

## Clebsch表現および一般化enstrophyの相対論的拡張

学生証番号 47206080 氏名 布谷圭一郎  
(指導教員 齋藤晴彦 准教授)

(研究指導委託 核融合科学研究所 所長 吉田善章)

Key Words: Plasma, Special Relativity, Enstrophy, Hamiltonian Mechanics

プラズマや流体に現れる秩序構造を特徴づけるものとして、時間発展を支配する方程式系に係わるトポロジカルな束縛が指摘されている。トポロジカルな束縛を特徴づける運動の定数はたくさんあるが、最も基本的なものの1つとしてenstrophyが挙げられる。従来のenstrophyは2次元の流れの保存量であったが、Clebsch表現を考えることで3次元の流れの保存量に拡張することができる。これを高エネルギー天体などの相対論的なプラズマについて考えようとする、これらの保存量は修正しなければならない。本研究では、3次元の流れに拡張されたenstrophyをLorentz共変な形に書き直す。

今回の研究でenstrophyを計算する際、速度場  $V$  を直接扱うのではなく、運動量場  $\mathcal{P}$  をポテンシャル場の組  $(\varphi, \lambda^1, \sigma_1, \lambda^2, \sigma_2)$  を用いて、 $\mathcal{P} = d\varphi + \lambda^1 d\sigma_1 + \lambda^2 d\sigma_2$  と表すことを考える(Clebsch表現)。任意の3次元空間内の理想流体はこの形に表すことができる。Clebsch表現を用いると、従来は2次元流体に定義されていたenstrophyを3次元流体へ拡張できる他、Clebsch表現で書いた力学系は数学的に綺麗な構造となる(正準Hamilton力学系)。研究の第1段階として、相対論的な場合のClebsch表現を導出した。

従来のenstrophyを相対論的運動にそのまま当てはめたものとして、半相対論的enstrophy  $Q(t)$  を以下で定義する:

$$Q(t) := \int_{\Omega(t)} f(\vartheta) i_{\partial_0} n, \quad \vartheta := \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*}, \quad \omega_1 := d\lambda^1 \wedge d\sigma_1.$$

この時間発展は、以下で与えられる:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \{ f'(\vartheta) c (d \log \gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* - f(\vartheta) n^* u(\log \gamma) \} d^3 x.$$

ただし、 $u(\log \gamma) = u^\mu \partial_\mu (\log \gamma)$ 。  $dQ/dt$  は  $\log \gamma$  の微分に比例している。半相対論的enstrophy  $Q(t)$  は、非相対論的極限  $\gamma \rightarrow 1$  の下では保存するが、一般には保存しないことが分かる。

半相対論的enstrophy  $Q(t)$  が保存しなかったのは、場の時間発展は相対論的であったのに、物理量  $Q(t)$  は非相対論的に測定したものである。積分範囲に相対論的效果を考慮する、Lorentz共変なスカラー関数  $\vartheta$  を構成するために4次元時空から3次元の積分範囲への射影のようなもの  $\mathcal{J}_u(s)^*$  を導入するなどして、相対論的enstrophy  $\mathcal{Q}(s)$  を以下で定義する:

$$\mathcal{Q}(s) := c^{-1} \int_{V_0} f(\vartheta) \mathcal{J}_u(s)^* (i_u n), \quad \vartheta := c \frac{(\mathcal{J}_u(s)^* (\omega_1 \wedge d\sigma_2))^*}{(\mathcal{J}_u(s)^* (i_u n))^*}.$$

このとき、 $d\mathcal{Q}/ds = 0$  が従う。期待されるように非相対論的極限  $\gamma \rightarrow 1$  では  $Q(t)$  と一致する。

最後に、簡単な具体例についてClebsch表現やenstrophyを構成する。計算手順がやや抽象的に見える一般論をどのように適用すれば良いかを示せた。また、対称性が高い流れでは相対論効果によるenstrophy保存の破れが見られないことがあると分かった。実際にenstrophy保存の破れが見られるような具体例の構築は、今後の課題として残っている。

相対論的プラズマでもenstrophyに相当するトポロジカルな拘束が存在することから、プラズマが相対論的效果によって秩序を大きく乱される可能性は低いと考えられる。半相対論的enstrophyは、相対論効果で保存が破られる。このことは一見、運動の自由度が高まることを意味するようであるが、実際はそうではなく、相対論的に補正された保存則が運動をトポロジカルに制限することが示された。もし相対論的效果によってトポロジカルな束縛の数が減るとすると、そのぶんカオスな流れになりやすいことが考えられたが、その可能性は低いことを本研究は指摘している。