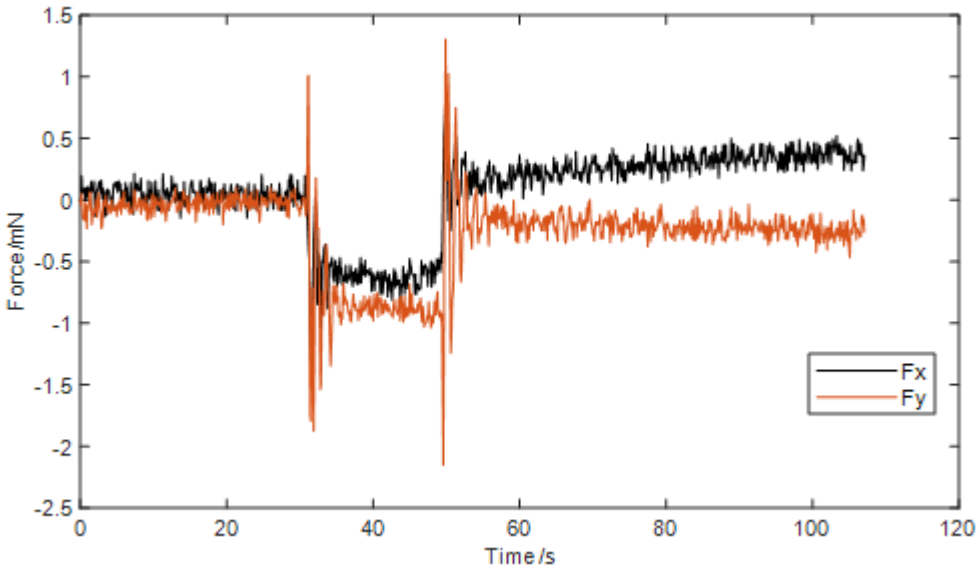


図 3.15: F_x,F_y of cold gas thruster ejection

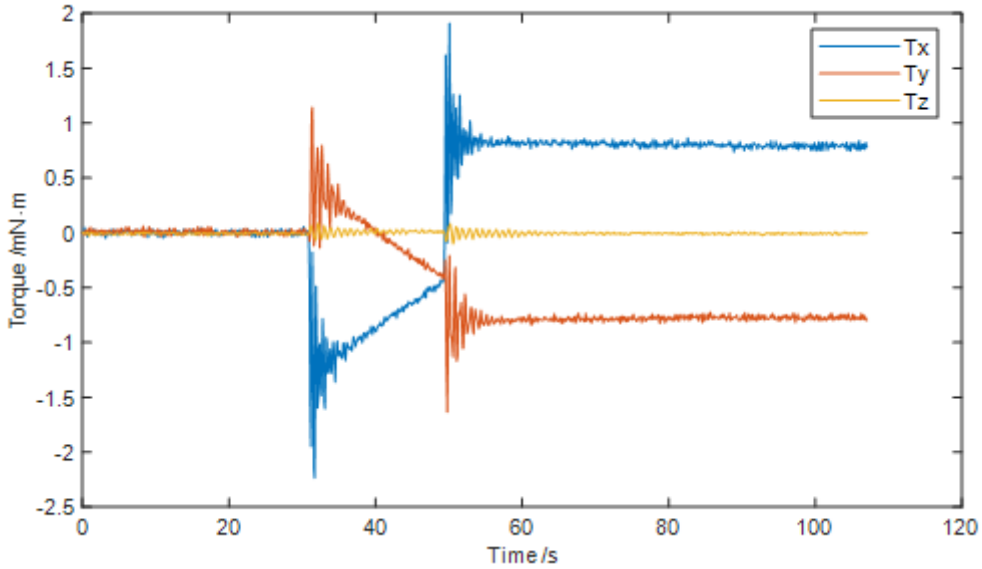


図 3.16: Torque of cold gas thruster ejection

3.2.2 推進剤消費量推定

推進剤消費量と噴射による推力の推定を行う．本実験では，CGJ のノズルは鉛直上向きで，噴射とともに推進剤である CO_2 を消費する．つまり，噴射を行っている間は，噴射により $-z$ 方向の推力が発生すると同時に，推進剤消費に伴ってスラストスタンドの平衡点が移動する．したがって，F_z に着目すると，得られる波形は図 3.17 のように，質量減少と推力の重ね合わせとなる．ただし，図 3.17 は推力，推進剤消費率が一定の場合である．また，実際の波形ではこれに過渡応答が加わる．

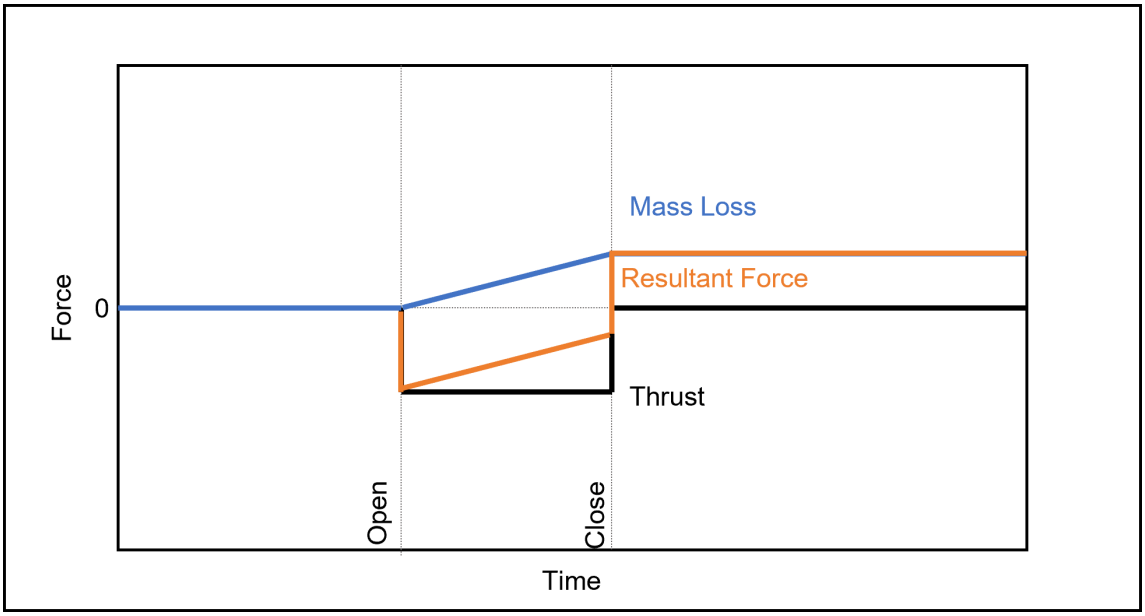


図 3.17: Resultant force

まず，推進剤消費量を推定する．図 3.17 より，噴射前後の F_z の値を比較すれば推進剤消費量を推定できる．図 3.18 のように，F_z の時間履歴のうち，噴射前の約 31 秒間，噴射後約 40 秒間の F_z の平均値を算出した．算出した平均値と，平均値算出に利用した区間の標準偏差を表 3.1 に示す．標準偏差を不確かさとして誤差伝播の法則を利用すると，噴射によって増加した F_z は

$$\begin{aligned}(15.91\ \mathrm{mN} \pm 0.200\ \mathrm{mN}) - (-0.05\ \mathrm{mN} \pm 0.193\ \mathrm{mN}) &= 15.96\ \mathrm{mN} \pm \sqrt{(0.200\ \mathrm{mN})^2 + (0.193\ \mathrm{mN})^2} \\ &= 15.96 \pm 0.277\ \mathrm{mN}\end{aligned} \tag{3.2}$$

である．

表 3.1: Averaged F_z and standard deviation

	Averaged F_z /mN	Standard Deviation /mN
Before Ejection	-0.05	0.193
After Ejection	15.91	0.200

推定した推進剤消費量を，電子天秤の測定質量から求める消費量と比較する．図 3.19 に電子天秤で測定した CGJ モジュール質量の時間履歴を示す．プロットのエラーバーは電子天秤の質量測定の不確かさ (±0.1 g) である．質量測定は大気中で行っており，真空引きは図 3.19 の最初の質量測定から 2 時間ほど経過した時点

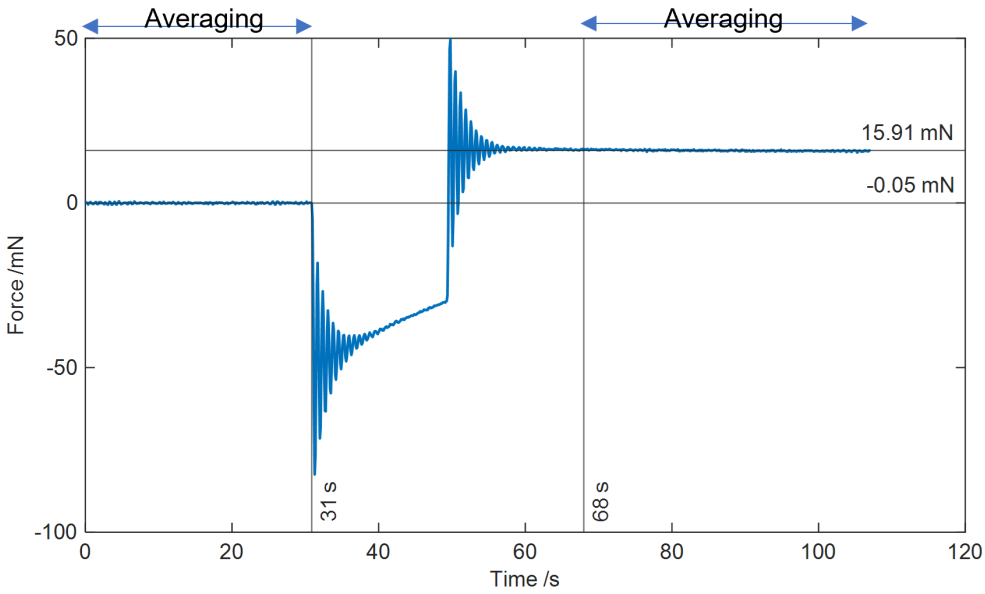


図 3.18: Mass loss estimation.

から開始している．真空引きを行っている間は質量測定を行っていないので，噴射前後の質量履歴から外挿によって，噴射による推進剤消費量を求める．噴射前の質量測定値履歴から求めた線形近似直線は，x を経過時間 (h)，y を質量 (g) として，

$$y = -0.5679x + 835.87 \tag{3.3}$$

である．噴射後の質量測定値履歴から求めた線形近似直線は，

$$y = -0.4374x + 833.88 \tag{3.4}$$

である．それぞれに噴射開始時刻 $x = 3.2711$ を代入すると，噴射前の近似直線から $y = 834.01$ ，噴射後の近似直線から $y = 832.45$ を得る．結局，外挿によって求めた噴射前後の質量差は

$$834.01 \text{ g} - 832.45 \text{ g} = 1.56 \text{ g} \tag{3.5}$$

である．重力加速度 g を 9.81 m/s^2 とすれば，

$$1.56 \text{ g} \times 9.81 \text{ m/s}^2 = 15.30 \text{ mN} \tag{3.6}$$

である．これと，変位計測定変位に回帰式を適用して求めた F_z の定常値の差を比較する．求めた推進剤消費量の推定値は 15.96 ± 0.277 mN である．電子天秤で測定した質量履歴から外挿によって求めた質量差を真の値とすれば，推定値の方が過剰で，残差は 0.66 mN であった．

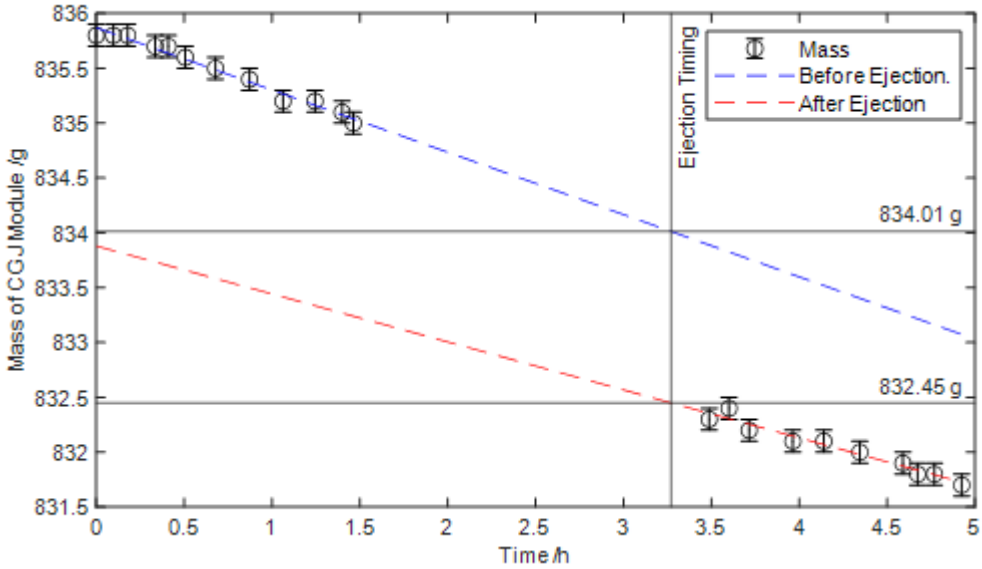


図 3.19: Time history of measured CGJ module mass

3.2.3 推力推定

次に，噴射による推力を推定する．F_z の波形より噴射が行われているのが 18.4 秒間であると読み取る．これと，先に算出した推進剤消費量 15.96 mN より，質量流量が一定であると仮定した場合の F_z の変化率は

$$\frac{15.96\ \mathrm{mN}}{18.4\ \mathrm{s}} = 0.8675\ \mathrm{mN/s} \tag{3.7}$$

である．これが噴射を行っている間の変化率なので，噴射前の定常値，噴射後の定常値と合わせて，質量減少による F_z の変化を推定できる．推力推定値の時間履歴は，元の F_z と，質量減少による F_z 変化の差として得られるが，F_z 波形には過渡応答の振動が含まれているため，移動平均を用いる．

図 3.20 に，雰囲気圧力の時間履歴，元の F_z 波形，質量減少による F_z の変化，F_z の 1.9 秒間の移動平均，推力推定値の時間履歴を示す．図 3.20 より，噴射を行っている間，雰囲気圧力が増加していることを確認できる．

移動平均の算出では，前後のデータが平均値計算に用いられるため，噴射開始時や噴射停止のたち下がり，立ち上がりを表現することができない．したがって，推力推定値の時間履歴のうち，噴射開始直後，停止直前以外の区間の平均値を求める．図 3.20 の縦実線区間 (5 秒間) で推力推定値の平均値をとり，これを F_{est} とすると

$$F_{\mathrm{est}} = 46.36 \pm 0.2545\ \mathrm{mN} \tag{3.8}$$

である．

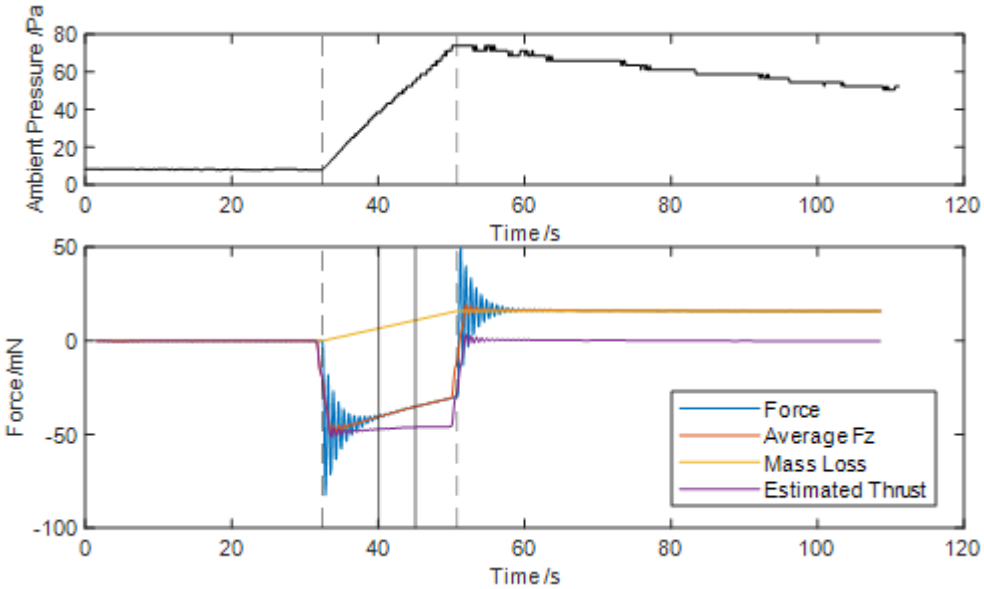


図 3.20: Thrust estimation

第 4 章

考察

4.1 推力理論値

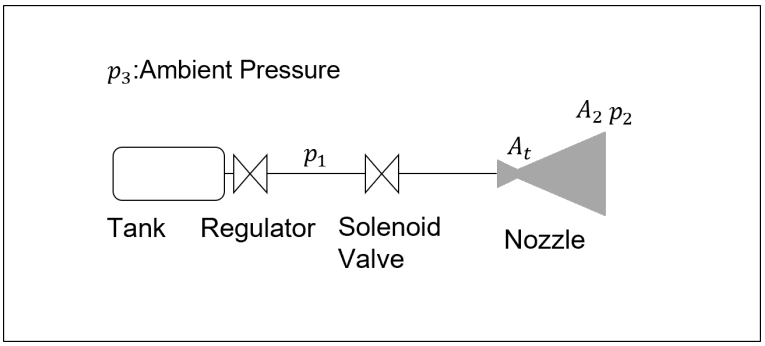


図 4.1: Schematic diagram of CGJ and definition of characters used for thrust theoretical value calculation.

前章で求めた推力推定値の妥当性を確認するため，本実験の推力理論値を計算する．理論値計算では，流れが理想的 (完全気体，等エントロピー膨張，準 1 次元流れ) であると仮定する．図 4.1 に CGJ モジュールの概略図と推力理論値計算に用いる文字の定義を示す．ノズルスロート断面積 A_t は，スロート径が 1.3 mm なので，

$$A_t = \left(\frac{1.3\ \mathrm{mm}}{2}\right)^2 \pi = 1.327 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 = 1.33 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 \tag{4.1}$$

であり，ノズル出口断面積 A_2 は，出口径が 2.5 mm なので，

$$A_2 = \left(\frac{2.5\ \mathrm{mm}}{2}\right)^2 \pi = 4.908 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 = 4.91 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 \tag{4.2}$$

である．p_3 は雰囲気圧力で，真空チャンバに取り付けられた真空計で測定する値である．p_1 はレギュレータで設定された値の分だけ雰囲気圧力より大きい．本実験では，レギュレータ圧力を 0.025 MPa に設定しているので，

$$p_1 = p_3 + 2.5 \times 10^4\ \mathrm{Pa} \tag{4.3}$$

である．

ノズルスロートで流れがチョークする場合，推力 F は

$$F = C_F A_t p_1 \tag{4.4}$$

で計算できる．ただし，推力係数 C_F は，比熱比 γ とノズル出口圧力 p_2 を用いて

$$C_F = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left\{1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}} + \frac{p_2-p_3}{p_1}\frac{A_2}{A_t} \tag{4.5}$$

と表される数である．

まず，本実験の雰囲気圧力の条件で流れがチョークすることを確認する．流れがチョークする場合，p_1 とスロートでの圧力 p_t の関係は，比熱比 γ を用いて

$$\frac{P_t}{P_1} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.6}$$

と表される．この p_t を臨界圧力という．本実験では，推進剤が CO_2 なので，CO_2 の比熱比 1.29 を代入すると

$$\frac{p_t}{p_1} = \left(\frac{2}{1.29+1}\right)^{\frac{1.29}{1.29-1}} = 0.5475 \tag{4.7}$$

である．これと (4.3) より，臨界圧力 p_t は雰囲気圧力 p_3 を用いて

$$\begin{aligned} P_t &= 0.5475 P_1 \\ &= 0.5475 \times (P_3 + 2.5 \times 10^4 \text{ Pa}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

と表される．チョーク流れが成り立つためには，$p_t > p_3$ であることが必要であるので，

$$\begin{aligned} p_3 &< 0.5475 \times (P_3 + 2.5 \times 10^4 \text{ Pa}) \\ p_3 &< 30248 \text{ Pa} \end{aligned} \tag{4.9}$$

より，雰囲気圧力が 30 kPa 以下である必要がある．図 4.2 に噴射を行った時刻付近での雰囲気圧力の履歴を再度示す．噴射が行われた区間の雰囲気圧力は 80 Pa 未満であり，チョーク流れが成立する．

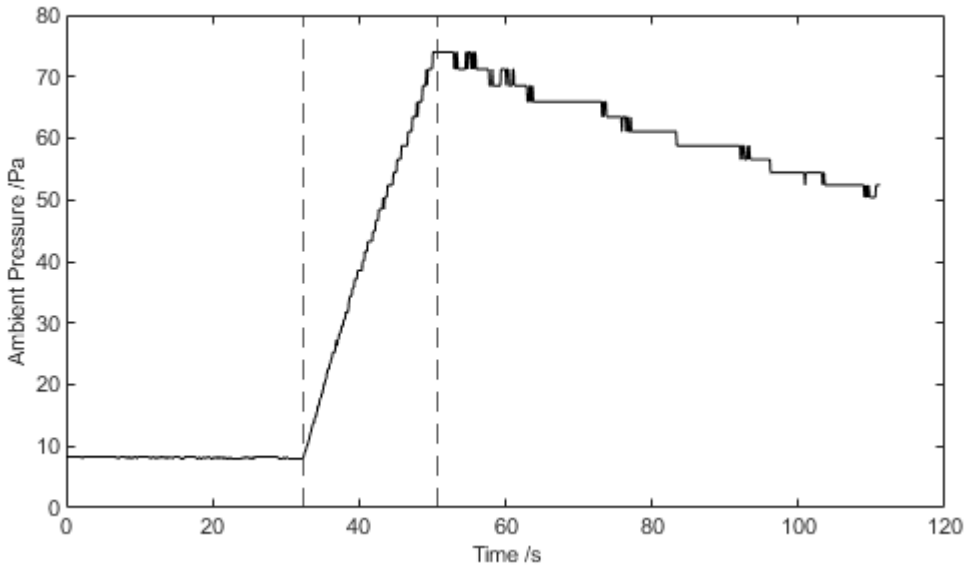


図 4.2: Time history of ambient pressure. The ejection was performed during the period between the vertical dotted lines.

つぎに，ノズル出口圧力 p_2 を考える．ノズル出口で超音速流となっている場合，ノズル開口比 A_2/A_t と圧力比 p_1/p_2 の関係式

$$\frac{A_2}{A_t} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right\}}} \tag{4.10}$$

が成り立つ．p_1/p_2 について直接解くのは困難なので，グラフから圧力比を読み取る．横軸に圧力比 p_1/p_2，縦軸にノズル開口比 A_2/A_t をとったグラフを図 4.3 に示す．ここで，ノズル開口比が

$$\frac{A_2}{A_t} = \frac{4.91 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2}{1.33 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 3.69 \tag{4.11}$$

であるので，グラフから圧力比を読み取ると $p_1/p_2 = 24.21$ である．推力理論値の計算に使用したパラメータを表 4.1 に示す．表 4.1 のパラメータと図 4.2 の雰囲気圧力の値を用いて計算した．噴射を行っている間の推力理論値が図 4.4 である．雰囲気圧力の増加に伴って推力理論値は，0.19 mN 減少する．推力理論値の平均値は 52.15 mN である．一方，前章で求めた推力推定値 F_{est} は 46.36 ± 0.2545 mN であった．したがって，理論値との差は 5.79 mN である．

実際の CGJ 噴射による推力は，理論値より小さくなる．実験装置に由来する原因として，モジュール内の曲がり管路や壁面での摩擦による圧力損失が考えられる．また，理論値計算の条件の下で，ノズル出口圧力 p_2 を計算すると，

$$\begin{aligned} p_2 &= 0.041p_1 = 0.041(p_3 + 2.5 \times 10^4\ \mathrm{Pa}) \\ &= 0.041p_3 + 1025\ \mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{4.12}$$

である．適正膨張，つまり $p_2 = p_3$ となるときの p_3 は

$$\begin{aligned} p_3 &= 0.041p_3 + 1025\ \mathrm{Pa} \\ p_3 &= 1068\ \mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{4.13}$$

であるが，本実験時の雰囲気圧力は数 10Pa であり，$p_2 < p_3$ の不足膨張である．準 1 次元流れにならず，推力が低下すると考えられる．以上の理由で理論値より実際の推力は小さくなるため，本実験における推力推定の結果は妥当であるといえる．

表 4.1: Parameters used to calculate the theoretical thrust value.

CO_2 Specific heat ratio γ	1.29
Regulated Pressure P_1	2.5×10^4 Pa+P_3
Pressure Ratio P_2/P_1	0.041
Nozzle Throat Area A_t	1.33×10^{-6} m^2
Nozzle Exit Area A_2	4.91×10^{-6} m^2

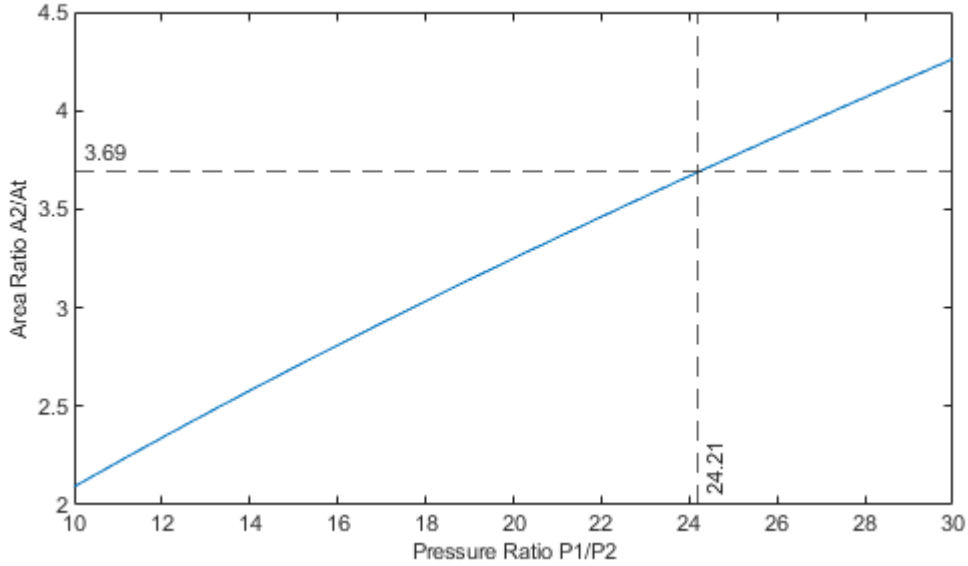


図 4.3: The relationship between nozzle expansion ratio A_2/A_t and pressure ratio p_1/p_2.

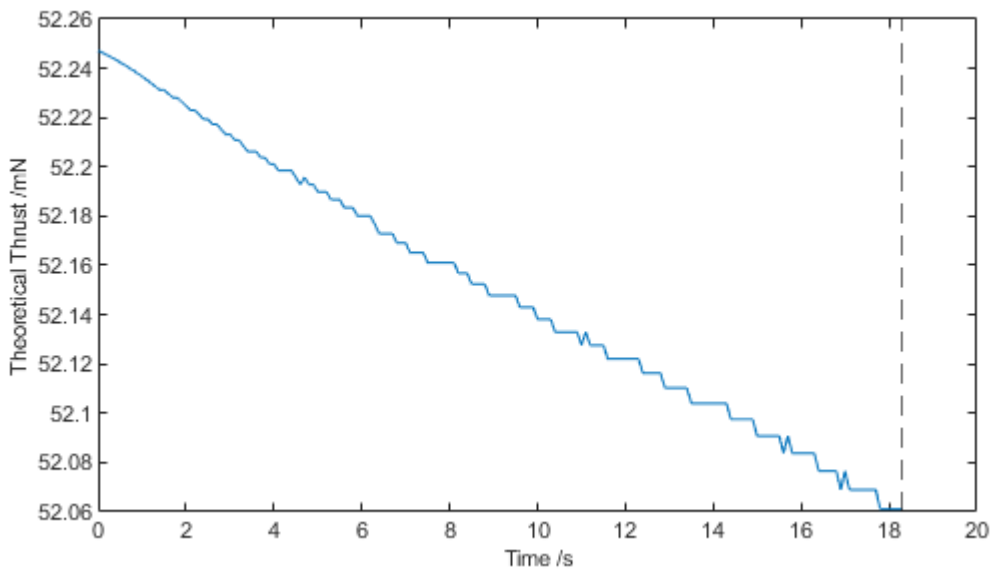


図 4.4: Theoretical Thrust between cold gas ejection

4.2 スラストスタンド分解能

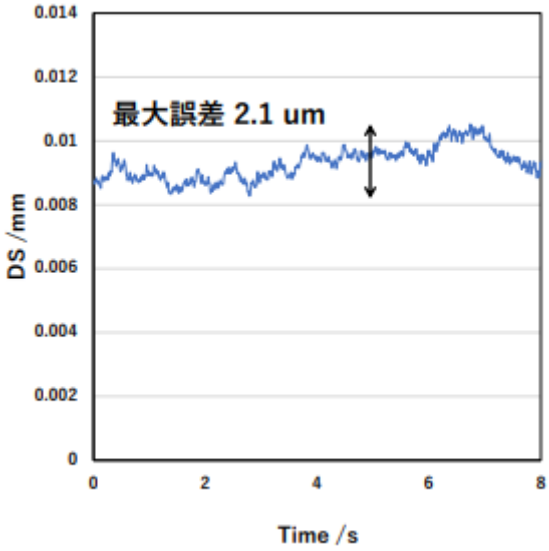


図 4.5: Displacement sensor resolution in previous research[58]

本実験におけるスラストスタンドの力，トルク測定の分解能を考える．本節では，まず先行研究 [58] の手法で分解能を求める．次に，先行研究手法の問題点を指摘し，別の手法を提示する．

先行研究では，較正で求めた回帰式の行列の成分の絶対値と，変位計の分解能 ΔD を使って分解能が算出された．例えば，F_x の測定分解能 ΔF_x の場合，ΔD は全変位計で共通の値であるとして

$$\Delta F_x = (|B_{11}| + |B_{12}| + |B_{13}| + |B_{14}| + |B_{15}| + |B_{16}|)\Delta D \tag{4.14}$$

のように計算する．

先行研究において，変位計の分解能は，固定した測定対象に LED 光を当てて，測定値の出力のぶれを計測することにより求められた．その際の波形を図 4.5 に示す．ただし，この波形はサンプリングレート 0.01 秒のデータに対して 1 秒の移動平均をとったものである．先行研究において，変位計分解能 ΔD は 2.1 μm であると求められた．これを本実験で得た回帰式

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -88.34 & -4.44 & -2.33 & -14.7 & 9.98 & -1.33 \\ 6.37 & 55.31 & 47.34 & 10.23 & 10.65 & -28.32 \\ -1.60 & -6.68 & -6.39 & 128.00 & 96.58 & 103.69 \\ -1.37 & -3.45 & -3.35 & -9.53 & -6.98 & 21.60 \\ -4.56 & 0.12 & -0.44 & -20.96 & 15.74 & 0.18 \\ 0.57 & 7.94 & -5.34 & 0.38 & 0.11 & -0.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\mathrm{x}} \\ D_{\mathrm{y1}} \\ D_{\mathrm{y2}} \\ D_{\mathrm{z1}} \\ D_{\mathrm{z2}} \\ D_{\mathrm{z3}} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

に適用し，各方向の分解能を求める．この手法で求めた分解能を表 4.2 に示し，先行研究で求められた分解能の値と比較する．なお，先行研究において計算に用いられた行列 $\mathcal{B}_{\mathrm{prev}}$ は，

$$\mathcal{B}_{\mathrm{prev}} = \begin{pmatrix} -59.6 & -12.1 & -12.4 & 64.7 & 22.6 & -4.63 \\ -12.6 & 55.8 & 42.2 & 9.86 & -20.0 & -3.08 \\ 14.7 & 22.1 & 7.11 & 107 & 109 & 123 \\ 0.972 & 3.39 & 3.45 & -6.04 & -8.40 & 17.3 \\ -1.79 & -2.45 & -1.64 & -16.7 & 12.3 & 0.282 \\ -1.7 & 7.28 & -6.16 & 3.14 & 1.84 & 0.334 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

であった．表 4.2 より，本実験の行列 $\mathcal{B}$ を用いて求めた分解能は，先行研究で得られた分解能と同程度の分解能であった．

表 4.2: Resolution calculated using the same method as in the previous study.

Direction	Resolution	Ref[58]
ΔF_x	0.254 mN	0.370 mN
ΔF_y	0.332 mN	0.301 mN
ΔF_z	0.720 mN	0.803 mN
ΔT_x	0.0972 mN · m	0.0830 mN · m
ΔT_y	0.0882 mN · m	0.0737 mN · m
ΔT_z	0.0313 mN · m	0.0430 mN · m

この方法において変位計の分解能は，測定対象を固定して出力のブレを計測することで求められた．しかし，実際には変位計の測定対象であるプレートは外乱により振動する．そこで，実験時の変位履歴のうち，噴射を行っていない間の各変位計の測定変位の範囲を求める．

噴射実験における変位履歴のうち，冒頭の 30 秒間のデータを用いて，力を加えていないときの変位変動の幅を計算する．図 4.6 に，CGJ 噴射実験時の各変位計測定変位を示す．ただし，示す波形は，初期値からの差分から，30 秒間の平均値を差し引いたものである．この波形から得られる各変位計測定変位の最大値，最小値の差，つまり範囲は，D_{x}，D_{z1} では 3.8 μm，それ以外では 4.6 μm であった．

$\Delta D_{\mathrm{x}} = \Delta D_{\mathrm{z1}} = 3.8 \times 10^{-3}$ mm，$\Delta D_{\mathrm{y1}} = \Delta D_{\mathrm{y2}} = \Delta D_{\mathrm{z2}} = \Delta D_{\mathrm{z3}} = 4.6 \times 10^{-3}$ mm として，以下の式

$$\Delta F_x = |B_{11}|\Delta D_{\mathrm{x}} + |B_{12}|\Delta D_{\mathrm{y1}} + |B_{13}|\Delta D_{\mathrm{y2}} + |B_{14}|\Delta D_{\mathrm{z1}} + |B_{15}|\Delta D_{\mathrm{z2}} + |B_{16}|\Delta D_{\mathrm{z3}} \tag{4.17}$$

のように各方向の分解能を計算した結果を，表 4.3 に示す．ΔD の値が表 4.2 の場合と比べて大きいため，分解能が悪くなっている．

表 4.3: Resolution obtained using the range of measured displacements before ejection

Direction	Resolution
F_x	0.475 mN
F_y	0.715 mN
F_z	1.474 mN
T_x	0.204 mN · m
T_y	0.173 mN · m
T_z	0.0674 mN · m

以上のように，先行研究手法では (4.17) のように $\mathcal{B}$ の成分の絶対値と ΔD の積を足し合わせたものを分解能としていた．この手法は，変位計の測定値にノイズが含まれることを考慮して，ノイズに埋もれず確実に識別できる力，トルクを求めることができる．一方，各変位計の測定は独立であるため，一部の測定変位が大きくなる場合がある．例えば，

$$F_x = |B_{11}| \cdot 2\Delta D_{\mathrm{x}} + |B_{12}|\Delta D_{\mathrm{y1}} + |B_{13}|\Delta D_{\mathrm{y2}} + |B_{14}|\Delta D_{\mathrm{z1}} + |B_{15}|\Delta D_{\mathrm{z2}} + |B_{16}|\Delta D_{\mathrm{z3}} \tag{4.18}$$

のようになる場合がありうる．この場合は F_x の波形上で $B_{11}\Delta D\mathrm{x}$ を識別できる．このように，確実にノイズに埋もれず識別できる値と，実際に識別できる値は異なる．

そこで，分解能を評価する別の指標を考える．各変位計の測定変位 D のばらつきが正規分布に従い，変位を $D \pm \varepsilon$ で表せるとする．先に述べた測定変位の範囲より，

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathrm{x}} = \varepsilon_{\mathrm{z1}} = 1.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm} \\ \varepsilon_{\mathrm{y1}} = \varepsilon_{\mathrm{y2}} = \varepsilon_{\mathrm{z2}} = \varepsilon_{\mathrm{z3}} = 2.3 \times 10^{-3}\ \mathrm{mm} \end{aligned} \tag{4.19}$$

とする．この時，$\mathcal{B}$ の成分を用いて，

$$\begin{aligned} F_x = B_{11}D_{\mathrm{x}} + B_{12}D_{\mathrm{y1}} + B_{13}D_{\mathrm{y2}} + B_{14}D_{\mathrm{z1}} + B_{15}D_{\mathrm{z2}} + B_{16}D_{\mathrm{z3}} \\ \pm \sqrt{(B_{11}\varepsilon_{\mathrm{x}})^2 + (B_{12}\varepsilon_{\mathrm{y1}})^2 + (B_{13}\varepsilon_{\mathrm{y2}})^2 + (B_{14}\varepsilon_{\mathrm{z1}})^2 + (B_{15}\varepsilon_{\mathrm{z2}})^2 + (B_{16}\varepsilon_{\mathrm{z3}})^2} \end{aligned} \tag{4.20}$$

のように計算すると，測定変位から換算される力，トルクの不確かさを表 4.4 に示す．また，不確かさの絶対値を 2 倍した値を，分解能の指標とする．

表 4.4: Uncertainty and resolution of force and torque assuming that the variation of measurement displacement follows a normal distribution.

Direction	Uncertainty	Resolution
F_x	± 0.172 mN	0.344 mN
F_y	± 0.183 mN	0.366 mN
F_z	± 0.407 mN	0.814 mN
T_x	± 0.0564 mN · m	0.113 mN · m
T_y	± 0.0545 mN · m	0.109 mN · m
T_z	± 0.0221 mN · m	0.0442 mN · m

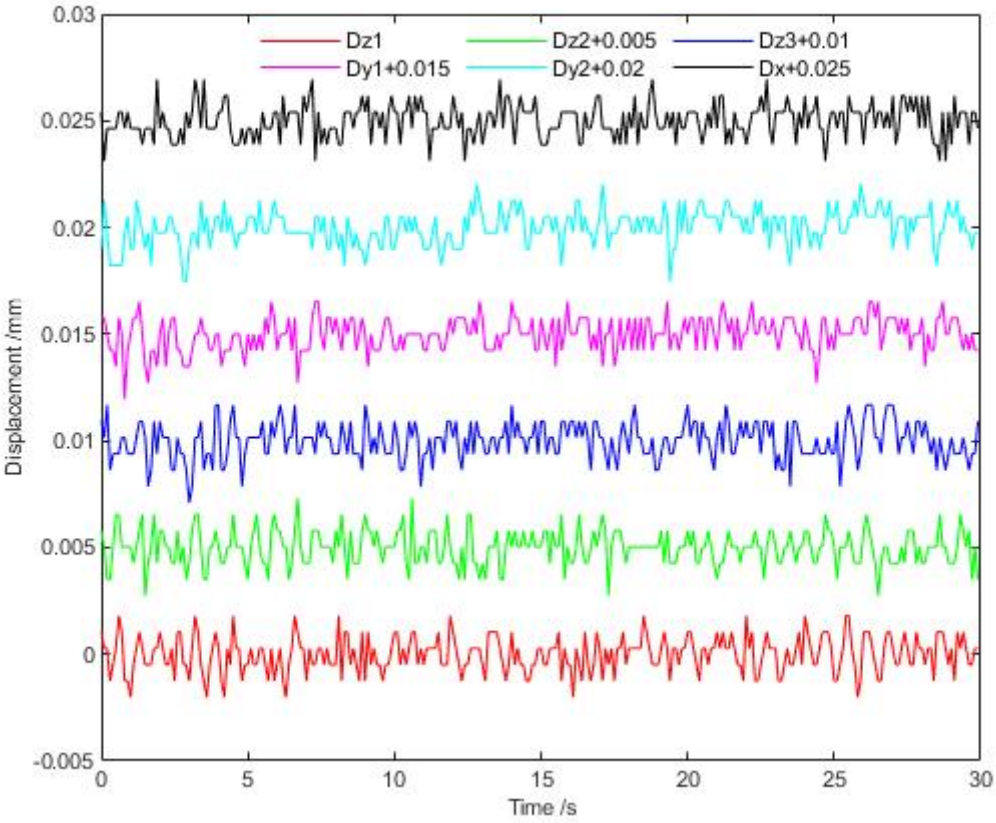


図 4.6: Displacement measured by each displacement sensor during the first 30 seconds of the ejection experiment.The average value for 30 seconds is subtracted.

結論

先行研究において，バネ吊下式 6 自由度スラストスタンドの F_z 測定の分解能は 0.803 mN であると評価された．しかし，実際に噴射を伴う実験は行われていなかった．本研究では，簡易的なコールドガスジェットモジュールを使用した実験により，F_z 測定における性能を検証した．結論を以下にまとめる．

- コールドガス噴射で得られる波形が，推進剤消費による質量減少と噴射による推力の重ね合わせであることから，この 2 つを推定した．
- 噴射前後の F_z 定常値を比較して，推進剤消費質量を力換算で 15.96 mN であると推定した．
- 実験前後に測定した CGJ モジュール質量の時間履歴から，外挿により求めた推進剤消費質量は 1.56 g，力換算で 15.30 mN であった．この外挿により求めた値を真値とした場合，F_z 波形から推定した値との残差は 0.66 mN で，推定値の方が過剰であった．
- F_z の移動平均から，質量減少にともなう F_z の変化を差し引いて求めた噴射による推力の推定値は 46.36 mN であった．
- 理想的な流れを仮定した場合の，噴射による推力の理論値は 52.15 mN であった．配管での圧力損失や過膨張による損失で実際の推力は理論値より小さくなることから，推定値の妥当性を確認した．
- 重回帰分析で得た回帰式と，各変位計の測定変位の不確かさから，力，トルク測定の分解能を求めた．F_z の分解能は 0.814 mN であり，推進剤消費質量の推定値の残差 0.66 mN はこの分解能の範囲内にある．

今後の課題は第 1 に，F_z だけでなく F_y, F_z やトルク測定の検証を行うことである．トルク測定を行うためには，推力測定を行うモジュールの重心位置を測定する必要がある．第 2 に，再現性のある実験を行うことである．現在の実験系では，実験の際にモジュールを配置する位置が一意に定められていない．設置位置に再現性を持たせられるよう実験系を改善する必要がある．最後に，本スラストスタンドではバネを使用することで重量制限を緩和しているが，バネを固定する接合部などで摩擦によるヒステリシスが生じることを避けることができない．ヒステリシスを小さくするためには，バネ吊下式スラストスタンドによる測定を零位法で行うような手法が必要である．

参考文献

[1] Armen Poghosyan, Alessandro Golkar.CubeSat evolution: Analyzing CubeSat capabilities for conducting science missions.*Progress in Aerospace Sciences*, 88, jan 2017

[2] Bruce Yost, Sasha Weston: State-of-the-Art Small Spacecraft Technology, *NASA Ames Research Center, Small Spacecraft Systems Virtual Institute*, 2020

[3] Syl Kacapyr.Cracker-sized satellites demonstrate new space tech,*Cornell University,https://news.cornell.edu/stories/2019/06/cracker-sized-satellites-demonstrate-new-space-tech (Access on 21/01/15)*,2019

[4] Yoshihide Aoyanagi,Akira Iwasaki,Shinichi Nakasuka,Takuji Ebinuma,Shinichi Kimura, Tomohiro Narumi.Results of Hodoyoshi-3 and -4 Earth Observation Missions,*Trans. JSASS Aerospace Tech. Japan Vol. 14, No. ists30*, pp. Pn15-Pn22, 2016

[5] Ryu Funase, Takaya Inamori, Satoshi Ikari, Naoya Ozaki, Hiyoyuki Koizumi, Atsushi Tomiki, Yuta Kobayashi, Yasuhiro Kawakatsu.Initial Operation Results of a 50kg-class Deep Space Exploration Micro-Spacecraft PROCYON, *29th AIAA/USU Conference on Small Satellites*, 2015

[6] ALE CO.,Ltd . https://star-ale.com/technology/(accessed on 22/01/15)

[7] Soon-Jo Chung, Saptarshi Bandyopadhyay, Rebecca Foust, Giri P. Subramanian, Fred Y. Hadaegh.Review of Formation Flying and Constellation Missions Using Nanosatellites, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2016

[8] Chris Sabol, Rich Burns, Craig A.McLaughlin. *Satellite Formation Flying Design and Evolution, Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001

[9] Grant Bonin, Niels Roth, Scott Armitage, Josh Newman, Ben Risi, Robert E.Zee. CanX-4 and CanX-5 Precision Formation Flight: Mission Accomplished!,*29th Annual AIAA/USU Conferense on Small Satellites*, 2015

[10] Masaki Ando, B-DECIGO Group. Space Gravitational-Wave Antenna: B-DECIGO, 第 *64* 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2020

[11] Hirotaka Kondo, Sho Ishiwata, Satoshi Ikari, Taro Matsuo, Ryu Funase, Shinichi Nakasuka. 宇宙赤外線ミッション SEIRIOS 実現に向けた光学機器の地上試験, 第 *64* 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2020

[12] Norihide Miyamura , Ryo Suzumoto, Satoshi Ikari, Shinichi Nakasuka. フォーメーションフライトによる合成開口望遠鏡 FFSAT の検討, 第 *64* 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2020

[13] 林田 清, 朝倉 一統, 佐久間 翔太郎, 石倉 彩美, 米山 友景, 岡崎 貴樹, 野田 博文. 超巨大ブラックホールの周辺を空間分解観測する多重像 X 線干渉計 MIXIM 計画, 第 *64* 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2020

[14] G. Di Mauro, M. Lawn, and R. Bevilacqua.Survey on Guidance Navigation and Control Requirements for Spacecraft Formation-Flying Missions, *JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS Vol. 41, No. 3*, March 2018

[15] Erik Kulu.Satellite Constellations - 2021 Industry Survey and Trends,*35th Annual Small Satellite Conference*, 2021

[16] https://oneweb.net/media-center/oneweb-confirms-successful-launch-of-36-satellites-after-rapid-year-of-progress(accessed on 22/01/15)

[17] A technical comparison of three low earth orbit satellite constellation systems to provide global broadband,*Acta Astronautica Volume 159*, Pages 123-135,June 2019,

[18] Adam Mann , Tereza Pultarova. Starlink: SpaceX's satellite internet project,`https://www.space.com/spacex-starlink-satellites.html#section-bibliography` (accessed on 2022/01/15)

[19] Soyuz Flight ST27 Launch Kit, `https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2020/01/ST27-launch-kit_EN.pdf`,Arianespace, February 2020

[20] Spire Grobal. The Low Earth Multi-Use Receiver (LEMUR)`https://spire.com/spirepedia/low-earth-multi-use-receiver/`(accessed on 22/01/16)

[21] AXELSPACE. `https://www.axelspace.com/grus-1-jpn?lang=ja`(accessed on 22/01/16)

[22] NASA' s Jet Propulsion Laboratory. *`https://solarsystem.nasa.gov/missions/mars-cube-one/in-depth/` (accessed on 22/01/14)*

[23] Andrew Klesh, Brian Clement, Cody Colley, John Essmiller, Daniel Forgette, Joel Krajewski, Anne Marinan, Tomas Martin-Mur, Joel Steinkraus, David Sternberg, Thomas Werne, Brian Young.MarCO: Early Operations of the First CubeSats to Mars,*32nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*,2018

[24] Kimberly F. Robinson,Renée Cox,Scott F. Spearing,David Hitt. Space Launch System Artemis I CubeSats: SmallSat Vanguards of Exploration, Science and Technology,*32nd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*,2020

[25] https://www.nasa.gov/artemis-1(accessed on 22/01/18)

[26] Stephen Clark.Adapter structure with 10 CubeSats installed on top of Artemis moon rocket,Spaceflight Now,`https://spaceflightnow.com/2021/10/12/adapter-structure-with-10-cubesats-installed-on-top-of-artemis-moon-rocket/` (accessed on 22/01/16)

[27] NASA Secondary Payloads brochure Nov 2021,`https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/0364_secondary_payloads_brochure_11012021_508_single_pages_for_web.pdf`(accessed on 22/01/16)

[28] Benjamin K. Malphrus, Kevin Z. Brown, Jose Garcia, Charles Conner, Jeff Kruth, Michael S. Combs, Nathan Fite, Sean McNeil, Sarah Wilczweski, Kennedy Haught, Aaron Zucherman, Morehead State University Pamela Clark, Krisjani Angkasa, Nathaniel Richard, Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology Terry Hurford, Dave Folta, Clifford Brambora, Robert MacDowall, Paul Mason, Sun Hur-Diaz, Joseph Breeden, Robert Nakamura, NASA Goddard Spaceflight Center Andres Martinez, NASA HQ. Michael M. Tsay, Busek Co. Inc.The Lunar IceCube EM-1 Mission: Prospecting the Moon for Water Ice, *IEEE A&E SYSTEMS MAGAZINE*,2019

[29] Craig Hardgrove, Joe DuBois, Lena Heffern, Ernest Cisneros, James Bell, Teri Crain,Richard Starr,Thomas Prettyman,Igor Lazbin, Bob Roebuck, Nathaniel Struebel, Ethan Clark,Igor Lazbin, Bob Roebuck, Nathaniel Struebel, Ethan Clark, Derek Nelson, Jeremy Bauman, Bobby Williams, Erik Johnson, James Christian, Graham Stoddard, Michael Tsay, Joshua Model, Pete Hruby, Alessandra Babuscia, Steve Stem, Devon Sanders, Elliot Hegel, Mitchell Wiens, Sean Parlapiano,

Patrick Hailey, Tyler O' Brien, Katherine Mesick, Dan Coupland.The Lunar Polar Hydrogen Mapper (LunaH-Map) Mission,*33rd Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites*,2019

[30] Michael Tsay, John Frongillo, Joshua Model, Jurg Zwahlen, Carl Barcroft , Charlie Feng.Neutralization Demo and Thrust Stand Measurement for BIT-3 RF Ion Thruster, *53rd AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*,2017

[31] Tatsuaki Hashimoto, Tetsuya Yamada, Masatsugu Otsuki, Tetsuo Yoshimitsu, Atsushi Tomiki, Wataru Torii, Hiroyuki Toyota, Institute of Space and Astronautical Science, Japan Aerospace Exploration Agency, Sagamihara, Japan Junji Kikuchi, Naoki Morishita, Taichi Ito, Research and Development Directorate, Japan Aerospace Exploration Agency, Sagamihara, Japan Yuta Kobayashi, Aiko Nagamatsu, Research and Development Directorate, Japan Aerospace Exploration Agency, Tsukuba, Japan Hideyuki Tanno, Research and Development Directorate, Japan Aerospace Exploration Agency, Kakuda, Japan Hitoshi Morimoto, Human Spaceflight Technology Directorate, Japan Aerospace Exploration Agency, Tsukuba, Japan.Nano Semihard Moon Lander: OMOTENASHI,*IEEE A&E SYSTEMS MAGAZINE*,2019

[32] Scott Spearing,SPACE LAUNCH SYSTEM CubeSats - To The Moon & Beyond,National Space Society,2018

[33] CuSP Propulsion System,`https://cubesat-propulsion.com/wp-content/uploads/2017/08/X17025000-data-sheet-080217.pdf`(accessed on 22/01/17)

[34] Brandon Stiltner,Andrew Heaton,Chris Becker,Ben Diedrich,Juan Orphee Ivan Bertaska.Cold Gas RCS for the NEA Scout CubeSat,*AIAA YP Symposium*,2017

[35] Andrew Heaton, Naeem Ahmad, Kyle Miller.Near Earth Asteroid Scout Thrust and Torque Model,*International Symposium on Solar Sailing*,2017

[36] Ryu Funase, Satoshi Ikari, Yosuke Kawabata, Shintaro Nakajima, Shunichiro Nomura, Nobuhiro Funabiki, Akihiro Ishikawa, Kota Kakihara, Shuhei Matsushita, Ryohei Takahashi, Kanta Yanagida, Daiko Mori, Yusuke Murata, Toshihiro Shibukawa, Ryo Suzumoto, Masahiro Fujiwara, Kento Tomita, Hiroki Aohama, Keidai Iiyama, Sho Ishiwata, Hirotaka Kondo, Wataru Mikuriya, Hiroto Seki, Hiroyuki Koizumi, Jun Asakawa, Keita Nishii, Akihiro Hattori, Yuji Saito, Kosei Kikuchi, Ichiro Yoshikawa, Kazuo Yoshioka, Reina Hikida, Shogo Arao,Kota Miyoshi, Yuta Kobayashi, Atsushi Tomiki, Wataru Torii, Taichi Ito, Naoya Ozaki, Nicola Baresi, Masaki Kuwabara, Hajime Yano, Toshinori Ikenaga, Tatsuaki Hashimoto, Stefano Campagnola, Shinsuke Abe, Ryota Fuse, Yosuke Masuda,Masahisa Yanagisawa,Takayuki Hirai,Kazuyoshi Arai, Ritsuko Jitsukawa, Eigo Ishioka, Haruki Nakano. Mission to Earth–Moon Lagrange Point by a 6U CubeSat: EQUULEUS,*IEEE A&E SYSTEMS MAGAZINE*,2020

[37] E. Glenn Lightsey,Terry Stevenson,Matthew Sorgenfrei .Development and Testing of a 3-D-Printed Cold Gas Thruster for an Interplanetary CubeSat, *Proceedings of the IEEE (Volume: 106, Issue: 3, March 2018)*,pp379-390,2018

[38] Valerio Di Tana, Biagio Cotugno, Simone Simonetti,Gabriele Mascetti, Edmondo Scorzafava, Simone Pirrotta.ArgoMoon: There is a Nano-Eyewitness on the SLS,*IEEE A&E SYSTEMS MAGAZINE*,2019

[39] M.A. Alandihallaj and M.R. Emami.Multiple-payload fractionated spacecraft for earth observation,*Acta Astronautica 191 (2022) 451–471*,2022

[40] ConstantQ Spacecraft Propulsion,`https://fluidandreason.com/constantq/`(accessed on

22/01/16)

[41] James E. Polk, Anthony Pancotti, Thomas Haag, Scott King, Mitchell Walker, Joseph Blakely, John Ziemer. Recommended Practice for Thrust Measurement in Electric Propulsion Testing, *Journal of Propulsion and Power*, 2017

[42] Qin Xing, Jun Zhang,a Min Qian, Zhen-yuan Jia,Bao-yuan Sun. Thrust stand for low-thrust liquid pulsed rocket engines, *REVIEW OF SCIENTIFIC INSTRUMENTS 81*, 095102,2010

[43] 各務 聡, 宇宙機用電気推進機のための推力測定,*J. Plasma Fusion Res. Vol.97*, No.1 (2021)20-27

[44] Hiroyuki Koizumi,Kimiya Komurasaki,Yoshihiro Arakawa. Development of thrust stand for low impulse measurement from microthrusters,*REVIEW OF SCIENTIFIC INSTRUMENTS VOLUME 75, NUMBER 10* oct,2004

[45] Jun Asakawa, Keita Nishii, Hiroyuki Koizumi,Kimiya Komurasaki. Direct measurement of 1-mN-class thrust and 100-s-class specific impulse for a CubeSat propulsion system,*Rev. Sci. Instrum. 91*, 035116 (2020)

[46] Kean How Cheah, Kay-Soon Low, Senior Member, IEEE, Quang-Vinh Tran, and Zirui Lau.Development of an Electrostatic Calibration System for a Torsional Micronewton Thrust Stand,IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, VOL. 64, NO. 12, DECEMBER 2015

[47] Jiang Kai Lam, Seong Chun Koay, Chie Haw Lim, Kean How Cheah. A voice coil based electromagnetic system for calibration of a sub-micronewton torsional thrust stand, Measurement 131 (2019) 597–604

[48] Shahin Firuzi, Shengping Gong. Attitude Control of a Flexible Solar Sail in Low Earth Orbit, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2018

[49] 山下裕介, 月崎竜童，山本雄大, 神田大樹，西山和孝，國中均: レーザー誘起蛍光法によるマイクロ波放電式 イオンエンジン μ 10 の内部旋回速度測定, 第 *61* 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2017

[50] Michael Tsay, Joshua Model, Carl Barcroft, John Frongillo, Jurg Zwahlen, Charlie Feng.Integrated Testing of Iodine BIT-3 RF Ion Propulsion System for 6U CubeSat Applications,*The 35th International Electric Propulsion Conference, Georgia Institute of Technology*,Oct,2017

[51] Takashi Kimoto, Sora Obata, Katsuhiko Yamada, Yasuhiro Shoji.Attitude Control of a Nanosatellite Using Only Magnetic Torquers, *Trans. JSASS, Aerospace Tech. Japan*, 2018

[52] 柳沼和也，小泉宏之，河原大樹，浅川純，中川悠一，稲垣匡志，笠木友介，五十嵐哲，尾崎直哉，船瀬龍，小紫公也. 小型衛星用電気推進の推力ベクトル管理方法の提案と実証, 日本航空宇宙学会論文集, 2016

[53] Ann M Wright, Andrew B Wright, Traig Born, Ryan Strickland.Design and Calibration of a Six Degree-of-Freedom Thrust Sensor for a Lab-Scale Hybrid Rocket, *Measurement Science and Technology*, 2013

[54] Zack N. Brimhall , Niroshen Divitotawela, Joseph P. Atkinson, Daniel R. Kirk, and Henry G. Peebles. Design and Validation of a Six Degree of Freedom Rocket Motor Test Stand, *44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, 2008

[55] N. Nagao, S. Yokota, K. Komurasaki, Y. Arakawa. Development of a two-dimensional dual pendulum thrust stand for Hall thrusters, *Review of Scientific Instruments*, 2007

[56] Matthew R. Gilpin, Michael R. Natisin, Carlos Marin, Michael D. Eschen, Henry L. Zamora. Dual-Axis Torsional Thrust Stand for Simultaneous Direct Measurement of Thrust and Mass Loss, *36th International Electric Propulsion Conference*, 2019

[57] Kakami Akira, Kosuke Hanyu, Yasuyuki Yano. Magnetically-levitated thrust stand for evaluating 6-component thrust, *Aerospace Science and Technology*, 2020

[58] Kosei Kikuchi.CubeSat 用 10 mN 級 6 自由度スラストスタンドの性能評価, 東京大学修士論文,2020

謝辞

本論文の執筆にあたって，多くの方々のご指導をいただきましたことに深く感謝いたします．

はじめに小泉小紫研究室の先生方に感謝を申し上げます．指導教員の小泉先生には，ミーティング資料の作り方，治具設計時の注意点，イントロの書き方など多くのアドバイスをいただきました．特に，誤解のない資料づくりという点では，日本語表現，文字の定義など何度も何度も指導をいただきました．研究においては理論だけでなく，モノづくりという面でみたときの知識量も豊富で感銘を受けました．コロナ禍の中で，最新のツールを利用して授業や研究室内のコミュニケーションの場を作ろうとする姿が印象に残っています．対面でお酒を飲む機会がまったくと言っていいほどなかったのが悔やまれるところです．関根さんには LabView のプログラムを改善するアドバイスをいただきました．おかげで，その後の実験の効率が倍以上になりました．小紫先生，川嶋先生には輪講で指導をいただきました．また，川嶋さんは本郷できさくに話しかけてくださったこと，小紫先生とは特別輪講後の本郷居室の飲み会で楽しく話せたことを覚えています．ありがとうございました．

自分の研究の前任者である菊池さんには，AQ のスラスタヘッド関連の作業や，自分の研究について直接話す機会を作っていただけたことに感謝いたします．

小泉研究室の先輩方にもたくさんのアドバイスをいただきました．本郷拠点の M1 が自分だけだったのもあり，本郷の先輩方と過ごす時間が本当に貴重でした．秋山さん，室原さんには AQ 関連の作業などで多くのアドバイスをいただきました．自分が電気回路まわりの作業に追われているとき，お二人の雑談に聞き耳を立てるのが日々の楽しみでした．西井さんには班 MTG でのアドバイスや学会に向けての心構えを教えていただきました．昨年度卒業された万波さん井澤さんとは AQ の地下チェンバ試験などで一緒に時間を過ごすことができました．特に班の先輩である井澤さんには，圧着工具の使い方や反転増幅回路とはなんぞやという超基本的なところから教えていただきました．2 年を通して井澤さんの姿に少しでも近づけていたら良いなと思っています．また，FM2 の作業やジグ作成作業で柏に行った際など柏所属の先輩にもお世話になりました．元木さんは出身学科が同じということで，オンライン飲み会の場などでよくいじってくれました．ピエールは MTG で自分がつたない英語でした質問に，ていねいに答えてくださいました．対面で話す機会をもっと作ればよかったと思っています．山村さん，安宅さんとは相模原で FM2 のための作業をする機会がありました．食べ放題の店とか行きましたね．小泉研に入って，大学以外のところで活動するのが初めてだったので，とても印象に残っています．

研究室同期は，自分以外全員柏所属だったので，直接話す機会があまりなかったのが残念です…．1 回だけ柏駅の近くで全員揃って飲めたことをしっかりと覚えています．皆の資料のクオリティや MTG での発言の鋭さに刺激を受けていました．ありがとうございました．小紫研の真鍋君，川端君とは先輩たちと一緒にごはんを食べにいくなど，良い時間を過ごせました．

研究室の後輩のみなさんにも感謝を申し上げます．特に，本郷所属の西村君，ジョジョ君，森合君とは楽しい時間を過ごせました．同じ班の森合君には，CGJ モジュール制作や実験でとてもお世話になりました．森合君無しではこの修論は成立しません．柏所属の後輩のみなさんともオンライン飲み会などで楽しい時間を過ごせました．

最後に，ここまで金銭的，精神的に応援していただいた両親，家族に感謝します．卒業後はこれまでの恩を返していけるように精進します．

関連発表

国内学会における発表

1. 山内 健太郎，井澤 壮太，西井 啓太，小泉 宏之，小紫 公也，バネ吊り下げ方式の超小型衛星推進機用 6 自由度スラストスタンドの設計，2020 年度 宇宙輸送シンポジウム，オンライン，1 月，2021 年
2. 森合 勲武，山内 健太郎，小泉 宏之，小紫 公也，超小型宇宙機用ばね吊り下げ式 6 自由度スラストスタンドの性能評価，2021 年度宇宙輸送シンポジウム，オンライン，1 月，2022 年
3. 山内 健太郎，森合 勲武，小泉 宏之，小紫 公也，CubeSat 用ばね吊り下げ式 6 自由度スラストスタンドの実運用模擬試験，第 61 回航空原動機・宇宙推進講演会，鳥取，3 月，2022 年 (登壇予定)