

東京大学 大学院新領域創成科学研究科  
基盤科学研究系  
先端エネルギー工学専攻

2021 年度

修士論文

Clebsch 表現および一般化 enstrophy の相対論的拡張

2022 年 1 月 25 日提出

指導教員：齋藤晴彦 准教授

研究指導委託：核融合科学研究所 所長 吉田善章

47206080 布谷 圭一郎



# 概要

プラズマや流体に現れる秩序構造を特徴づけるものとして、時間発展を支配する方程式系に係わるトポロジカルな束縛が指摘されている。トポロジカルな束縛を特徴づける運動の定数はたくさんあるが、最も基本的なものの1つとして enstrophy が挙げられる。従来の enstrophy は2次元の流れの保存量であったが、Clebsch 表現を考えることで3次元の流れの保存量に拡張することができる。これを高エネルギー天体などの相対論的なプラズマについて考えようとする、これらの保存量は修正しなければならない。

本研究では、3次元の流れに拡張された enstrophy を Lorentz 共変な形に書き直す。相対論的なプラズマの Clebsch 表現を最小作用の原理から導出したのち、従来の enstrophy の保存が破れていることを定量的に評価し、相対論的に妥当な enstrophy を定義し直す。

第1章では、序論として研究背景・研究目的について説明する。題目にもある Clebsch 表現や enstrophy といった概念の概説を与え、それを相対論化する動機についてまとめた。

第2章では、非相対論的なプラズマについての Clebsch 表現と enstrophy の理論をまとめる。この理論がどのような経緯を経て築き上げられたのかを見ながら、本研究で使う用語を定義していく。

第3章では、enstrophy と並んで基本的な運動の定数として知られている helicity を相対論化した先行研究についてまとめる。本研究が直接的に影響を受けた先行研究であり、第5章で相対論的な enstrophy を定義するときのヒントにもなっている。

第4章では、相対論的なプラズマの Clebsch 表現を最小作用の原理から導出する。これは3次元の流れの enstrophy を相対論的な描像で考える上での準備となっている。

第5章では、まず従来の enstrophy (半相対論的な enstrophy と呼ぶ) の時間変化を具体的に記述する。その時間変化は一般の場合にはゼロにならないことから、従来の enstrophy の保存が破れていることが分かる。それを受けて、相対論的に修正された enstrophy を定義する。最後に半相対論的な enstrophy と相対論的な enstrophy の対応を見て、相対論的な修正が妥当なものであったことを確かめる。

第6章では、相対論的なプラズマの具体例を取り扱う。ここまで第4, 5章で構築した相対論的なプラズマに対する Clebsch 表現と enstrophy の一般論を試運転し、その有用性をアピールすることが目的である。この章の内容は研究中で改善の余地があるが、本研究で得られた結果を記しておく。

第7章では、本研究の結論についてまとめた。

付録 A では、4.2 節、4.3 節、5.3 節で省略した式の導出の詳細を記した。本研究の詳細を追う場合に参考されたい。



# 目次

概要	3
第 1 章 序論	7
1.1 研究背景	7
1.2 研究目的	8
1.3 本研究で扱うモデルについて	8
第 2 章 非相対論的プラズマの Clebsch 表現と enstrophy	9
2.1 Lagrange 力学系と正準 Hamilton 力学系	9
2.2 非正準 Hamilton 力学系と Casimir	10
2.3 非相対論的理想流体の Clebsch 表現	11
2.4 3 次元の流れに対する enstrophy	12
2.5 非相対論的プラズマの Clebsch 表現およびその導出	13
第 3 章 helicity の相対論化	15
第 4 章 相対論的プラズマの Clebsch 表現	17
4.1 状況設定	17
4.2 最小作用の原理	18
4.3 既存の物理量との対応	19
4.4 非相対論的な場合との対応	20
第 5 章 相対論的プラズマの enstrophy	23
5.1 数学的な道具の準備	23
5.2 状況設定	24
5.3 半相対論的 enstrophy およびその時間発展	24
5.4 相対論的 enstrophy の定義	25
5.5 相対論的 enstrophy と半相対論的 enstrophy の対応	27
第 6 章 具体例の構築	29
6.1 非相対論的な場合の Clebsch 表現	29
6.2 相対論的な場合の Clebsch 表現	31
6.3 enstrophy の計算	32
6.4 考察・今後の課題	34

---

第 7 章	結論	35
付録 A	導出の詳細	37
A.1	Clebsch 表現の導出のための作用汎関数の変分 . . . . .	37
A.2	Clebsch 表現から一般化オームの法則の導出 . . . . .	39
A.3	半相対論的 enstrophy の時間発展 . . . . .	41
参考文献		44
謝辞		45
研究成果		47

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究背景

Kelvin の循環定理は、理想流体<sup>\*1</sup>の複雑な運動に潜む不変性/保存則を明らかにした画期的な理論である。循環 (circulation) という物理量は流体の速度場  $\mathbf{V}$  と流体と共に動く任意の閉曲線  $C$  に対して  $\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$  と定義され、Kelvin の循環定理は理想流体では循環が時間的に保存すると主張している。質量保存則もこれと類似しており、質量密度を流体と共に動く体積要素で積分したものが保存する。これらの定理の本質は、微分形式と図形との対をとるところにある。循環は運動量の 1-form と 1 次元の閉曲線の対であったし、質量は質量密度の  $n$ -form と  $n$  次元体積要素の対であった (ただし  $n$  は空間の次元)。プラズマについても、運動量を正準運動量 (電磁ポテンシャルの寄与を含めたもの) に置き換えることで、循環は保存する。

これらの不変量は *Casimir* としてまとめられており、*helicity* や *cross helicity* もこの仲間である [1, 2]。Casimir の構成には、Lie-drag される微分形式をウェッジ積で組み合わせて  $n$ -form を定義する。例えば 2 次元の理想流体では、渦度  $\omega$  は Lie-drag される 2-form である。同じく Lie-drag される 2-form の数密度  $\rho$  で  $\omega$  を割ると、Lie-drag されるスカラー関数  $\omega/\rho$  が得られる。よって、任意関数  $f$  に対して  $f(\omega/\rho)\rho$  は Lie-drag される 2-form となり、 $\int_{\Omega} f(\omega/\rho)\rho$  は Casimir となる ( $\Omega$  は流体と共に動く体積要素) [3]。この Casimir は、一般化 enstrophy あるいは cross-enstrophy と呼ばれるものであるが、本研究では単に enstrophy と呼ぶことにする。一般に Casimir  $C$  とは、Poisson 代数の中心 (center), すなわち任意の仮想的な Hamiltonian  $H$  に対して  $\{C, H\} = 0$  となるような物理量として定義される。

非自明な Casimir は非正準 Hamilton 力学系にのみ存在し、正準 Hamilton 力学系の Poisson 代数の中心は定数関数のみとなる (2.2 節を参照)。正準な Poisson 代数において注目する変数を減らした (縮減, reduction) 際に非正準な部分代数となり [4]、非正準な部分代数における Casimir はもとの正準な Poisson 代数において減らした変数のゲージ対称性に相当する。逆に、非正準 Hamilton 力学系の中には、それを包含するような大きな正準 Hamilton 力学系の部分代数と捉えることができる場合がある (正準化)。このとき、Casimir  $C$  は追加された変数 (仮に  $P$  とする) とカップリングしてトポロジカルな束縛でなくなる [5]。大きな正準 Hamilton 力学系から見ると、 $C$  が保存するのは共役な変数  $P$  が Hamiltonian に含まれないからだと解釈される。このような  $P$  のことを [1] では *phantom* と呼んでいた。

理想流体/プラズマは非正準 Hamilton 力学系であり [3]、これらは *Clebsch 表現* を使うことで正準化できる [6–9]。言い換えると、Clebsch 変数からなる正準 Hamilton 力学系が、もとの理想流体/プラズマの非正準 Hamilton 力学系を部分代数として含む (2.2 節を参照)。この Clebsch 変数は、数密度と共役なもの以外すべて Lie-drag されるようにとることができるため、Casimir を構成するのに便利である [10, 11]。前

<sup>\*1</sup> 粘性が無いバロトロピー流体のこと。

述の enstrophy は 2 次元流体に対して定義されていたが, Clebsch 表現を用いることで 3 次元流体に対して拡張することができる (2.4 節を参照).

## 1.2 研究目的

ここまでの理論は, 非相対論的な古典系に対しては既にある程度確立されている. しかし, 現実には相対論的なプラズマを扱う場合も多い. 降着円盤やガンマ線バーストなど, 巨大質量天体に関係のある天体現象がその代表例である.

相対論的な理想流体を考えたとき, Casimir は相対論的に補正される可能性がある. 例えば helicity の場合は, 従来の helicity は相対論的には保存せずに, 相対論的に修正された helicity が Casimir となることが分かっている [12]. 通常の 2 次元流体の enstrophy が相対論的にどう修正されるかは知られているが [13, 14], 3 次元流体に一般化した enstrophy についてはまだ分かっていない. そこで本研究では, 3 次元流体での enstrophy が相対論的效果によってどのように変わるかを調べる.

## 1.3 本研究で扱うモデルについて

(電氣的に中性な) 理想流体と (電磁場との相互作用のある) プラズマは, 平行に議論することができる. 以下, 本研究ではプラズマについて議論していく. 本研究では「プラズマ」という用語は, 単一種類の荷電粒子から構成されていてエネルギー散逸 (粘性抵抗や電気抵抗) のないバロトロピー流体のことを指す. helicity を相対論化する論文 [12] と同じモデルを使い, 結果を比較したかったからだ. 荷電粒子の電荷  $e$  としてゼロを代入すると理想流体のモデルとなるため, この研究は理想流体についてもほとんどそのまま適用できる. また, 正電荷と負電荷の 2 種の流体が混合したモデルを考えることで, 理想 MHD に対しても同様に拡張できることも追記しておく [15].



## 第 2 章

# 非相対論的プラズマの Clebsch 表現と enstrophy

### 2.1 Lagrange 力学系と正準 Hamilton 力学系

古典力学では Newton の運動方程式

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (2.1)$$

を出発点とする。質量  $m$  の質点 (大きさを持たない粒子) の各時刻  $t$  での位置を  $\mathbf{r}(t)$ , その 1 回微分を  $\dot{\mathbf{r}}$ , 2 回微分を  $\ddot{\mathbf{r}}$  とし、関数  $\mathbf{r}$  についての 2 階の常微分方程式を解く問題に帰着される。右辺の  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  は「力 (ちから)」と呼ばれるもので、問題設定に応じて関数形を定める: 例えば、速度に比例する空気抵抗 (粘性抵抗) を受けて一様重力場  $\mathbf{g}$  中を自由落下する物体の場合、粘性抵抗の比例係数を  $b$  とすると  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) := -b\mathbf{v} + \mathbf{g}$  とする。特に、或るスカラー関数  $U(\mathbf{x})$  を用いて  $\mathbf{F} = -\nabla U$  と書ける場合、この  $\mathbf{F}$  を保存力と呼ぶ。以下、この論文で扱うのは力  $\mathbf{F}$  が保存力である場合のみである。

注意点として、Newton の運動方程式 (2.1) は慣性系でなければ成り立たない。また、デカルト座標では  $\ddot{\mathbf{r}}$  は単純な形になるが、極座標や球座標など一般の座標系で考えようとした場合、その形は複雑になる。

Newton の運動方程式を数学的に整備して、より一般的な基本公式にまとめたのが、解析力学である。解析力学は Lagrange 力学と Hamilton 力学から構成されており、互いに密接に関係しているが相異なる定式化である。

Lagrange 力学では「すべての力学系に対して、作用 (action) と呼ばれる或る積分  $S$  が存在して、 $S$  は現実の運動に対して停留値をとる」という**最小作用の原理**を出発点とする。力学系の状態を決定するために必要十分なだけ集めたパラメタ (**一般化座標**) の集合を考える。力学系の時間発展は時刻  $t$  から一般化座標への関数  $q$  で表し、作用  $S$  は関数を引数として実数値を返す汎関数

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.2)$$

で定義される。これを**作用汎関数**と呼ぶこともある。  $L(x, v)$  は Lagrangian と呼ばれる関数である。  $S$  が停留値をとるような  $q$  においては微小な関数  $\delta q$  を足しても  $S$  は 1 次のオーダーでは変化しないから、  $\delta S = 0$  を計算することで  $S[q]$  が停留値をとる関数  $q$  を求める微分方程式 (**Euler-Lagrange 方程式**) が得られる。有限自由度  $q = \{q_i\}_i$  の場合

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad (2.3)$$

は**一般化運動量**と呼ばれる。無限自由度の場合には、一般化運動量をどう定めると良いかは自明ではない。流体/プラズマは無限自由度の系であるため、本研究においてもこの点は苦労した。質点系の場合、Lagrangian を (運動エネルギー) - (ポテンシャルエネルギー) で定義することで、Euler-Lagrange 方程式が Newton の運動方程式と一致する。

Hamilton 力学では、一般化座標と一般化運動量の両方を基本変数として運動を記述する。有限自由度の系の Lagrangian  $L(x, v)$  に対して *Hamiltonian* を

$$H(x, p) := \sum_i v_i p_i - L(x, v) \quad (2.4)$$

で定めて最小作用の原理を計算すると

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

が得られる。これは**正準方程式**と呼ばれ、Euler-Lagrange 方程式と等価である。

相空間上の関数  $f, g$  に対して、*Poisson 括弧* を関数

$$\{f, g\} := \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \quad (2.6)$$

で定める。Poisson 括弧は、双線型性・反対称性・Jacobi の恒等式・Leibniz 則を満たす：任意の相空間上の関数  $f, g, h$  に対して

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad (2.7a)$$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0, \quad (2.7b)$$

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}. \quad (2.7c)$$

$H$  を時間不変な Hamiltonian,  $F$  を任意の物理量としたとき、 $F$  の時間発展は

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \quad (2.8)$$

で記述される。

一般化座標と一般化運動量を  $z = (q, p)$  とまとめると

$$J_c := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

を用いて

$$\frac{d}{dt} z = J_c \partial_z H(z) \quad (2.10)$$

と書くことができる。Poisson 括弧は、 $z$  の関数  $F, G$  に対して

$$\{F, G\} = (\partial_z F, J_c \partial_z G) \quad (2.11)$$

と書き直せる。2.2 節では、式 (2.10), (2.11) をもとに Hamilton 力学系を一般化していく。

## 2.2 非正準 Hamilton 力学系と Casimir

*Hamilton 力学系*とは、相空間での時間発展が

$$\frac{d}{dt} z = J_z \partial_z H(z) \quad (2.12)$$

と書けるような力学系を指す.  $z$  は相空間の座標,  $H$  は  $z$  の関数 (*Hamiltonian*),  $J_z$  は各点で反交換関係と Jacobi の恒等式を満たすような作用素 (*Poisson 作用素*) である. 特に

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

となる特殊な Hamilton 力学系 ( $I$  は恒等作用素) を **正準 Hamilton 力学系** と呼び, 2.1 節で述べていたものはこれに該当する. 正準ではない Hamilton 力学系のことを **非正準 Hamilton 力学系** と呼ぶ.

Poisson 括弧は,  $z$  の関数  $F, G$  に対して

$$\{F, G\} := (\partial_z F, J_z \partial_z G) \quad (2.14)$$

で定義する. 任意の関数  $F$  に対して  $\{F, C\} = 0$  となるような関数  $C$  のことを *Casimir* と呼ぶ. これは  $J_z C = 0$  とも書けるため, Casimir 全体の集合は  $\ker J_z$  と一致する.

有限自由度の Hamilton 力学系について,  $z$  の要素数を  $K$  とすると,  $\text{rank}(J_z) = 2N \leq K$  のように Poisson 作用素の rank は偶数となっている. さらに, Lie によって示された Darboux の定理の一般化 [16, 17] から,  $J_z$  は局所的に以下の形に変形できる:

$$J_z = \begin{pmatrix} 0_N & I_N & 0 \\ -I_N & 0_N & 0 \\ 0 & 0 & 0_{K-2N} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

このとき,  $K - 2N$  個の退化した変数が Casimir となっている [3].

## 2.3 非相対論的理想流体の Clebsch 表現

簡単のため, 3次元の理想流体の占める領域を 3次元トーラス  $\mathbb{T}^3$  とする. 理想流体は粒子数密度  $n$  と速度場  $\mathbf{V}$  で記述される. これらの時間発展は Euler 方程式に従う:

$$\partial_t n = -\nabla \cdot (n\mathbf{V}), \quad (2.16)$$

$$\partial_t \mathbf{V} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \frac{1}{m} \nabla \tilde{h}. \quad (2.17)$$

ただし,  $m$  は理想流体を構成する粒子の質量で,  $c$  は光速である. また単位粒子数あたりの enthalpy  $\tilde{h}$  は  $n$  のみに依存すると仮定しており, 圧力  $p$  との間には  $n^{-1} \nabla p = \nabla \tilde{h}$  なる関係がある\*1. 渦度  $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{V}$  を用いて

$$C(t) := \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d^3x \quad (2.18)$$

で定義される物理量  $C(t)$  は *helicity* と呼ばれる. helicity は磁力線の絡みつき (Gauss linking number) に対応している [12, 18, 19].  $(n, \mathbf{V})$  で記述される Hamilton 力学系は非正準で, 全粒子数と helicity が Casimir であることが知られている [3].

この非正準 Hamilton 力学系は, 以下で定義する正準 Hamilton 力学系の部分系である [10]. 仮想的なポテンシャル場を導入して, 相空間を

$$\left\{ \xi = (n, \varphi, \Lambda^1, \sigma_1, \Lambda^2, \sigma_2)^T \mid n, \Lambda^k : 3\text{-form}, \varphi, \sigma_k : 0\text{-form} \right\} \quad (2.19)$$

\*1 関係式  $n^{-1} \nabla p = \nabla \tilde{h}$  の相対論版は, 補遺 A.2 の式 (A.24) で導出している.

で定義する. Hamiltonian  $H$  と, 運動量場の 1-form  $\mathcal{P} \leftrightarrow m\mathbf{V}$  は,

$$\mathcal{P} := d\varphi + \lambda^1 d\sigma_1 + \lambda^2 d\sigma_2 \quad \text{with} \quad \lambda^k := \frac{(\Lambda^k)^*}{n^*}, \quad (2.20)$$

$$H(\xi) := \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \frac{1}{2} i_{\mathbf{V}} \mathcal{P} + \varepsilon(n^*) \right] n \quad (2.21)$$

で定める. 単位粒子数あたりの内部エネルギー  $\varepsilon$  は, 単位粒子数あたりの enthalpy  $\tilde{h}$  と関係式  $\tilde{h}(n^*) = \frac{\partial(n^* \varepsilon(n^*))}{\partial n^*}$  で結びついている. スカラー関数  $n^*$  は,  $n = n^* \text{vol}^3$  が成り立つという意味で 3-form  $n$  の成分である. これらを Hamilton 方程式

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = J \partial_{\xi} H |_{\xi(t)}, \quad (2.22)$$

$$J := J_c \oplus J_c \oplus J_c, \quad J_c := \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

に代入すると, 運動方程式は

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} n = 0, \quad (2.24a)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \Lambda^k = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \sigma_k = 0, \quad (2.24b)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \varphi = \frac{1}{2} m V^2 - \tilde{h} \quad (2.24c)$$

と書ける.  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} := \partial_t + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  は時間変化と Lie 微分<sup>\*2</sup> を足したものであり, 非相対論のモデルでは, 式 (2.24a), (2.24b) のように  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}}$  を作用させてゼロになることを「Lie-drag される」と言うことにする. 式 (2.19) 以降で述べてきた, ポテンシャルを用いて流体を記述する方法を *Clebsch 表現* という. Clebsch 表現で導入されたポテンシャル場  $\varphi, \Lambda^k, \sigma_k$  (あるいは  $\varphi, \lambda^k, \sigma_k$ ) のことを, *Clebsch パラメータ* あるいは *Clebsch 変数* と呼ぶ. 粒子数保存則の式 (2.16) は式 (2.24a) そのものである. Euler 方程式 (2.17) は式 (2.24b), (2.24c) から導出できる. 数学的には, 一般の 3 次元ベクトル場が式 (2.20) の形で表せる [9]. 従って, Euler 方程式で定義される非正準 Hamilton 力学系は, Clebsch 表現で定義される正準 Hamilton 力学系の部分系である.

$(n, \mathbf{V})$  で記述したときに Casimir であった保存量は, Clebsch 表現で記述したときには *ゲージ対称性* として解釈される. 詳細な議論は, [10, Sec. 3.2]などを参照のこと.

## 2.4 3次元の流れに対する enstrophy

2次元の流れにおいては, helicity は自明にゼロとなる. 例えば,  $z$  方向に流れがなく物理量も  $z$  方向に依存しない系を考えると

$$\mathbf{V} = (v_x, v_y, 0)^T, \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = (\partial_x v_y - \partial_y v_x) \mathbf{e}_z. \quad (2.26)$$

$\mathbf{V}$  と  $\boldsymbol{\omega}$  は垂直なので, 式 (2.18) で定義された helicity  $C(t)$  は恒等的にゼロとなる. helicity が意味を持たなくなる代わりに, *enstrophy* という別の運動の定数が現れる. enstrophy は

$$\int_{\Sigma(t)} f\left(\frac{\omega_z}{n^*}\right) n^* d^2x \quad (2.27)$$

<sup>\*2</sup> Lie 微分とは, 微分幾何学では  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}} = di_{\mathbf{V}} + i_{\mathbf{V}}d$  と定義される作用素. スカラー関数 (0-form) に対しては  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \sigma_k = \partial_t \sigma_k + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma_k$  のように,  $n$ -form の成分に対しては  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \Lambda^k = [\partial_t (\Lambda^k)^* + \nabla \cdot ((\Lambda^k)^* \mathbf{V})] \text{vol}$  のように書き下される. なお, 式 (2.24b) には  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \Lambda^k = 0$  という式が含まれているが,  $\lambda^k$  の定義式 (2.20) と式 (2.24a) から, これは  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \lambda^k = 0$  と等価であることが導ける.

で定義される. 式 (2.26) を意識して  $\omega_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x$  が渦度の  $z$  方向成分,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は任意の滑らかな関数,  $\Sigma(t) \subset \mathbb{R}^2$  は 2 次元流体と共に動く任意の領域とする.  $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  とした最も単純な場合では, 式 (2.27) は以下のように書き直される:

$$\int_{\Sigma(t)} \omega_z d^2x = \int_{\partial\Sigma(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.28)$$

式 (2.28) の右辺は  $\Sigma(t)$  を貫く渦糸の本数を表しており, これが保存することは *Kelvin の循環定理* (Kelvin's circulation theorem) として知られている. 密度一定の流れで  $f(x) = x^2$  とした場合の式 (2.27) は  $\int_{\Sigma(t)} (\omega_z)^2 d^2x$  という形となり, これが伝統的に *enstrophy* と呼ばれていたものである. 式 (2.28) は, 本来はこれと区別して「一般化 *enstrophy*」「*cross-enstrophy*」などと呼ばれるが, 命名を簡単にするために本研究では単に *enstrophy* と呼ぶことにする.

*enstrophy* を一般の 3 次元の流れに拡張するために, Clebsch 表現に従って渦度を 2 つに分解する必要がある. 式 (2.20) で表される 3 次元の流れ  $\mathbf{V}$  に対して,  $\tilde{Q}_1(t)$  と  $\tilde{Q}_2(t)$  を以下のように定義する:

$$\tilde{Q}_1(t) := \int_{\Omega(t)} f(\vartheta_1) n, \quad \vartheta_1 := \frac{(\omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*}, \quad \omega_1 := d\lambda^1 \wedge d\sigma_1 \quad (2.29a)$$

$$\tilde{Q}_2(t) := \int_{\Omega(t)} f(\vartheta_2) n, \quad \vartheta_2 := \frac{(\omega_2 \wedge d\sigma_1)^*}{n^*}, \quad \omega_2 := d\lambda^2 \wedge d\sigma_2. \quad (2.29b)$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は滑らかな任意関数,  $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$  は流体と共に動く任意領域としている.  $\tilde{Q}_1(t)$  と  $\tilde{Q}_2(t)$  は Lie-drag される Clebsch パラメタの積で構成されているから, 両方とも保存する.

2 次元流体との対応を見るために, 3 次元空間中で  $z$  方向に一様で  $xy$  方向にのみ運動する流体を考える.  $\sigma_2 = z$  ととれば,  $\tilde{Q}_1(t)$  は 2 次元流体の *enstrophy* と一致する [10]. この意味において, ここで定義した  $\tilde{Q}_k(t)$  は 2 次元流体の *enstrophy* の拡張となっている.  $\mathbf{V}$  が 3 次元空間に埋め込まれた 2 次元の流れでない場合についても,  $\lambda^1$  または  $\lambda^2$  がゼロの領域では, 従来の *enstrophy* 同様に  $\tilde{Q}_2(t)$  または  $\tilde{Q}_1(t)$  が渦糸の本数を表す. しかし,  $\lambda^1$  も  $\lambda^2$  もゼロでない領域では,  $\tilde{Q}_k(t)$  は観測可能な量にはならない. というのも, 与えられた流れに対して Clebsch 表現は一意に定まらないからである.

*enstrophy* を 3 次元の流れに拡張しようというアイデアは, [10, 11] に由来している. この論文では 2 次元と 3 次元の間のクラスとして *epi-2D flow* が導入されており, *helicity* と *enstrophy* の相互作用が調べられている.

$\tilde{Q}_1(t)$  と  $\tilde{Q}_2(t)$  の議論は同様に行うことができるので, 以下では  $\tilde{Q}_1(t)$  のみを扱うことにする. その際は,  $\tilde{Q}_1(t)$  の添字を省略して  $\tilde{Q}(t)$  と書く.

## 2.5 非相対論的プラズマの Clebsch 表現およびその導出

2.3 節では Clebsch 表現を天下りの的に与えたが, この節ではその導出を概観する. ここまでは電氣的に中性な流体の話をしてきたが, 次章以降への接続を考えて, この節ではプラズマを扱う.

質点の力学系は 2.1 で見たとおり Lagrangian を用いて記述できた. 流体/プラズマでこれを真似て Lagrangian を構成すると, Lagrange 描像では上手くいくが, Euler 描像では素朴にやると上手くいかずに運動量を持つような流れを表せない [20]. Serrin [6] が先駆的に提唱したように, Lagrange の未定乗数として機能する仮想的なポテンシャル場を導入し, 速度場  $\mathbf{V}$  に拘束条件を与えると, Euler 描像の流体/プラ

ズマを Lagrangian で表せることが分かっている．具体的には

$$\tilde{L}_F = \left[ \frac{1}{2}mV^2 - \varepsilon - \frac{e}{c}(\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) - D_t \varphi - \sum_k \lambda^k D_t \sigma_k \right] n, \quad (2.30)$$

$$\tilde{L}_{EM} = \frac{1}{2c}E^2 - \frac{1}{2}B^2 \quad (2.31)$$

のように Lagrangian 密度を定める．作用汎関数は

$$\tilde{S}[n, \mathbf{V}, \varphi, \lambda^k, \sigma_k] := \int (\tilde{L}_F + \tilde{L}_{EM}) d^4x. \quad (2.32)$$

ただし， $D_t$  は Lagrange 微分  $D_t := \partial_t + \mathbf{V}(x) \cdot \nabla$  である． $\varphi, \lambda^k, \sigma_k$  が Lagrange の未定乗数であり，2.3 節で導入された Clebsch パラメタである．この作用汎関数  $\tilde{S}$  に対して最小作用の原理を計算すると，以下の関係式が得られる：

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0, \quad (2.33a)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \lambda^k = (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma_k = 0, \quad (2.33b)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \varphi = \frac{1}{2}mV^2 - \tilde{h} - \frac{e}{c}(\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}), \quad (2.33c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = en, \quad (2.33d)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \frac{e}{c} n \mathbf{V}, \quad (2.33e)$$

$$m\mathbf{V} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \nabla \varphi + \sum_k \lambda^k \nabla \sigma_k. \quad (2.33f)$$

式 (2.33a) は粒子数保存則，式 (2.33d), (2.33e) は Maxwell 方程式を表している．式 (2.33b), (2.33c) は Clebsch パラメタの時間発展を表している．

式 (2.33f) は Clebsch パラメタと現実の物理量との対応を表している．これをもとに非相対論的プラズマの正準運動量場を

$$\mathbf{P} := m\mathbf{V} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (2.34)$$

で定めると，

$$\mathbf{P} = \nabla \varphi + \sum_k \lambda^k \nabla \sigma_k \quad (2.35)$$

のように正準運動量場が Clebsch 表現される．さらに，式 (2.33) の関係式を組み合わせることで，Euler 方程式

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \left( \nabla \varphi + \sum_k \lambda^k \nabla \sigma_k \right)_i = -\nabla \left( \tilde{h} + \frac{e}{c} \phi \right)_i + \frac{e}{c} v^j \partial_i A_j \quad (2.36)$$

$$\therefore (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) m\mathbf{V} = -\nabla \tilde{h} + \frac{e}{c} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2.37)$$

が得られることが確認できる．2.3 節で導入していた Clebsch 表現は，この節で得られたもので  $e = 0$  としたものである．

## 第3章

# helicity の相対論化

ここまでは非相対論的流体を見てきたが、[12]において相対論的 helicity が定式化された。相対論的なモデルでは、従来の helicity は保存せず、相対論的に修正された helicity が保存することが示された。ここまでは電氣的に中性の理想流体を主に扱ってきたが、これ以降の章ではプラズマを扱う。1.3節で言及した通り、プラズマのモデルとしては、単一種類の荷電粒子から構成されていてエネルギー散逸 (粘性抵抗や電気抵抗) のないバロトロピー流体を採用する。

$\gamma$  を Lorentz 因子,  $h$  を enthalpy 密度,  $\mathcal{U} := \gamma(c\partial_0 + V^i\partial_i)$  を固有速度場,  $A^\mu$  を電磁ポテンシャルとする。1-form  $\mathcal{P} := [(h/c^2)\mathcal{U}_\mu + (e/c)A_\mu] dx^\mu$  が正準運動量場を表し, 2-form  $d\mathcal{P}$  が渦度を表す。非相対論における渦度は3成分だったが  $d\mathcal{P}$  は6成分あり, 基底  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$  に対応する成分 (いわゆる空間成分) が非相対論における渦度に対応する。3-form  $\mathcal{K} := \mathcal{P} \wedge d\mathcal{P}$  の4成分を  $\mathcal{K}^\mu$  で書くとする。非相対論的 helicity は

$$C(t) = \int_{X(t)} \mathcal{P} \wedge d\mathcal{P} = \int_{X(t)} \mathcal{K}^0 d^3x \quad (3.1)$$

と記述される。ここで, 積分範囲  $X(t)$  は4次元の Lorentz 多様体中の3次元超平面に含まれており, Lorentz 不変ではない。その時間発展は

$$\frac{d}{dt}C(t) = -2 \int_{X(t)} \theta \mathcal{B} \cdot \nabla \gamma^{-1} d^3x \quad (3.2)$$

となる [12]。  $\mathcal{B} := \nabla \times (\mathcal{P}^i)$  は  $d\mathcal{P}$  の空間成分を指している。またここでは, スカラー関数  $\theta$  を用いて  $TdS = d\theta$  と記述できる準静的な熱的相互作用を仮定している ( $S$  は entropy,  $T$  は温度)。  $C(t)$  は, 非相対論的極限  $\gamma \rightarrow 1$  では保存するが, 一般には保存しない。

そして, 相対論的 helicity は以下のように定義される:

$$\mathfrak{C}(s) := \int_{V(s)} \mathcal{P} \wedge d\mathcal{P}. \quad (3.3)$$

積分範囲  $V(s)$  は, 領域  $V_0$  をベクトル場  $\mathcal{U}$  によって固有時間  $s$  だけ押し流した3次元部分多様体として定義されるものであり, Lorentz 不変である。実際, その時間発展は

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{C}(s) = c^{-1} \int_{\partial V(s)} \left( h + \frac{e}{c} i\mathcal{U}A - \theta \right) d\mathcal{P} \quad (3.4)$$

となり, もし  $\text{supp } d\mathcal{P} \cap X(0) \subset V_0$  であれば  $\mathfrak{C}(s)$  は運動の定数となる [12]。

[12] では, 慣性系での時刻  $t$  一定の超平面のことを  $t$ -plane, 固有時間  $s$  一定の超曲面のことを  $s$ -plane と呼んでいる。この論文の肝は, 積分範囲を  $t$ -plane から  $s$ -plane に取り直すことで, 相対論的に妥当な helicity に定義し直せたこと, と言って良いだろう。





## 第 4 章

# 相対論的プラズマの Clebsch 表現

2.4 節で定義された 3 次元の流れに対する enstrophy は、定義する際に Clebsch 表現を用いるものであった。この章では、3 次元の流れに対する enstrophy を相対論化する準備段階として、相対論的プラズマの Clebsch 表現の一般論を構築する。非相対論的プラズマの Clebsch 表現は最小作用の原理から求まるものだった [6, 7, 20]。ここでもそれに倣い、まず Lorentz 不変な作用汎関数を構築してから、最小作用の原理を計算する、という手順で導出する。最小作用の原理を計算する上では各物理量の成分を直接扱った方が便利なので、この章では微分形式を用いた記法ではなくテンソル計算の記法を用いることにする\*1。

### 4.1 状況設定

符号  $(+, -, -, -)$  の Minkowski 空間  $M = \mathbb{R}^4$  を、プラズマの存在する 4 次元時空とする。光速度を  $c$  で表し、空間  $M$  の自然な座標系として  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  を導入する。ここで「自然な座標系」というのは、計量  $\eta$  の表示が  $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$  となることを指す。本論文では、静止質量  $m$ 、電荷  $e$ \*2 の単一種類の粒子からなるプラズマを考えることとする。

プラズマの振る舞いは、粒子数密度と関係した場  $n(x)$ 、粒子速度場  $v^j(x)$ 、電磁ポテンシャル場  $A^\mu(x)$  で表される。静止系からみた非相対論的な四元速度場  $u^\mu(x)$  と相対論的な四元速度場  $\mathcal{U}^\mu(x)$  は、それぞれ以下のように定義される：

$$u^\mu(x) := (c, v^j(x)), \quad \mathcal{U}^\mu(x) := \gamma(x)u^\mu(x). \quad (4.1)$$

ただし、 $\gamma(x)$  は Lorentz 因子である：

$$\gamma(x) := \left(1 - \frac{\mathbf{V}(x)^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

ここで  $\mathcal{U}^\mu(x)$  の Lorentz ノルムは各点で  $c$  に規格化されていることに注意する。また、四元ベクトル  $n\mathcal{U}^\mu$  のうち\*3、時間成分  $n\mathcal{U}^0 = \gamma n$  が粒子数密度、空間成分  $n\mathcal{U}^j = \gamma n v^j$  が流束密度を指す。つまり、非相対論の  $n$  と相対論の  $n\mathcal{U}^0 = \gamma n$  が対応しており、 $n$  の定義には  $\gamma$  倍のズレがある。

単位粒子数あたりの内部エネルギーを  $\mathcal{E}$  とし、本研究では  $\mathcal{E}$  が数密度  $n$  にのみ各点で依存していると仮定する。単位粒子数あたりの enthalpy  $h(n)$  は、

$$h := \frac{\partial(n\mathcal{E}(n))}{\partial n} = \mathcal{E} + n\mathcal{E}' \quad (4.3)$$

\*1 次の第 5 章では、幾何学的意味の分かりやすい微分形式を用いた記法を使っていくことになる。

\*2 ここでの  $e$  は、必ずしも素電荷  $1.602 \times 10^{-19}$  C とは限らない。

\*3 微分幾何学の記法では  $i_{\mathcal{U}}n$  なる 3-form.

で定義される。内部エネルギー  $\mathcal{E}$  と圧力  $p$  の関係は、熱力学的関係式  $\mathcal{E} = - \int p d(n^{-1})$  で結びついているから、

$$h = \mathcal{E} + \frac{1}{n} p \quad (4.4)$$

と書くこともできる。

非相対論的な場合の内部エネルギー  $\varepsilon$  および enthalpy  $\tilde{h}$  との関係は、

$$\mathcal{E} = mc^2 + \varepsilon, \quad (4.5)$$

$$h = mc^2 + \tilde{h} \quad (4.6)$$

で表される。両方とも定数  $mc^2$  ぶんのズレがある。

## 4.2 最小作用の原理

ここで、相対論的プラズマの Clebsch パラメタ  $\varphi(x)$ ,  $\lambda^k(x)$ ,  $\sigma_k(x)$  ( $k = 1, 2$ ) を、非相対論的プラズマの場合 (2.5 節) を真似て導入する。これらのスカラー関数たちは、Lagrange の未定乗数として、相空間上の軌道に拘束条件を課すことになる。

非相対論的な流体の Lagrangian 密度は

$$\tilde{L}_F = \left[ \frac{1}{2} m V^2 - \varepsilon - \frac{e}{c} (\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) - D_t \varphi - \sum_k \lambda^k D_t \sigma_k \right] n, \quad (2.30)$$

$$\tilde{L}_{EM} = \frac{1}{2c} E^2 - \frac{1}{2} B^2 \quad (2.31)$$

であった。これとの類推から (詳細は 4.4 節参照)、相対論的な場合の Lagrangian 密度を以下のように定める:

$$\begin{aligned} L_F &:= -n U^\mu \left( \frac{1}{c^2} \mathcal{E}(n) U_\mu + \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right) \\ &= -n \left[ \mathcal{E}(n) + U^\mu \left( \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$L_{EM} := -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

ただし、 $F$  は電磁テンソル  $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  である。相対論的なプラズマの作用汎関数は

$$S[n, v^j, \varphi, \lambda^k, \sigma_k, A^\mu] := \int (L_F(x) + L_{EM}(x)) d^4x \quad (4.9)$$

で定義する。

ここで、作用汎関数  $S$  の引数が  $U^\mu(x)$  ではなく  $v^j(x)$  であることに注意する。 $U^\mu(x)$  の各成分は自由に決めてよいものではなく、第 0 成分  $U^0(x)$  が正、 $U^\mu(x)$  の Lorentz ノルムが定数  $c$ 、という 2 つの制約条件を満たさなくてはならない。もし  $S$  の引数を  $U^\mu(x)$  としてしまうと、このような条件のもとで汎関数の停留点を探す問題となってしまい難しい。しかし、 $U^\mu(x)$  は  $v^j(x)$  を用いて表すことができ、 $v^j(x)$  は半径  $c$  の 3 次元開球の任意の値をとってよい。 $v^j(x)$  を引数とすることで条件付きではないシンプルな問題となることから、作用汎関数  $S$  の引数は  $v^j(x)$  とした。

式 (4.9) で定められた作用汎関数に対して最小作用の原理を適用すると、以下の関係式が得られた:

$$\partial_\mu(n\mathcal{U}^\mu) = 0, \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{U}^\mu \partial_\mu \lambda^k = \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \sigma_k = 0, \quad (4.10b)$$

$$\mathcal{U}^\mu \partial_\mu \varphi = -h(n) - \frac{e}{c} \mathcal{U}^\mu A_\mu, \quad (4.10c)$$

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \frac{e}{c} n \mathcal{U}_\mu, \quad (4.10d)$$

$$\frac{1}{c^2} h(n) \mathcal{U}_\mu + \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k = 0. \quad (4.10e)$$

途中計算は補遺 A.1 を参照すること. 式 (4.10a) は粒子数保存則を, 式 (4.10d) は Maxwell 方程式を表している. 式 (4.10b) と (4.10c) は Clebsch パラメタの時間発展を表している. 式 (4.10e) は, Clebsch パラメタと現実の物理量との対応を表している.

### 4.3 既存の物理量との対応

式 (4.10) をもとに, 相対論的プラズマの正準運動量場を

$$\mathcal{P}^\mu := \frac{1}{c^2} h(n) \mathcal{U}^\mu + \frac{e}{c} A^\mu \quad (4.11)$$

で定義する. このように定義すると, 正準運動量場を Clebsch パラメタ  $\varphi(x)$ ,  $\lambda^k(x)$ ,  $\sigma_k(x)$  で表すことができる:

$$\mathcal{P}_\mu = -\partial_\mu \varphi - \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k. \quad (4.12)$$

式 (4.10a)–(4.10c), (4.10e) および enthalpy  $h$  の定義を用いると, 一般化オームの法則

$$\partial_\nu \left[ \frac{1}{c^2} n h(n) \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu \right] = \frac{e}{c} n \mathcal{U}_\nu F^{\mu\nu} + \partial^\mu p \quad (4.13)$$

が得られる. 途中計算は補遺 A.2 を参照すること. 式 (4.13) の左辺の  $(1/c^2) n h(n) \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu$  は流体のエネルギー運動量テンソルに対応している. この式ではエネルギー・運動量のバランスを考える上で電磁気力を外力として扱っているということだ.

正準運動量場  $\mathcal{P}$  を用いることで式 (4.13) は以下のように書き直すことができる:

$$n \mathcal{U}^\nu \partial_\nu \mathcal{P}^\mu = \frac{e}{c} n \mathcal{U}_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu p. \quad (4.14)$$

中性流体 ( $e = 0$ ) においては, これは Euler 方程式となっている.

Clebsch 表現の符号は, 非相対論の場合の式 (2.20) と相対論の場合の式 (4.12) では逆になっているように見える. これは, 非相対論的運動量場の 3 成分は相対論的運動量場の空間成分に対応していることと, Lorentz 計量  $\eta$  の空間成分が負であることに因る. 実際, このようにしないと 4.4 節で示すように非相対論極限をとった際に非相対論の Clebsch 表現 (2.33) と一致する. 符号の流儀の違いを除けば, ここで導出した Clebsch 表現は [15] などの先行文献と一致している.

以上のとおり, 前節で導かれた相対論における Clebsch 表現から一般化オームの法則が導けることが確認できた.

## 4.4 非相対論的な場合との対応

### 4.4.1 最小作用の原理に用いた Lagrangian 密度の対応

非相対論的な場合の Lagrangian 密度は

$$\tilde{L}_F = \left[ \frac{1}{2} m V^2 - \varepsilon - \frac{e}{c} (\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) - D_t \varphi - \sum_k \lambda^k D_t \sigma_k \right] \tilde{n}, \quad (2.30)$$

$$\tilde{L}_{EM} = \frac{1}{2c} E^2 - \frac{1}{2} B^2, \quad (2.31)$$

相対論的な場合の Lagrangian 密度は

$$L_F = -n \left[ \mathcal{E}(n) + \mathcal{U}^\mu \left( \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right) \right], \quad (4.7)$$

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

であった。後者の非相対論極限が前者に一致することを示しておく。

4.1 節で述べたとおり、非相対論と相対論で  $n$  の定義に  $\gamma$  だけ異なり、これらが混在するのは好ましくない。この節では特別に、非相対論での  $n$  を  $\tilde{n}$  で書くことにする。このとき  $\tilde{n} = n\gamma$  が成り立つ。

まず、電磁場の Lagrangian 密度  $\tilde{L}_{EM}$ ,  $L_{EM}$  の対応を見ておく。電磁ポテンシャルは  $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$  であり、電場  $\mathbf{E}$  および磁場  $\mathbf{B}$  は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.16)$$

電磁テンソル  $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  とは

$$F_{0i} = \frac{1}{c} E^i, \quad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k \quad (4.17)$$

のように結びついている。 $\epsilon_{ijk}$  は完全反対称テンソルである。よって、

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} (2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}) = -\frac{1}{4} \times 2 \left( -c \frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) = \tilde{L}_{EM} \quad (4.18)$$

となっており、 $\tilde{L}_{EM}$ ,  $L_{EM}$  は近似なしに完全に一致する。

次に、流体の Lagrangian 密度  $\tilde{L}_F$ ,  $L_F$  の対応を見る。 $\mathcal{U}^\mu = \gamma(c, \mathbf{V})$  を思い出すと

$$\mathcal{U}^\mu A_\mu = \gamma(\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}), \quad (4.19a)$$

$$\mathcal{U}^\mu \partial_\mu \varphi = \gamma(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \varphi = \gamma D_t \varphi, \quad (4.19b)$$

$$\mathcal{U}^\mu \partial_\mu \sigma_k = \gamma(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \sigma_k = \gamma D_t \sigma_k \quad (4.19c)$$

より

$$L_F = -n\gamma \left[ \mathcal{E}(n) \frac{1}{\gamma} + \frac{e}{c} (\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) + D_t \varphi + \sum_k \lambda^k D_t \sigma_k \right] \quad (4.20)$$

と式変形される。全体の先頭に  $\gamma$  が括り出されているのは、相対論的な場合における  $\tilde{n} = n\gamma$  が非相対論的な場合の  $n$  と一致するためである (詳細は 4.1 節参照)。式 (4.20) は式 (2.30) とほぼ一致しており、あと

は第1項の  $\mathcal{E}/\gamma$  の対応である. ここで初めて  $V \ll c$  なる近似を導入する (非相対論的極限). 内部エネルギーが  $\varepsilon/(mc^2) = \mathcal{O}(V^2/c^2)$  程度に小さいとすると

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\frac{1}{\gamma} &= (mc^2 + \varepsilon)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ &= mc^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{mc^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{V^4}{c^4}\right)\right) \\ &= mc^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{mc^2} - \frac{V^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{V^4}{c^4}\right)\right)\end{aligned}\quad (4.21)$$

が成り立つ. よって

$$\mathcal{E}\frac{1}{\gamma} \approx mc^2 + \varepsilon - \frac{1}{2}mV^2 \quad (4.22)$$

と近似することにする.  $mc^2$  は定数であるから, これは定数からのズレが見える最低次のオーダーでの近似である. この近似を適用すると

$$\begin{aligned}L_F &= -\tilde{n}\left[\mathcal{E}(n)\frac{1}{\gamma} + \frac{e}{c}(\phi - \mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) + D_t\varphi + \sum_k \lambda^k D_t\sigma_k\right] \\ &\approx -\tilde{n}\left[mc^2 + \varepsilon - \frac{1}{2}mV^2 + \frac{e}{c}(\phi - \mathbf{V}\cdot\mathbf{A}) + D_t\varphi + \sum_k \lambda^k D_t\sigma_k\right] \\ &= -\tilde{n}mc^2 + \tilde{L}_F\end{aligned}\quad (4.23)$$

となり,  $\tilde{L}_F$  と  $L_F$  は非相対論的極限では  $\tilde{n}mc^2$  ぶんの差を除いて一致する. この差はエネルギーを測る基準の差 ( $\varepsilon$  と  $\mathcal{E}$  の差, あるいは  $\tilde{h}$  と  $h$  の差) として解釈される.

#### 4.4.2 Clebsch 表現の対応

4.4.1 節で Lagrangian 密度が非相対論的極限で一致することを見たから, Clebsch 表現も非相対論的極限で一致することはほぼ明らかである. しかし念の為, この節で対応を確認しておく.

非相対論的な場合の Clebsch 表現は

$$\partial_t n + \nabla\cdot(n\mathbf{V}) = 0, \quad (2.33a)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V}\cdot\nabla)\lambda^k = (\partial_t + \mathbf{V}\cdot\nabla)\sigma_k = 0, \quad (2.33b)$$

$$(\partial_t + \mathbf{V}\cdot\nabla)\varphi = \frac{1}{2}mV^2 - \tilde{h} - \frac{e}{c}(\phi - \mathbf{V}\cdot\mathbf{A}), \quad (2.33c)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = en, \quad (2.33d)$$

$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E} = \frac{e}{c}n\mathbf{V}, \quad (2.33e)$$

$$m\mathbf{V} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \nabla\varphi + \sum_k \lambda^k \nabla\sigma_k, \quad (2.33f)$$

相対論的な場合の Clebsch 表現は

$$\partial_\mu(nU^\mu) = 0, \quad (4.10a)$$

$$U^\mu \partial_\mu \lambda^k = U^\mu \partial_\mu \sigma_k = 0, \quad (4.10b)$$

$$U^\mu \partial_\mu \varphi = -h(n) - \frac{e}{c} U^\mu A_\mu, \quad (4.10c)$$

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \frac{e}{c} n U_\mu, \quad (4.10d)$$

$$\frac{1}{c^2} h(n) U_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = -\partial_\mu \varphi - \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \quad (4.10e)$$

であった。

$nU^\mu = n\gamma(c, \mathbf{V}) = \tilde{n}(c, \mathbf{V})$  であるから、粒子数密度保存の式 (2.33a) と式 (4.10a)、および Maxwell 方程式 (2.33d), (2.33e) と式 (4.10d) は一致する。 $U^\mu \partial_\mu = \gamma(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla)$  であるから、 $\lambda^k, \sigma_k$  の時間変化の式 (2.33b) と式 (4.10b) も一致する。

$\varphi$  の時間変化について、式 (4.10c) は、式 (4.19) より

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla)\varphi = -h(n) \frac{1}{\gamma} - \frac{e}{c} (\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) \quad (4.24)$$

と変形できる。ここで出てくる  $h/\gamma$  は、 $\mathcal{E}/\gamma$  のときと同様に

$$\begin{aligned} h \frac{1}{\gamma} &= (mc^2 + \tilde{h}) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{\tilde{h}}{mc^2} - \frac{V^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{V^4}{c^4}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

を使って近似して

$$(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla)\varphi \approx -\left(mc^2 + \tilde{h} - \frac{1}{2}mV^2\right) - \frac{e}{c} (\phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) \quad (4.26)$$

を得る。式 (2.33c) と比較すると、定数  $mc^2$  を除いて一致していることが分かる。

## 第5章

# 相対論的プラズマの enstrophy

前章で得られた Clebsch 表現を用いると、相対論的枠組みの中で enstrophy がどのように振る舞うかを調べることができる。まず最初に従来の enstrophy を相対論的枠組みで記述してその時間発展の様子を調べる。そこで従来の enstrophy はもはや保存しないことが明らかになるので、相対論的に妥当な enstrophy を定義し直す。

### 5.1 数学的な道具の準備

この章以降では、微分幾何学に基づいた定式化をおこなう。0-form と 4-form はともに 1 成分なためベクトル解析では意識しないと違いが分かりにくいですが、0-form は単に各点に値が割り振られているのに対して 4-form は単位体積あたりの値で「密度」であるなど、その意味は明確に異なる。このように物理量の意味を理解しようとするとき微分形式で記述した方がわかりやすいため、この定式化を採用する。

まずは数学的なノテーションについて、 $M$  を一般の  $C^\infty$  級の微分多様体とする。

- $C^\infty$  級のベクトル場全体を  $\mathfrak{X}(M)$ ,
- $C^\infty$  級の  $k$  次微分形式 ( $k$ -form) 全体を  $\Omega^k(M)$ ,
- $C^\infty$  級のスカラー関数全体を  $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ,
- $\omega \in \Omega^k(M)$  の外微分を  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$  で表す。
- $\omega \in \Omega^k(M)$  と  $V \in \mathfrak{X}(M)$  の内部積  $i_V\omega \in \Omega^{k-1}(M)$  は次のように定める:
  - $k \geq 1$  のとき,  $(i_V\omega)(X_2, \dots, X_k) := \omega(V, X_2, \dots, X_k)$
  - $k = 0$  のとき,  $i_V\omega := 0$ .
- $V \in \mathfrak{X}(M)$  に沿った  $\omega \in \Omega^k(M)$  の Lie 微分を  $\mathcal{L}_V\omega \in \Omega^k(M)$  で表す。

Cartan 公式と呼ばれる等式  $\mathcal{L}_V = di_V + i_Vd$  で、外微分・内部積・Lie 微分が結びついている。ここまでのノテーションは Tu [21] に準ずるものとなっている。

多様体  $M$  の次元を  $n$  とし、これに体積形式  $\text{vol}^n \in \Omega^n(M)$  が定められているとする。体積形式とは  $M$  上の至るところゼロでない最高次 ( $n$  次) の微分形式で、体積を測る基準を与えるものである ( $M$  の  $n$  次元部分多様体を積分範囲として  $\text{vol}^n$  を積分したものを、その部分多様体の体積とする)。  $\alpha \in \Omega^n(M)$  に対して  $\alpha = f \text{vol}^n$  を満たすようなスカラー関数  $f$  はただ 1 つ存在するから、それを  $\alpha^*$  で表すことにする。これは  $k$ -form 全体と  $(n-k)$ -form 全体との間に同型写像を与える Hodge star  $*$  に由来するノテーションである。

## 5.2 状況設定

数学的な準備を終えたので、考えている物理的な状況に話を移す。第4章では最小作用の原理を出発点にして議論していたが、この章ではそこで導かれた Clebsch パラメタの時間発展に熱力学的な項を付け加えたものを出発点にする。ここに論理の飛躍があることに注意すること。

時空を表す多様体  $M = \mathbb{R}^4$ 、その大域的な座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 、標準的な Lorentz 計量  $\eta$ 、光速  $c$ 、プラズマを構成する荷電粒子の電荷  $e$  については、前章と同じとする。時空多様体  $M = \mathbb{R}^4$  に対して、体積形式  $\text{vol}^4 := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^4(M)$  を導入する。

プラズマの運動を表す相空間を

$$\{ (n, \varphi, \lambda^1, \sigma_1, \lambda^2, \sigma_2, A) \mid n \in \Omega^4(M), \varphi, \lambda^k, \sigma_k \in \Omega^0(M), A \in \Omega^1(M) \} \quad (5.1)$$

とする。  $n$  は粒子数密度、  $A^\mu$  は電磁ポテンシャルとそれぞれ解釈される。他のスカラー関数たちは Clebsch パラメタで、相空間に拘束条件を与えるものである。ここでもまた、単位粒子数あたりの内部エネルギー  $\mathcal{E}$  は  $n$  のみに依存すると仮定して、単位粒子数あたりの enthalpy  $h$  は式 (4.3) で定義する。

正準運動量場  $\mathcal{P}$  は式 (4.12) をもとに  $\mathcal{P} := -d\varphi - \sum_k \lambda^k d\sigma_k \in \Omega^1(M)$  で定義する。相対論的な四元速度場  $U \in \mathfrak{X}(M)$  は、1-form  $U := \frac{c^2}{h} (\mathcal{P} - \frac{e}{c} A) \in \Omega^1(M)$  の双対として定義する。ここでいうベクトル場と 1-form の双対とは、Hodge star  $*$  を用いれば  $U = -*(i_U \text{vol}^4)$  で書かれる 1 対 1 対応のことであり、成分表示をすれば  $U = U^\mu \partial_\mu$  に対して  $U = U_\mu dx^\mu$  である。座標系  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  における非相対論的な四元速度場  $u$  は、  $u := (c/U^0)U \in \mathfrak{X}(M)$  で定義される。  $U^0$  は座標系に依存する量だが、ここでは座標系を  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  に固定しているため問題ない。

以下ではプラズマのエントロピー  $S$  が温度  $T$  の関数で書けることを仮定する (バロトロピー流体)。この場合、ある関数  $\theta$  を用いて  $TdS = d\theta$  と書くことができる。相空間内の時間発展は、以下の方程式系で与えられる:

$$\mathcal{L}_U n = 0, \quad (5.2a)$$

$$\mathcal{L}_U \lambda^k = \mathcal{L}_U \sigma_k = 0, \quad (5.2b)$$

$$\mathcal{L}_U \varphi = -i_U \mathcal{P} + c^{-1} \theta, \quad (5.2c)$$

$$d * dA = \frac{e}{c} i_U n. \quad (5.2d)$$

相対論のモデルでは、式 (5.2a), (5.2b) のように  $\mathcal{L}_U$  を作用させてゼロになることを「Lie-drag される」と言うことにする。

## 5.3 半相対論的 enstrophy およびその時間発展

ここから、相対論的枠組みの中で従来の enstrophy を記述することを試みる。非相対論では 3 次元空間上の  $n$  と  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  はともに 3-form であり、これらの比で  $\vartheta$  を定義した。しかし、相対論では 4 次元時空が舞台であり、  $n$  が 4-form なのに対して  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  は 3-form である。非相対論的な物理量を求める際には、積分領域  $\Omega(t)$  は  $x^0$  一定の超平面 (これを  $t$ -plane と呼ぶことにする) に含まれるとして、この上で何らかの密度を積分する。  $dx^0$  とのウェッジ積をとることは空間方向成分の射影として振る舞うから、これを利用して相対論的な状況での非相対論的な enstrophy  $Q(t)$  を定める:

$$Q(t) := \int_{\Omega(t)} f(\vartheta) i_{\partial_0} n. \quad (5.3)$$



スカラー関数  $\vartheta$  と 2-form  $\omega_1$  は、それぞれ

$$\vartheta := \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{(dx^0 \wedge i_{\partial_0} n)^*} = \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*}, \quad (5.4)$$

$$\omega_1 := d\lambda^1 \wedge d\sigma_1 \quad (5.5)$$

で定める。以下では  $Q(t)$  を半相対論的 *enstrophy* と呼ぶことにする<sup>\*1</sup>。  $\vartheta$  の定義において、  $dx^0$  とのウェッジ積をとることで  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  の空間成分のみを取り出しており、半相対論的 enstrophy  $Q(t)$  は非相対論的 enstrophy  $\tilde{Q}(t)$  と合致している。

$Q(t)$  の時間微分を補遺 A.3 のように計算すると、次のような結果が得られた:

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \int_{\Omega(t)} \{f'(\vartheta) c(d \log \gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* - f(\vartheta) n^* u(\log \gamma)\} d^3 x. \quad (5.6)$$

右辺第 2 項の  $u(\log \gamma)$  は、  $\log \gamma$  を  $u$  で微分したものの  $u^\mu \partial_\mu(\log \gamma)$  を指す。

式 (5.6) の右辺の被積分関数は  $\log \gamma$  の微分に比例している。非相対論極限  $\gamma \rightarrow 1$  では  $\log \gamma$  は定数なので  $\frac{d}{dt} Q(t)$  はゼロに漸近するが、一般には  $Q(t)$  はもはや定数ではない。これは、Lorentz 収縮によって体積を測る単位が変化してしまったからであると考えられる。同様の現象は helicity でも起きており、[12] では relativistic baroclinic effect と呼ばれていた。非相対論極限で  $Q(t)$  と  $\tilde{Q}(t)$  が一致するというのも、helicity と同様である。

## 5.4 相対論的 enstrophy の定義

半相対論的 enstrophy が保存しなかったのは、各変数が相対論的な時間発展をしたのに、物理量を非相対論的に測定したからである。helicity の場合に倣って、相対論的な描像に合った enstrophy を再定義したい。積分領域  $V(s)$  を、時空多様体  $M$  内の 3 次元超曲面であって  $V(s) := \mathcal{T}_U(s)V_0$  で定義されるものとする。各流体要素の経過した固有時間  $s$  が一定となる超曲面であることから、この  $V(s)$  を  $s$ -plane と呼ぶことにする。積分範囲を  $s$ -plane にとるというアイデアは、helicity の相対論化の論文 [12] に由来している。

enstrophy 密度を定義する際には、任意関数  $f$  の引数となるスカラー関数  $\vartheta$  を定義しなくてはならない。非相対論での舞台であった 3 次元空間では、  $n$  と  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  はともに 3-form であり、比較は容易である。しかし、相対論で 4 次元時空を考える場合、  $n$  は 4-form、  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  は 3-form となり、これらの比較は自明でなくなる。  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  と何らかの 1-form とのウェッジ積をとって 4-form として  $n$  と比較するという方法も考えられたが、上手い方法を見つけられなかった。

今回は、  $n$  の代わりに  $i_U n$  と  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  を比較する方法をとる。これらはともに 3-form であるが、3-form 全体からなる線型空間  $\Omega^3(M)$  は 4 次元なので、  $i_U n$  と  $\omega_1 \wedge d\sigma_2$  が必ずしも平行になるとは限らない。これらを比較するために  $V(s)$  上の座標を用いる。3-form を座標写像で引き戻すと 3 次元部分空間上の 3-form となり、このようなもの全体からなる線型空間  $\Omega^3(V(s))$  は 1 次元なので、一方が他方の定数倍となる。  $V(s)$  の自然な座標写像として、  $\mathcal{T}_U(s) : V_0 \rightarrow V(s)$  を採用することにする。

$\mathcal{T}_U(s)$  による引き戻しを  $s$  で微分することと Lie 微分  $\mathcal{L}_U$  が関係していることを示しておく。スカラー関

<sup>\*1</sup> 「半相対論的 (semi-relativistic)」という形容詞は、helicity の相対論化の論文 [12, Sec. III.A] における「半相対論的 helicity (the semi-relativistic helicity)」に由来している。

数  $g \in C^\infty(M)$  に対して,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{T}_U(s)^* g &= \frac{d}{ds} g \circ \mathcal{T}_U(s) = \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \left[ \frac{d}{ds} \mathcal{T}_U(s) \right]^\mu \\ &= \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \mathcal{U}^\mu |_{\mathcal{T}_U(s)} = i_U dg |_{\mathcal{T}_U(s)} \\ &= \mathcal{L}_U g |_{\mathcal{T}_U(s)} = \mathcal{T}_U(s)^* (\mathcal{L}_U g). \end{aligned} \quad (5.7)$$

任意の  $k$ -form は, スカラー関数の外微分をウェッジ積で組み合わせたものの線型結合で書ける. 引き戻しはウェッジ積と可換であり,  $\frac{d}{ds}$  と  $\mathcal{L}_U$  はともに Leibniz 則を満たし外微分と可換であるから, 式 (5.7) はスカラー関数だけでなく一般の  $k$ -form で成り立つ. すなわち, 任意の  $\omega \in \Omega^k(M)$  に対して

$$\frac{d}{ds} \mathcal{T}_U(s)^* \omega = \mathcal{T}_U(s)^* (\mathcal{L}_U \omega). \quad (5.8)$$

この事実に基づいて, 相対論的 enstrophy  $\Omega(s)$  を以下のように定義する:

$$\Omega(s) := c^{-1} \int_{V_0} f(\vartheta) \mathcal{T}_U(s)^* (i_U n). \quad (5.9)$$

スカラー関数  $\vartheta$  と 2-form  $\omega_1$  は, それぞれ

$$\vartheta := c \frac{(\mathcal{T}_U(s)^* (\omega_1 \wedge d\sigma_2))^*}{(\mathcal{T}_U(s)^* (i_U n))^*}, \quad (5.10)$$

$$\omega_1 := d\lambda^1 \wedge d\sigma_1. \quad (5.11)$$

で定める.  $\omega_1$  の定義は式 (5.5) と同じであるが,  $\vartheta$  の定義は式 (5.4) と異なっていることに注意する. また,  $\vartheta$  の定義において,  $\mathcal{T}_U(s)^* (\omega_1 \wedge d\sigma_2)$  と  $\mathcal{T}_U(s)^* (i_U n)$  は 3次元多様体  $V_0 \subset \mathbb{R}^3$  上の 3-form であり, これらは Hodge star  $*$  を作用させると 0-form となっていることにも注意する. Clebsch パラメタの時間発展の式 (5.2a)–(5.2c) から

$$\mathcal{L}_U (i_U n) = \mathcal{L}_U (\omega_1 \wedge d\sigma_2) = 0 \quad (5.12)$$

が導かれるから, 式 (5.8) より

$$\frac{d}{ds} \mathcal{T}_U(s)^* (i_U n) = \frac{d}{ds} \mathcal{T}_U(s)^* (\omega_1 \wedge d\sigma_2) = 0 \quad (5.13)$$

が得られる. したがって, 相対論的 enstrophy  $\Omega(s)$  の保存則が導かれた, すなわち

$$\frac{d}{ds} \Omega(s) = 0. \quad (5.14)$$

$\Omega(s)$  の定義式 (5.9)–(5.11) はやや煩雑な形をしているが, やりたいことは

$$\Omega(s) := c^{-1} \int_{V(s)} f(\vartheta) i_U n, \quad (5.15)$$

$$\vartheta := c \frac{\omega_1 \wedge d\sigma_2}{i_U n}. \quad (5.16)$$

である. 引き戻しを明示しないこのシンプルな表式だと, 定義の気持ちを理解したり従来の enstrophy と比較したりしやすいかもしれない. しかし,  $\frac{\omega_1 \wedge d\sigma_2}{i_U n}$  が ill-defined でありあくまで気持ちを表した式に過ぎないので, 実際の計算は式 (5.9)–(5.11) を使うしかない.

## 5.5 相対論的 enstrophy と半相対論的 enstrophy の対応

ここからは、半相対論的 enstrophy と相対論的 enstrophy が、非相対論極限で一致することを確認していく。これは相対論的 enstrophy の定義の妥当性を示す 1 つの根拠となっている。相対論的 enstrophy の定義に現れる  $U$  をすべて  $u$  に変えると半相対論的 enstrophy と一致することを示せば十分である。

まず、初期範囲が同じ ( $V_0 = \Omega_0$ ) であれば、 $s$ -plane  $V(s)$  は非相対論極限で  $t$ -plane  $\Omega(t) := \mathcal{T}_u(t) \Omega_0$  と一致し、流体とともに動く積分範囲  $V(s)$  は固定した  $s$  に依らずに超平面になる。積分範囲が超平面になったことによって  $V(s)$  にも自然に Hodge star を考えられるようになった。しかし、Hodge star を作用させる際は微分形式が 3 次元多様体上のものか 4 次元多様体上のものかを区別する必要があるので、以下では包含写像  $\iota: \mathbb{R}^3 \supset \Omega(t) \rightarrow \Omega(t) \subset \mathbb{R}^4, \mathbf{x} \mapsto (ct, \mathbf{x})$  を明示的に書く。微分同相写像  $\mathcal{T}_u(t)$  は、 $\iota$  と  $\tilde{\mathcal{T}}_u(t): \mathbb{R}^3 \supset \Omega_0 \rightarrow \Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$  に分解できる、すなわち  $\mathcal{T}_u(t) = \iota \circ \tilde{\mathcal{T}}_u(t)$ 。

これから、 $\iota$  による引き戻しが微分形式にどのような影響を与えるのかを見ていく。大域座標  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  を用いた 1-form の基底については、関係式  $\iota^* dx^0 = 0, \iota^* dx^i = dx^i$  が成り立つ。任意の  $\omega \in \Omega^3(M)$  は、何らかの関数  $a^0, a^1, a^2, a^3$  を用いて

$$\begin{aligned} \omega &= a^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + a^1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + a^2 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + a^3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

と書ける。このように書いたとき、

$$\iota^* \omega = a^0 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (5.18)$$

$$dx^0 \wedge \omega = a^0 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (5.19)$$

より、等式

$$(\iota^* \omega)^* = a^0 = \iota^*(dx^0 \wedge \omega)^* \quad (5.20)$$

が成り立つ。式 (5.20) を使うと、 $\vartheta$  の分子・分母をそれぞれ計算できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_u(t)^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2) &= \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^*[\iota^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2)] \\ &= \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^*[(\iota^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2))^* \text{vol}^3] \\ &= \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^*[\iota^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2)]^* \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^* \text{vol}^3 \\ &= \left[ \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^*(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* \right] \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^* \text{vol}^3. \end{aligned} \quad (5.21)$$

同様に、

$$\mathcal{T}_u(t)^* i_{un} = \left[ \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^*(dx^0 \wedge i_{un})^* \right] \tilde{\mathcal{T}}_u(t)^* \text{vol}^3 \quad (5.22)$$

も得られる。式 (5.21), (5.22) の両辺に Hodge star を作用して比をとると、ヤコビアンに相当する  $\tilde{\mathcal{T}}_u(t)^* \text{vol}^3$  が打ち消しあう:

$$\mathcal{T}_u(t)^* \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{(dx^0 \wedge i_{un})^*} = \frac{(\mathcal{T}_u(t)^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2))^*}{(\mathcal{T}_u(t)^* i_{un})^*}. \quad (5.23)$$

以上より、半相対論的 enstrophy  $Q(t)$  と相対論的 enstrophy  $\Omega(s)$  の対応が分かった。

相対論的に保存すること、非相対論的極限で  $Q(t)$  と一致することから、 $\Omega(s)$  は enstrophy 相当する相対論的に妥当な Casimir であると結論づける。非相対論的なプラズマだけでなく相対論的なプラズマでも

Casimir があることが分かったため、相対論的効果でプラズマの振る舞いが劇的に変化することはないと分かる。

[10, Sec. 5] で議論されているとおり、 $\lambda^2 = 0$  を満たす領域は quasi-particle と見なすことができる。特に  $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  のとき、 $\Omega(s)$  は  $V(s)$  上で  $\sigma_2$  一定の超曲面を貫く渦糸の本数と解釈される。

## 第6章

# 具体例の構築

ここまでは Euler 方程式の任意の古典解  $\mathbf{V}$  に対して成り立つ一般論について述べてきた。その有用性をアピールすることを目的に、具体例の構築に取り組んだ。

今回は、渦の存在する流れ  $\mathbf{V}$  の最も単純な例として剛体回転の流れを取り扱うことにした。 $z$  軸に固定した慣性系から見た際に、 $z$  軸まわりの角速度が一定となっているような流れのことである。流速が光速を超えないような有限領域内に限って考える。

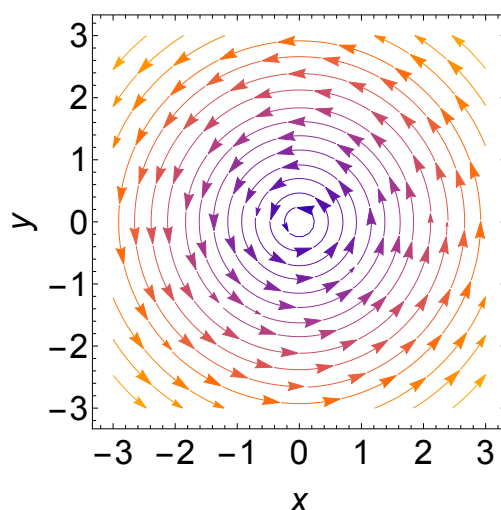


図 6.1 剛体回転の流線プロット。

あらかじめ断っておくと、この章の内容は研究中で、改善の余地があると考えている。疑問点や今後の課題については 6.4 節に記述した。

### 6.1 非相対論的な場合の Clebsch 表現

$(r, \theta, z)$  を円柱座標とする。最終的に渦度の密度となることを期待した定数  $\omega$  を用いて、

$$v_\theta = \frac{1}{2}\omega r, \quad v_r = v_z = 0 \quad (6.1)$$

と書ける非相対論的な速度場

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\omega r \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{2}\omega(-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y) \quad (6.2)$$

を考える.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0, \quad (6.4)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{8} \omega^2 \nabla(x^2 + y^2) \quad (6.5)$$

であるのに対して, Euler 方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{V}) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{m} \nabla \tilde{h} \quad (2.17)$$

であるから, これが理想流体となるために満たすべき条件式は

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) n = 0, \quad (6.6)$$

$$\nabla \tilde{h} = \frac{1}{8} m \omega^2 \nabla(x^2 + y^2) \quad (6.7)$$

である. 式 (6.7) より enthalpy  $h$  は

$$\tilde{h} = \frac{1}{8} m \omega^2 (x^2 + y^2) + \tilde{K} \quad (6.8)$$

と求まる ( $\tilde{K}$  は定数). よって  $\varphi$  の Lie 微分は

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \varphi = \frac{1}{2} m V^2 - \tilde{h} = -\tilde{K} \quad (6.9)$$

となる.

以上より, 定数  $\tilde{K}$  と任意の  $C^1$  関数  $f$  に対して, Clebsch パラメータを

$$\varphi := -\frac{\tilde{K}}{\omega} \left( \theta + \frac{1}{2} \omega t \right), \quad (6.10a)$$

$$\lambda := \frac{1}{2} m \omega r^2 + \frac{\tilde{K}}{\omega}, \quad (6.10b)$$

$$\sigma := \theta - \frac{1}{2} \omega t \quad (6.10c)$$

と定めると,  $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} := \partial_t + \mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  に対して

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \varphi = -\tilde{K}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \lambda = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{V}} \sigma = 0 \quad (6.11)$$

が導かれ, ( $\varphi$  を除いて) Lie drag されていることが分かる. また, 得られる 1-form は

$$\mathcal{P} := d\varphi + \lambda d\sigma = \frac{1}{2} m \omega r^2 d\theta \quad (6.12)$$

である. 計量が

$$dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz \quad (6.13)$$

であることから, 双対なベクトル場は

$$v = \frac{1}{2} \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (6.14)$$

となり, もともと定義したかったものと一致する. 式 (6.1) と式 (6.14) とで見かけ上形が違うのは,  $\|\frac{\partial}{\partial\theta}\| = r$  なことによる.

なお,  $n$  が  $r$  のみの関数で書けることを仮定すると, 式 (6.6) は自動的に満たされる.  $n = f(x^2 + y^2)$  と書くと,  $\nabla p = n\nabla\tilde{h}$  より, 圧力は  $f$  の原始関数  $F$  を用いて

$$p = \frac{1}{8}m\omega^2 F(x^2 + y^2) \quad (6.15)$$

と求まる. また, 渦度  $\omega$  は

$$\omega := \nabla \times \mathbf{V} = \omega \mathbf{e}_z \quad (6.16)$$

となり, 渦度が一様一定で大きさ  $\omega$  であることが分かる.

## 6.2 相対論的な場合の Clebsch 表現

時間方向の座標は  $x^0 := ct$  を使う. 符号  $(+, -, -, -)$  の Lorentz 計量

$$\eta = dx^0 \otimes dx^0 - dr \otimes dr - r^2 d\theta \otimes d\theta - dz \otimes dz \quad (6.17)$$

を採用する. 式 (6.14) で定められている  $v$  の Lorentz 因子は  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2}}$  であるから, 四元速度場は

$$\mathcal{U} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2}} \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{2}\omega \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2}} \frac{\partial}{\partial\theta} \quad (6.18)$$

である. 相対論的 Euler 方程式  $n\mathcal{U}^\nu \partial_\nu (h\mathcal{U}^\mu) = c^2 \partial^\mu p$  を書き換えると

$$\mathcal{U}^\nu \partial_\nu \mathcal{U}^\mu = (c^2 \eta^{\mu\nu} - \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu) \partial_\nu \log h \quad (6.19)$$

であるから,  $h$  は  $\mathcal{U}$  方向の変化を除いて一意的に求まる. しかし, 例えば「 $h$  は  $n$  のみに依存する」のように  $h$  が Lie drag される仮定を置いておけば, 式 (6.19) の右辺第 2 項はゼロになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\nu \partial_\nu \mathcal{U}^\mu &= \frac{1}{8}\omega^2 \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}(x^2 + y^2)} \partial^\mu (x^2 + y^2) \\ &= -\frac{1}{2}c^2 \partial^\mu \left[ \log \left( 1 - \frac{\omega^2}{4c^2}(x^2 + y^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

であるから,

$$h = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}(x^2 + y^2)}} = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2}} \quad (6.21)$$

と求まる ( $K$  は定数). 正準運動量は

$$\mathcal{P} = K \left[ \frac{c}{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2} dx^0 - \frac{\frac{1}{2}\omega r^2}{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2} d\theta \right] \quad (6.22)$$

である.

$h$  が定数でないために, 速度場を考えると正準運動量場を考えると明確な違いが生じる. 速度場に対して Clebsch 表現を求めようとして構成できなかったが, 正準運動量場を考えると構成できた.

$\varphi$  の Lie 微分は

$$\mathcal{L}_U \varphi = -h = -\frac{K}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2} r^2}} \quad (6.23)$$

となる。これを踏まえて Clebsch 表現を

$$\varphi := -\frac{K}{\omega} \left( \theta + \frac{\omega}{2c} x^0 \right), \quad (6.24a)$$

$$\lambda := \frac{K}{\omega} \cdot \frac{1 + \frac{\omega^2}{4c^2} r^2}{1 - \frac{\omega^2}{4c^2} r^2}, \quad (6.24b)$$

$$\sigma := \theta - \frac{\omega}{2c} x^0 \quad (6.24c)$$

で定めると、Lie-drag されていることも  $\mathcal{P} = -d\varphi - \lambda d\sigma$  を満たしていることも分かる。渦度に対応する 2-form は

$$d\mathcal{P} = -d\lambda \wedge d\sigma = -\frac{K\omega}{c^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2} r^2\right)^2} dr \wedge d\left(\theta - \frac{\omega}{2c} x^0\right) \quad (6.25)$$

である。非相対論の場合の式 (6.16) とは異なり、もはや渦度は一様ではない。

逆に、与えられた Clebsch 表現から速度場を求める際は、

1.  $\mathcal{P} = -d\varphi - \lambda d\sigma$  から正準運動量を求める。
2.  $\mathcal{P} = (h/c^2)U$  と  $\|U\|_\eta = c$  から、 $h$  と  $U$  を求める。

という手順を踏めばよい。

### 6.3 enstrophy の計算

Clebsch 表現は以下で定める：

$$\varphi := -\frac{K}{\omega} \left( \theta + \frac{\omega}{2c} x^0 \right), \quad (6.26a)$$

$$\lambda^1 := \frac{K}{\omega} \cdot \frac{1 + \frac{\omega^2}{4c^2} r^2}{1 - \frac{\omega^2}{4c^2} r^2}, \quad (6.26b)$$

$$\sigma_1 := \theta - \frac{\omega}{2c} x^0, \quad (6.26c)$$

$$\lambda^2 := 0, \quad (6.26d)$$

$$\sigma_2 := z. \quad (6.26e)$$

渦度に対応するものは

$$\omega_1 := d\lambda^1 \wedge d\sigma_1 = \frac{K\omega}{c^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2} r^2\right)^2} dr \wedge d\left(\theta - \frac{\omega}{2c} x^0\right), \quad (6.27)$$

$$\omega_1 \wedge d\sigma_2 = \frac{K\omega}{c^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2} r^2\right)^2} \left( dr \wedge d\theta \wedge dz + \frac{\omega}{2c} dx^0 \wedge dr \wedge dz \right) \quad (6.28)$$

である。

数密度  $n$  は  $r$  のみの関数であれば任意でよかったので

$$\begin{aligned} n &:= g(r) dx^0 \wedge dx \wedge dy \wedge dz \\ &= rg(r) dx^0 \wedge dr \wedge d\theta \wedge dz \end{aligned} \quad (6.29)$$



なる形を仮定する。このとき

$$i_{\mathcal{U}}n = \frac{rg(r)}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2}} \left[ c \, dr \wedge d\theta \wedge dz + \frac{1}{2}\omega \, dx^0 \wedge dr \wedge dz \right]. \quad (6.30)$$

### 6.3.1 半相対論的 enstrophy

任意関数  $f$  の中身は

$$dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2 = \frac{K\omega}{c^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2\right)^2} dx^0 \wedge dr \wedge d\theta \wedge dz, \quad (6.31)$$

$$\therefore \vartheta := \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*} = \frac{K\omega}{c^2} \frac{r}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2\right)^2} \frac{1}{g(r)} \quad (6.32)$$

であるから、半相対論的 enstrophy は

$$Q(t) := \int_{\Omega(t)} f(\vartheta) i_{\partial_0}n = \int_{\Omega_0} f\left(\frac{K\omega}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2\right)^2} \frac{1}{g(r)}\right) rg(r) \, drd\theta dz \quad (6.33)$$

である。最右辺に  $t$  が出てきていないことから、これは時間変化しない量となっている。

例えば  $\Omega_0$  として「半径  $a$  高さ  $\Delta z$  の円柱」をとり、 $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$  をとった場合は

$$Q(t) = \frac{4\pi K}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}a^2} \Delta z \quad (6.34)$$

となる。

### 6.3.2 相対論的 enstrophy

$s$ -plane  $V(s)$  のパラメタ付けとして微分同相写像  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s) : \mathbb{R}^3 \supset V_0 \rightarrow V(s) \subset \mathbb{R}^4$  を採用する:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)[R, \Theta, Z] = \left[ \frac{cs}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2}}, R, \Theta + \frac{\frac{1}{2}\omega s}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2}}, Z \right]. \quad (6.35)$$

1-form の引き戻しは

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^* dx^0 = cs \frac{\omega^2}{4c^2} \frac{R}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2\right)^{3/2}} dR, \quad (6.36a)$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^* dr = dR, \quad (6.36b)$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^* d\theta = \frac{1}{2}\omega s \frac{\omega^2}{4c^2} \frac{R}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2\right)^{3/2}} dR + d\Theta, \quad (6.36c)$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^* dz = dZ \quad (6.36d)$$

となる。 $\vartheta$  の引き戻しは

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2) = \frac{K\omega}{c^2} \frac{R}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2\right)^2} dR \wedge d\Theta \wedge dZ, \quad (6.37)$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^*(i_{\mathcal{U}}n) = c \frac{Rg(R)}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2}} dR \wedge d\Theta \wedge dZ, \quad (6.38)$$

$$\therefore \vartheta = c \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^*(\omega_1 \wedge d\sigma_2)}{\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(s)^*(i_{\mathcal{U}}n)} = \frac{K\omega}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}R^2\right)^{3/2}} \frac{1}{g(R)} \quad (6.39)$$

であるから、相対論的 enstrophy は

$$\Omega(s) = \int_{V_0} f \left( \frac{K\omega}{c^2} \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{4c^2} R^2)^{3/2}} \frac{1}{g(R)} \right) \frac{R g(R)}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4c^2} R^2}} dR d\Theta dZ \quad (6.40)$$

と求まる。これは  $s$  に依存していないから、確かに  $f$  や  $V_0$  に依らず保存量となっている。

## 6.4 考察・今後の課題

一般の状況では、半相対論的 enstrophy の時間発展は

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \int_{\Omega(t)} \{ f'(\vartheta) c (d \log \gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* - f(\vartheta) n^* u(\log \gamma) \} d^3 x. \quad (5.6)$$

であり保存するとは限らないのであったが、剛体回転流れの具体例では式 (6.33) のとおり保存している。その理由は、剛体回転流れは対称性の高い流れであったからだと考えられる。流れ (より正確には、流跡線) に沿って辿っていくと速度場の大きさは一定のため、 $u(\log \gamma) = 0$  となり右辺第 2 項はゼロとなる。また、 $\log \gamma$  も  $\lambda^1$  も  $r$  のみの関数であるために、 $d \log \gamma \wedge \omega_1 = 0$  となり右辺第 1 項もゼロとなる。第 1 項と第 2 項が打ち消しあっているのではなく、対称性に起因する別の理由でそれぞれゼロとなっていることに注意する。

本研究は  $Q(t)$  が一般には保存するとは限らないから修正するという論旨であるため、 $Q(t)$  が保存しない具体例の方が本研究には相応しい。しかし、その構築は以下に示すとおり困難であり、今のところ上手くいっていない。

まず、渦度がゼロの流れだと  $\omega_1 = 0$  であり、 $Q(t)$  が恒等的にゼロで trivial な例になってしまう。 $Q(t)$  がゼロでなかったとしても、今回の剛体回転流れの具体例のように  $\frac{dQ}{dt} = 0$  とならないためには、式 (5.6) 右辺の第 1 項と第 2 項の少なくとも一方が非零となる必要がある。第 1 項の  $d \log \gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2$  が非零となるためには、渦度の方向に流れの速さが変化する必要があると思われる。第 2 項の  $u(\log \gamma)$  が非零となるためには、流跡線に沿って速度場の大きさが変化する必要がある。いずれにしろ、相対論効果で enstrophy の保存の破れが見えるのは、流れがある程度複雑な構造をもつときのみであると言える。

しかし、enstrophy を求める際には四元速度場  $U$  から各パラメタが Lie-drag されるような Clebsch 表現を求めなくてはならないし、特に相対論的 enstrophy を求めるためには  $\mathcal{T}_U(s)$ 、すなわち  $U$  の積分曲線を求める必要がある。手計算でこれらを求められるのは  $U$  がある程度簡単な形のときのみである。

このように、手計算で扱えるためには簡単な具体例でなければならないのに、簡単すぎると enstrophy の保存の破れは見えないという状況で、「適度に複雑な」具体例の構成は未だ成功していない。

## 第7章

# 結論

プラズマの運動の複雑性に潜む秩序を特徴づけるトポロジカルな束縛の1つとして3次元の流れに拡張された enstrophy に着目して、それが相対論的状况ではどのように修正されるのかを明らかにしようとした。その結果、本研究では4つの主な成果が得られた。

1つ目は、相対論的プラズマの charged fluid モデルに対する Clebsch 表現を導出できたことである。これは、相対論的プラズマの従う非正準 Hamilton 力学系が部分代数として埋め込まれるような正準 Hamilton 力学系 (Poisson 多様体) を構築できたことを意味する。ここで得られた Clebsch パラメタは Lie-drag されているものだから、プラズマのトポロジカルな束縛を特定するのに便利である。

2つ目は、相対論的プラズマでの従来の enstrophy の時間発展を具体的に求めたことである。従来の enstrophy は Lorentz 共変な物理量ではなく、相対論的效果によって保存が破れることが示された。それだけでなく、通常の実験で観測しやすいのは非相対論的な物理量であるから、相対論効果がどれくらい生じるかを定量的に求めることができたのは意義深い。従来の enstrophy の保存が破れていることから、循環 (circulation) も相対論的效果を受けていると言える。

3つ目は、相対論的に保存するような enstrophy を定義できたことである。定義にあたっては、積分範囲を Lorentz 共変なものに取り直す、平行になるとは限らない物理量の比較に微分同相写像による引き戻しを用いるなどの工夫をした。非相対論極限で従来の enstrophy と一致することを確認して、定義の妥当性を確かめた。

4つ目は、簡単な具体例について Clebsch 表現や enstrophy を構成できたことである。計算手順がやや抽象的に見える一般論をどのように適用すれば良いかを示せた。また、対称性が高い流れでは相対論効果による enstrophy 保存の破れが見られないことがあると分かった。実際に enstrophy 保存の破れが見られるような具体例の構築は、今後の課題として残っている。

相対論的プラズマでも enstrophy に相当するトポロジカルな拘束が存在することから、プラズマが相対論的效果によって秩序を大きく乱される可能性は低いと考えられる。半相対論的な enstrophy (相対論的な補正を行っていない enstrophy) は、相対論効果で保存が破られる。このことは一見、運動の自由度が高まることを意味するようであるが、実際はそうではなく、相対論的に補正された保存則が運動をトポロジカルに制限することが示された。もし相対論的效果によってトポロジカルな束縛の数が減るとすると、そのぶんカオスな流れになりやすいことが考えられたが、その可能性は低いことを本研究は指摘している。



## 付録 A

# 導出の詳細

### A.1 Clebsch 表現の導出のための作用汎関数の変分

この節では、4.2 節で省略した、作用汎関数の式 (4.9) の変分原理から相空間の基本変数の時間発展の式 (4.10) を導出する途中計算を記す。

まずは、式 (4.9) で定義された作用汎関数の変分を計算する。

$$\begin{aligned}
 \delta S &:= S[n + \delta n, v^j + \delta v^j, \varphi + \delta\varphi, \lambda^k + \delta\lambda^k, \sigma_k + \delta\sigma_k, A^\mu + \delta A^\mu] - S[n, v^j, \varphi, \lambda^k, \sigma_k, A^\mu] \\
 &= \int \delta n \left[ \frac{L_F}{n} - n \mathcal{E}'(n) \frac{\mathcal{U}_\mu \mathcal{U}^\mu}{c^2} \right] d^4x - \int \delta \mathcal{U}^\mu \left[ \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right] n d^4x \\
 &\quad - \int n \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \delta\varphi d^4x - \sum_k \int \delta \lambda^k \cdot n \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \sigma_k d^4x - \sum_k \int n \lambda^k \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \delta\sigma_k d^4x \\
 &\quad - \int \delta A^\mu \cdot \frac{e}{c} n \mathcal{U}_\mu d^4x + \int \delta \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^4x + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

この式 (A.1) を項ごとに変形させていく。変分の偏微分が出てきた場合は、部分積分で変分を別の項に押し付ける：

$$- \int n \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \delta\varphi d^4x = \int \delta\varphi \partial_\mu (n \mathcal{U}^\mu) d^4x, \tag{A.2}$$

$$- \sum_k \int n \lambda^k \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \delta\sigma_k d^4x = \sum_k \int \delta\sigma_k \partial_\mu (n \lambda^k \mathcal{U}^\mu) d^4x. \tag{A.3}$$

作用汎関数は ( $v^j$  を使わずに)  $\mathcal{U}^\mu$  で表されているから、 $v^j$  の変化が  $\mathcal{U}^\mu$  にどのように影響するかを調べる。 $\mathcal{U}^\mu$  と  $v^j$  が式 (4.1), (4.2) で結びついていることを思い出すと、

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v^j} = -\frac{2v^j}{c^2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\mathbf{V}^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{v^j}{c^2} \gamma^3, \tag{A.4}$$

$$\therefore \frac{\partial \mathcal{U}^0}{\partial v^j} = \frac{v^j}{c} \gamma^3, \quad \frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial v^j} = \delta_j^i \gamma + v^i \frac{v^j}{c} \gamma^3, \tag{A.5}$$

すなわち

$$\delta \mathcal{U}^0 = \frac{\gamma^3}{c} v^j \delta v^j, \tag{A.6}$$

$$\delta \mathcal{U}^i = \gamma \delta v^i + \frac{\gamma^3}{c^2} v^i v^j \delta v^j. \tag{A.7}$$

途中式が長くなるのを避けるために、ここでベクトル  $W$  を導入する:

$$W_\mu := \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k. \quad (\text{A.8})$$

この記法を用いると、式 (A.1) の第 2 項は

$$\begin{aligned} - \int \delta \mathcal{U}^\mu n W_\mu d^4x &= - \int \delta \mathcal{U}^0 n W_0 d^4x - \int \delta \mathcal{U}^i n W_i d^4x \\ &= - \int \delta v^i \cdot \frac{\gamma^3}{c} v^i n W_0 d^4x - \int \delta v^i \cdot \gamma n W_i d^4x - \int \delta v^i \cdot \frac{\gamma^3}{c^2} v^i v^j n W_j d^4x \\ &= - \int \delta v^i \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} v^i n \mathcal{U}^\mu W_\mu d^4x - \int \delta v^i \cdot \gamma n W_i d^4x \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる。

加えて、式 (A.1) の第 7 項は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned} \int \delta \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) d^4x &= -\frac{1}{4} \int (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \times 2 d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int \{ \delta A_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \delta A_\mu \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \} d^4x \\ &= \frac{1}{2} \int \delta A_\mu (\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu \partial^\nu A^\mu) d^4x \\ &= \int \delta A_\mu (\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)) d^4x. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

1 行目の右辺に  $\times 2$  があるのは、 $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  の変分に対して chain rule を適用したとき、前半から出てくる項と後半から出てくる項が同じになるから、それをまとめたものである。

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta n \left[ \frac{L_F}{n} - n \mathcal{E}'(n) \right] d^4x - \int \delta v^i \cdot \frac{\gamma^2}{c^2} v^i n \mathcal{U}^\mu \left( \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right) d^4x \\ &\quad - \int \delta v^i \cdot \gamma n \left( \frac{e}{c} A_i + \partial_i \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_i \sigma_k \right) d^4x \\ &\quad + \int \delta \varphi \partial_\mu (n \mathcal{U}^\mu) d^4x - \sum_k \int \delta \lambda^k \cdot n \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \sigma_k d^4x + \sum_k \int \delta \sigma_k \cdot \partial_\mu (n \lambda^k \mathcal{U}^\mu) d^4x \\ &\quad + \int \delta A^\mu \left\{ \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \frac{e}{c} n \mathcal{U}_\mu \right\} d^4x + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Euler-Lagrange 方程式は

$$\text{by } \delta n, \quad \frac{L_F}{n} = n \mathcal{E}'(n) \quad (\text{A.12a})$$

$$\text{by } \delta v^i, \quad \left( \frac{e}{c} A_i + \partial_i \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_i \sigma_k \right) - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_i \mathcal{U}^\mu \left( \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right) = 0 \quad (\text{A.12b})$$

$$\text{by } \delta \varphi, \quad \partial_\mu (n \mathcal{U}^\mu) = 0 \quad (\text{A.12c})$$

$$\text{by } \delta \lambda^k, \quad \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \sigma_k = 0 \quad (\text{A.12d})$$

$$\text{by } \delta \sigma_k, \quad \partial_\mu (n \lambda^k \mathcal{U}^\mu) = 0, \quad \therefore \mathcal{U}^\mu \partial_\mu \lambda_k = 0 \quad (\text{A.12e})$$

$$\text{by } \delta A_\mu, \quad \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \frac{e}{c} n \mathcal{U}_\mu = 0. \quad (\text{A.12f})$$

となる. 式 (A.12c)–(A.12f) は, 最終的に得られる式 (4.10a), (4.10b), (4.10d) に他ならない. 関係式

$$h(n) = \frac{\partial(n\mathcal{E}(n))}{\partial n} = \mathcal{E}(n) + n\mathcal{E}'(n) \quad (\text{A.13})$$

を用いると, 式 (A.12a) は式 (4.10c) と一致する.

式 (A.12b) については, もう少し式変形をしていく. 式 (A.8) の記法を再び用いると, 式 (A.12b) は以下のように書き直せる:

$$W_i - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_i \mathcal{U}^\mu W_\mu = 0 \quad (\text{A.14})$$

ただし,  $i = 1, 2, 3$ . 式 (A.14) の両辺について  $\mathcal{U}^i$  と縮約をとると,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{U}^i W_i - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}^i \mathcal{U}_i \mathcal{U}^\mu W_\mu \\ &= \mathcal{U}^\mu W_\mu - \mathcal{U}^0 W_0 - \frac{1}{c^2} (c^2 - \mathcal{U}_0 \mathcal{U}^0) \mathcal{U}^\mu W_\mu \\ &= -\mathcal{U}^0 \left( W_0 - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_0 \mathcal{U}^\mu W_\mu \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$\mathcal{U}$  の第ゼロ成分  $\mathcal{U}^0 = c\gamma$  は各点で正だから, 式 (A.14) において (もともとは適用範囲外だが)  $i = 0$  とした式も成り立つ, すなわち

$$W_\nu - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_\nu \mathcal{U}^\mu W_\mu = 0. \quad (\text{A.16})$$

ただし,  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

ここで, 行列  $q$  を以下のように導入する:

$$q_\nu{}^\mu := \delta_\nu^\mu - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_\nu \mathcal{U}^\mu. \quad (\text{A.17})$$

ただし,  $\delta_\nu^\mu$  は Kronecker のデルタを指す. この  $q$  は射影演算子であり, その核は  $\text{Ker}(q) = \text{Span}\{\mathcal{U}_\mu\}$  である. 式 (A.16) は  $qW = 0$  と書き直せるので,  $q$  の意味を考えると, 何らかのスカラー関数  $f(x)$  を用いると  $W_\mu + f\mathcal{U}_\mu = 0$  が従う.  $W_\mu + f\mathcal{U}_\mu = 0$  の両辺について  $\mathcal{U}^\mu$  と縮約をとると, 式 (A.12a) より

$$fc^2 = -\mathcal{U}^\mu \left( \frac{e}{c} A_\mu + \partial_\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial_\mu \sigma_k \right) = \frac{L_F}{n} + \mathcal{E}(n) = n\mathcal{E}'(n) + \mathcal{E}(n). \quad (\text{A.18})$$

enthalpy の定義式 (4.3) を思い出すと,  $f = h(n)/c^2$  が得られる. 以上より, 式 (4.10e) から式 (A.12b) が得られたことになる.

## A.2 Clebsch 表現から一般化オームの法則の導出

この節では, 4.3 節で省略した, Clebsch 表現の時間発展の式 (4.10) から一般化オームの法則 (4.13) を導出する途中計算を記す.

式 (4.13) の左辺は, 式 (4.10a) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_\nu [nh(n)\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu] &= -\partial_\nu \left[ n\mathcal{U}^\nu \left( \frac{e}{c} A^\mu + \partial^\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial^\mu \sigma_k \right) \right] \\ &= -n\mathcal{U}^\nu \partial_\nu \left( \frac{e}{c} A^\mu + \partial^\mu \varphi + \sum_k \lambda^k \partial^\mu \sigma_k \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

最右辺の第 2,3 項はそれぞれ以下のように変形できる: 第 2 項は式 (4.10c) より

$$\begin{aligned} n\mathcal{U}^\nu\partial^\mu\partial_\nu\varphi &= n\partial^\mu(\mathcal{U}^\nu\partial_\nu\varphi) - n(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\partial_\nu\varphi \\ &= -n\partial^\mu\left\{h(n) + \frac{e}{c}\mathcal{U}^\nu A_\nu\right\} - n(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\partial_\nu\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

であり, 第 3 項は式 (4.10b) より

$$\begin{aligned} n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu(\lambda^k\partial^\mu\sigma_k) &= n\{\mathcal{U}^\nu\partial_\nu\lambda^k\}\partial^\mu\sigma_k + n\mathcal{U}^\nu\lambda^k\partial_\nu\partial^\mu\sigma_k \\ &= n\mathcal{U}^\nu\lambda^k\partial^\mu\partial_\nu\sigma_k \\ &= n\lambda^k\partial^\mu(\mathcal{U}^\nu\partial_\nu\sigma_k) - n\lambda^k(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\partial_\nu\sigma_k \\ &= -n\lambda^k(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\partial_\nu\sigma_k \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

である. これらを代入すると,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\partial_\nu[nh(n)\mathcal{U}^\mu\mathcal{U}^\nu] \\ &= -n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu\left(\frac{e}{c}A^\mu + \partial^\mu\varphi + \sum_k\lambda^k\partial^\mu\sigma_k\right) \\ &= -\frac{e}{c}n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu A^\mu + n\partial^\mu\left\{h(n) + \frac{e}{c}\mathcal{U}^\nu A_\nu\right\} + n(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\partial_\nu\varphi + \sum_k n\lambda^k(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\partial_\nu\sigma_k \\ &= \frac{e}{c}n\mathcal{U}^\nu(-\partial_\nu A^\mu + \partial^\mu A_\nu) + n\partial^\mu h(n) + n(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu)\left\{\frac{e}{c}A_\nu + \partial_\nu\varphi + \sum_k\lambda^k\partial_\nu\sigma_k\right\} \\ &= \frac{e}{c}n\mathcal{U}_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + n\partial^\mu h(n) - \frac{1}{c^2}nh(n)\mathcal{U}_\nu(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

この最終項は

$$\mathcal{U}_\nu(\partial^\mu\mathcal{U}^\nu) = \frac{1}{2}\partial^\mu(\mathcal{U}_\nu\mathcal{U}^\nu) = \frac{1}{2}\partial^\mu(c^2) = 0 \quad (\text{A.23})$$

よりゼロになる. 圧力  $p$  と enthalpy  $h$  は式 (4.4) から得られる関係式

$$\begin{aligned} \partial^\mu p &= \partial^\mu\{nh(n) - n\mathcal{E}(n)\} \\ &= \partial^\mu\left\{n\frac{\partial(n\mathcal{E}(n))}{\partial n}\right\} - (\partial^\mu n)\frac{\partial(n\mathcal{E}(n))}{\partial n} \\ &= n\partial^\mu\left\{\frac{\partial(n\mathcal{E}(n))}{\partial n}\right\} \\ &= n\partial^\mu h(n) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

で結びついているので, 式 (4.13) の証明はできたことになる. 式 (4.13) を少し変形すれば, 相対論的 Euler 方程式 (4.14) も得られる:

$$\begin{aligned} n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu\mathcal{P}^\mu &= n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu\left(\frac{1}{c^2}h(n)\mathcal{U}^\mu + \frac{e}{c}A^\mu\right) \\ &= \frac{1}{c^2}\partial_\nu[nh(n)\mathcal{U}^\mu\mathcal{U}^\nu] + \frac{e}{c}n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu A^\mu \\ &= \frac{e}{c}n\mathcal{U}_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial^\mu p + \frac{e}{c}n\mathcal{U}^\nu\partial_\nu A^\mu \\ &= \frac{e}{c}n\mathcal{U}_\nu\partial^\mu A^\nu + \partial^\mu p. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$



### A.3 半相対論的 enstrophy の時間発展

この節では、5.3 節で省略した、半相対論的 enstrophy  $Q(t)$  の時間発展を表す式 (5.6) を導出する途中計算を記す。

積分範囲  $\Omega(t)$  が  $x^0$  方向に垂直であることを考えると、式 (5.3) で定義される半相対論的 enstrophy  $Q(t)$  は

$$Q(t) = c^{-1} \int_{\Omega(t)} f(\vartheta) i_u n \quad (\text{A.26})$$

と書き直される。

非相対論的プラズマの運動は、非相対論的四元速度場  $u$  によって生成される微分同相写像  $\mathcal{T}_u(t)$  で記述される。積分範囲  $\Omega(t)$  は  $\mathcal{T}_u(t)\Omega_0$  とも記述できることから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(t) &= c^{-1} \int_{\Omega(t)} \mathcal{L}_u(f(\vartheta) i_u n) \\ &= c^{-1} \int_{\Omega(t)} f'(\vartheta)(\mathcal{L}_u \vartheta) i_u n + c^{-1} \int_{\Omega(t)} f(\vartheta) \mathcal{L}_u(i_u n). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

まずは  $\mathcal{L}_u \vartheta$  を計算する。Clebsch パラメタの保存則の式 (5.2a)–(5.2b) を使いたいので、 $\mathcal{U}$  による Lie 微分で一旦記述してから  $u$  による Lie 微分に戻す、という手順をとる。 $\vartheta$  の分子については、

$$i_u dx^0 = dx^0(\mathcal{U}) = \mathcal{U}(x^0) = \mathcal{U}^0 = c\gamma, \quad (\text{A.28})$$

$$\therefore \mathcal{L}_u(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2) = (\mathcal{L}_u dx^0) \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2 = c d\gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2. \quad (\text{A.29})$$

一般に、 $n$ -form  $\alpha = \alpha^* \text{vol} \in \Omega^n(M)$  の両辺に Lie 微分  $\mathcal{L}_X$  を適用すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \alpha &= (\mathcal{L}_X(\alpha^*)) \text{vol} + \alpha^* \mathcal{L}_X \text{vol} \\ &= (\mathcal{L}_X(\alpha^*)) \text{vol} + \alpha^* (\text{div} X) \text{vol}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\therefore (\mathcal{L}_X \alpha)^* = \mathcal{L}_X(\alpha^*) + \alpha^* (\text{div} X). \quad (\text{A.31})$$

ただし、ベクトル場  $X \in \mathfrak{X}(M)$  のダイバージェンス  $\text{div} X$  は、 $\mathcal{L}_X \text{vol} = (\text{div} X) \text{vol}$  を満たすスカラー関数として定義している。これと Leibniz 則を  $\mathcal{L}_u \vartheta$  に適用すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u \vartheta &= \mathcal{L}_u \left( \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*} \right) \\ &= \frac{\mathcal{L}_u(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*} - \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* \mathcal{L}_u(n^*)}{(n^*)^2} \\ &= \frac{(c d\gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* - (dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* \text{div} \mathcal{U}}{n^*} - \frac{(dx^0 \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* \{0 - n^* \text{div} \mathcal{U}\}}{(n^*)^2} \\ &= \frac{(c d\gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

ここで、 $\mathcal{L}_u$  と  $\mathcal{L}_u$  を結びつけるために一般的な関係式を導入する：一般の  $C^\infty$  多様体  $M$  上の任意の  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega \in \Omega^k(M)$  に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX} \omega &= d i_{fX} \omega + i_{fX} d\omega \\ &= d(f i_X \omega) + f i_X d\omega \\ &= df \wedge i_X \omega + f d i_X \omega + f i_X d\omega \\ &= df \wedge i_X \omega + f \mathcal{L}_X \omega. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

式 (A.32), (A.33) を組み合わせると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u \vartheta &= \mathcal{L}_{(\gamma^{-1}u)} \vartheta = 0 + \gamma^{-1} \mathcal{L}_U \vartheta \\
&= \gamma^{-1} \frac{(c d\gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*} \\
&= \frac{(c d(\log \gamma) \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*}.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$\mathcal{L}_u(i_u n)$  の式変形に話を移す. 式 (A.33) を用いると, 粒子数保存則の式 (5.2a) は以下のように変形できる:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u n &= \mathcal{L}_{(\gamma^{-1}u)} n = d(\gamma^{-1}) \wedge i_u n + 0 \\
&= d(\gamma^{-1}) \wedge i_{(\gamma u)} n \\
&= d(\gamma^{-1}) \wedge (\gamma i_u n) \\
&= -d(\log \gamma) \wedge i_u n.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

一般に  $\mathcal{L}_X$  と  $i_X$  は可換だから,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(i_u n) &= i_u(\mathcal{L}_u n) \\
&= -i_u(d(\log \gamma) \wedge i_u n) \\
&= -(i_u d(\log \gamma)) \wedge i_u n - d(\log \gamma) \wedge i_u i_u n \\
&= -u(\log \gamma) i_u n + 0.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

以上より, 半相対論的 enstrophy の時間発展は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Q(t) &= c^{-1} \int_{\Omega(t)} \left\{ f'(\vartheta) \frac{(c d(\log \gamma) \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*} - f(\vartheta) u(\log \gamma) \right\} i_u n \\
&= c^{-1} \int_{\Omega(t)} \left\{ f'(\vartheta) \frac{(c d(\log \gamma) \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^*}{n^*} - f(\vartheta) u(\log \gamma) \right\} c n^* d^3 x \\
&= \int_{\Omega(t)} \left\{ f'(\vartheta) c (d \log \gamma \wedge \omega_1 \wedge d\sigma_2)^* - f(\vartheta) n^* u(\log \gamma) \right\} d^3 x.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

となる. これは式 (5.6) に他ならない.

## 参考文献

- [1] Z. Yoshida and P. J. Morrison, “A hierarchy of noncanonical hamiltonian systems: circulation laws in an extended phase space”, *Fluid Dyn. Res.* **46**, 031412 (2014).
- [2] Y. Fukumoto, “A unified view of topological invariants of fluid flows”, *Topologica* **1**, 003–003 (2008).
- [3] P. J. Morrison, “Hamiltonian description of the ideal fluid”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 467–521 (1998).
- [4] J. Marsden and A. Weinstein, “Reduction of symplectic manifolds with symmetry”, *Rep. Math. Phys.* **5**, 121–130 (1974).
- [5] Z. Yoshida and P. J. Morrison, “Unfreezing casimir invariants: singular perturbations giving rise to forbidden instabilities”, in *Nonlinear physical systems: spectral analysis, stability and bifurcations*, edited by O. N. Kirillov and D. E. Pelinovsky (2014) Chap. 18, pp. 401–419.
- [6] J. Serrin, in *Fluid dynamics i / strömungsmechanik i* (Springer, 1959), pp. 125–263.
- [7] R. L. Seliger and G. B. Whitham, “Variational principles in continuum mechanics”, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **305**, 1–25 (1968).
- [8] K. Tanehashi and Z. Yoshida, “Gauge symmetries and noether charges in clebsch-parameterized magnetohydrodynamics”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **48**, 495501 (2015).
- [9] Z. Yoshida, “Clebsch parameterization: basic properties and remarks on its applications”, *J. Math. Phys.* **50**, 113101 (2009).
- [10] Z. Yoshida and P. J. Morrison, “Epi-two-dimensional flow and generalized enstrophy”, in *Mathematics for nonlinear phenomena — analysis and computation*, edited by Y. Maekawa and S. Jimbo (2017), pp. 271–284.
- [11] Z. Yoshida and P. J. Morrison, “Epi-two-dimensional fluid flow: a new topological paradigm for dimensionality”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 244501 (2017).
- [12] Z. Yoshida, Y. Kawazura, and T. Yokoyama, “Relativistic helicity and link in minkowski space-time”, *J. Math. Phys.* **55**, 043101 (2014).
- [13] F. Carrasco, L. Lehner, R. C. Myers, O. Reula, and A. Singh, “Turbulent flows for relativistic conformal fluids in 2+1 dimensions”, *Phys. Rev. D* **86**, 126006 (2012).
- [14] C. Eling and Y. Oz, “Holographic vorticity in the fluid/gravity correspondence”, *J. High Energy Phys.* **2013**, 1–11 (2013).
- [15] Y. Kawazura, G. Miloshevich, and P. J. Morrison, “Action principles for relativistic extended magnetohydrodynamics: a unified theory of magnetofluid models”, *Phys. Plasma* **24**, 022103 (2017).
- [16] L. P. Eisenhart, *Continuous groups of transformations* (Dover, New York, 1961).

- 
- [17] R. G. Littlejohn, “Singular poisson tensors”, in *Mathematical methods in hydrodynamics and integrability in dynamical systems*, Vol. 88, edited by M. Tabor and Y. Treve, 1 (American Institute of Physics, 1982), pp. 47–66.
- [18] H. K. Moffatt, “Field generation in electrically conducting fluids”, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne (1978).
- [19] H. K. Moffatt and R. L. Ricca, “Helicity and the calugareanu invariant”, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **439**, 411–429 (1992).
- [20] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, “Duality of the lagrangian and eulerian representations of collective motion—a connection built around vorticity”, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **54**, 014003 (2011).
- [21] L. W. Tu, *An introduction to manifolds*, 2nd ed. (Springer, New York, 2011).

# 謝辞

自分の修士課程の2年間を過ごすにあたって、吉田善章先生、齋藤晴彦先生、西浦正樹先生、洲鎌英雄先生、佐藤直木さん、釧持尚輝さん、中村香織さん、森敬洋さん、上田研二さん、相原寛人君、谷岡樹君、仲川涼介君、中澤拓也君、前角弘毅君、加藤鉄志君、村井俊太郎君、温周陽君には、大変お世話になりました。

吉田先生は、修士1年時の指導教員で、その年度末に核融合研所長に就任されてからは、研究指導委託という形でご指導いただきました。吉田先生のアドバイスのおかげで解決した問題もたくさんあったのですが、それよりも普段からの会話から感じ取れた視座や信念が強く印象に残っています。問題の切り分け方や、ひとへの説明の仕方など、見て学ぶべきところをひとつでも吸収したいと思いながら修士課程を送ってきました。2年間、背中を近くで見ながら研究できて楽しかったです。

齋藤先生、西浦先生、洲鎌先生、釧持さんは、分野が少し違うからこそ自分には思い付かなかった新しい視点を提供してくださったり、プロの目線から研究成果の伝え方のアドバイスをいただいたりしました。特に、齋藤先生は、修士2年時に指導教員を引き受けてくださり、様々な手続きを手伝っていただいたり、困った際は親身に相談に乗っていただいたりしました。大きな困難がなく研究生活を送れたのは齋藤先生のおかげだと思っています。

佐藤さんは、本研究において計算の詳細にも踏み込んだアドバイスをたくさんしていただき、とても助かりました。佐藤さんの助言のおかげで解決した問題は数知れません。僕の考え方・やり方が間違っている際に、はっきりと言っていただけのもありがたかったです。毎年のようにたくさん論文を書いておられて、その力強さに憧れています。

中村さん、森さん、上田さんは、研究内容はもちろん、様々な書類作成でお世話になりました。優しい先輩方のおかげで研究室の雰囲気は温かかったのだと思います。

相原君、谷岡君、仲川君、中澤君、前角君は、同期としてたくさん交流しました。コロナ禍が比較的収まっている時期を見計らって遊びに出掛けたこともあり、修士生活が楽しかったと言えるのは彼らのおかげだと思います。

加藤君と村井君は、とても優秀な後輩で、研究室運営に積極的に参加してくれた他、お互いに研究内容について議論してくれました。

温 (Wen) 君とは、地元中国や日本の話をできて楽しかった思い出があります。僕の拙い英語にも耳を傾けてくれたりゆっくりめで話してくれたりして、英語で会話する楽しさの一端を味わえました。

秘書の北山さんは、研究室の備品の融通や経費支払いなど、研究室生活を送る上でたくさんサポートしてくださいました。

竹中育英会からは、学部2年の頃からずっと給付型の奨学金をいただいております。感謝の念が絶えません。日本学生支援機構の貸与の奨学金と合わせて、自分の大学院生活の学費・生活費に充てて、おかげさまで研究に専念できました。

最後に、僕の研究生活を支えてくれた家族に感謝の意を表したいと思います。



# 研究成果

## 学術雑誌に発表した論文

1. Keiichiro Nunotani and Zensho Yoshida, “Clebsch representation of relativistic plasma and generalized enstrophy”, *Physics of Plasmas* (American Institute of Physics), **29**, 052905 (2022).  
[Editor’s Pick に選出]

## 学会における口頭発表

2. 布谷圭一郎, 吉田善章. 「Clebsch 表現および一般化 enstrophy の相対論的拡張」日本物理学会第 76 回年次大会, オンライン開催, 2021 年 3 月.
3. 布谷圭一郎, 吉田善章. 「相対論的 Euler 流体に対する Clebsch 表現および一般化 enstrophy」日本流体力学会年会 2021, オンライン開催, 2021 年 9 月.