



津波とその予測

## Press and Harkrider (1962), Propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere と Harkrider (1964), Theoretical and observed acoustic-gravity waves from explosive sources in the atmosphere の修正点

綿 田 辰 吾

Corrections to Press and Harkrider (1962)  
Propagation of Acoustic-Gravity Waves in  
the Atmosphere, and Harkrider (1964)  
Theoretical and Observed Acoustic-Gravity  
Waves from Explosive Sources in the  
Atmosphere

Shingo Watada

東京大学地震研究所

火山噴火や空中核実験起源の大気波動シミュレーション手法を開発した Press and Harkrider (1962), Harkrider (1964) 論文の修正を指摘する。修正により Haskell matrix 要素の発散が解消し、波動エネルギーが増大しない大気上端の境界条件となる。

Press and Harkrider (1962) では、それぞれの層内では均質(等温で背景密度と圧力が共通の鉛直スケールハイトを持つ)な薄層を重ねて表現した、現実の大気成層を模した大気中の音響重力波(acoustic-gravity waves)の伝播行列(Haskell matrix)を導出し、密度成層大気中を伝播する長周期音波と重力波と大気境界波の分散関係を求め、点波源が励起する合成波動を計算した。地表から高度220キロの熱圏までを39層の薄い層が重ねた鉛直大気構造のHaskell matrixは電子計算機により高速に求めることができるため、種々の大気構造を仮定した波形シミュレーションにより、観測された波形と直接比較が可能となった。筆者が論文を読んで気づいた修正事項を以下に示す。

### 1. Haskell Matrix $a_{12}$ 要素の修正

Haskell matrix の導出の基礎となる方程式は Press and Harkrider (1962) の eq (1) ~ (5) で与えられ、先行研究(Pekeris 1948)を引用したものである。Pekeris (1948) では従属変数として流速の発散( $\chi$ )を採用し、 $\chi$ と鉛直上向き流速 $w$ の鉛直方向に関する連立微分方程式(Pekeris 1948 eq (9) ~ eq (10))を導出し、Press and Harkrider (1962) では、さらに式変形して $w$ とLagrangian 圧力変動(論文の中では $p_p(z) = p(z) - g\rho^0\eta$ ,  $w = i\omega\eta$ ,  $\eta$ は鉛直変位)の鉛直座標を独立変数とする連立微分方程式(Press and Harkrider eq (11))と対応するHaskell matrixを導出している。

Watada (2013) は基礎方程式系(圧縮性流体の線形化されたオイラー方程式、密度と圧力を結びつける流体物質の構成方程式、質量保存則)から出発し、密度成層する重力下の圧縮性流体層の $w$ とLagrangian 圧力変動(論文の中では $\delta p$ と表現)の

# ACOUSTIC-GRAVITY WAVES IN THE ATMOSPHERE

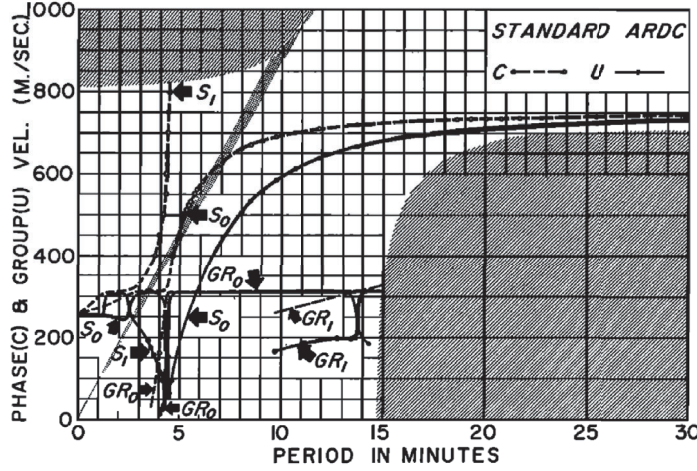


Fig. 6. Same as Figure 5 with different scale.

Haskell matrix を導いた。Watada (2013) では対象を海洋としているが、圧縮性密度成層流体の基礎方程式は大気でも海洋でも同じである。Press and Harkrider (1962) と Watada (2013) の行列要素を比較すると、2x2 の行列要素の 1 つが異なるように見える。

第  $m$  層の  $(w, p_p)$  の Haskell matrix 表現は Press and Harkrider (1962) eq (11) で与えられ

$$\begin{pmatrix} w_m(z_m) \\ p_{p_m}(z_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_m)_{11} & (a_m)_{12} \\ (a_m)_{21} & (a_m)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_m(z_{m-1}) \\ p_{p_m}(z_{m-1}) \end{pmatrix}$$

具体的に Press and Harkrider (1962) eq (12) は以下のとおり。

$$(a_m)_{12} = i(kc)^3 \frac{\left\{ g_m^2 \left( \frac{\alpha_m^2}{c^2} - \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \alpha_m^4 (kr_{am})^2 \right\} \sin((kr_{am})d_m)}{\rho_m^0 \alpha_m^4 (g_m^2 k^2 - \omega^4) (kr_{am})} \quad (1)$$

添字の  $m$  は  $m$  番目の均質層を表している。Watada (2013) では鉛直波数を  $m$  としている。以下、混乱を避けるため、式 (1) で使われている変数から各層を表す添字  $m$  を落とす。

鉛直波数  $kr_\alpha$  は Press and Harkrider (1962) eq (10) により与えられる。

図 1 大気中の波動の各種モードの分散関係 (Press and Harkrider (1962) fig 6 を引用) 原点から伸びる細い網掛け領域 (計算不能領域) は式 (1) の見かけの極により生じている。

$$(kr_\alpha)^2 = k^2 \left( \frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) - \frac{N^2}{c^2} \left( \frac{c^2 \gamma^2}{4(\gamma - 1)\alpha^2} - 1 \right) \quad (2)$$

$w$ : vertical flow velocity

$p$ : Eulerian pressure perturbation

$p_p$ : Lagrangian pressure perturbation

$\omega$ : angular frequency

$k$ : horizontal wave number

$c$ : horizontal phase velocity  $= \frac{\omega}{k}$

$g$ : gravity

$\alpha$ : sound velocity

$kr_\alpha$ : vertical wave number

$\gamma$ : specific heat ratio  $= \frac{C_p}{C_v}$

$d$ : thickness of a layer

$\rho^0$ : ambient density at the mid point of the layer

式 (1) では  $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g^2}{\omega^2}$  のとき、すなわち  $c = gT/2\pi$  のとき ( $T$  は周期)、分母が発散し計算不能となる。各層の高度の違いで  $g$  が少し変化するため、例えば Press and Harkrider (1962) fig 5 から fig 15 の一連の図で原点から伸びる有限の網掛けの領域で分散関係計算できない理由である。

第  $l$  層の  $(v_z, \delta p)$  の Haskell matrix 表現は Watada (2013) eq (14) で与えられる。

$$\begin{pmatrix} v_z(z_l) \\ \delta p(z_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(d_l) & a_{12}(d_l) \\ a_{21}(d_l) & a_{22}(d_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_z(z_{l-1}) \\ \delta p(z_{l-1}) \end{pmatrix}$$

同じく、各層を表す  $l$  を落とすと、式 (1) と同等の Haskell matrix 要素は Watada (2013) eq (16) または eq (20) で与えられる。

$$a_{12}(d) = \frac{i \left( \frac{\omega^2}{c_s^2} - k^2 \right) \sin(md)}{\omega m \rho_{0-0.5}} \quad (3)$$

ただし、鉛直波数  $m$  は以下で与えられる。

$$m^2 = k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{c_s^2}$$

式 (3) の中で、式 (1) と変数表記が共通でない変数を以下に列挙する。

$v_z$ : vertical flow velocity

$\delta p$ : Lagrangian pressure perturbation

$m$ : vertical wave number

$c_s$ : sound velocity

$N$ : buoyancy frequency

$\rho_{0-0.5}$ : ambient density at the middle of the layer

等温大気層内で  $N, H$  は定数であり、以下のような関係にある (Watada (2009) 参照)。

$$N^2 = g \left( \frac{1}{H} - \frac{g}{c_s^2} \right) = \frac{(\gamma - 1)g^2}{c_s^2} = \frac{(\gamma - 1)g}{\gamma H}$$

$$H = \frac{c_s^2}{\gamma g}$$

$$\omega_a = \frac{\gamma g}{2c_s}$$

$\omega_a$ : acoustic cutoff frequency

$H$ : scale height

式 (1) と式 (3) は異なっているように見える。 $p_p = \delta p$  と  $kr_\alpha = m$  と  $\alpha = c_s$  と  $\rho^0 = \rho_{0-0.5}$  の置き換えに加え、Press and Harkrider (1962) eq (6) の直後に導入されている  $\lambda$  は、背景場のスケールハイト  $H$  を用いて置き換えることができる。

$$\lambda = \frac{\gamma g}{2c_s^2} = \frac{1}{2H}$$

式 (1) では鉛直波数  $kr_\alpha$  が使われ、式 (3) では水平波数  $k$  が使われている。式 (2) を少し変形した以下の等式を使って鉛直波数  $kr_\alpha$  を水平波数  $k$  で

書き換え、

$$\begin{aligned} (kr_\alpha)^2 &= m^2 = k^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{c_s^2} \\ &= k^2 \left( \frac{(\gamma - 1)g^2}{\omega^2 c_s^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4} \end{aligned}$$

これを式 (1) に代入して整理すると、分母分子に共通項  $g^2 k^2 - \omega^4$  が現れ、式 (1) の見かけの極  $c^2 = \frac{g^2}{\omega^2}$  が消える。Press and Harkrider (1962) の変数の時間依存性は  $\exp(i\omega t)$  であり、Watada (2013) では  $\exp(-i\omega t)$  にあることに注意すると、式 (2) と同一であることが示される。

Watada (2013) で求めた Haskell Matrix の  $a_{11}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  要素も Press and Harkrider (1962) と一致している。Watada (2013) が求めた重力下の圧縮性密度成層流体の Haskell matrix は  $m (= kr_\alpha) = 0$  以外の極はない。

## 2. 大気上端の境界条件

Harkrider (1964) eq (20) では Eulerian 圧力変動を (添字の  $m$  を取り除き、鉛直波数に  $m$  を使用)

$$\begin{aligned} p(r, z, t) &= \exp(-\lambda z) [\Delta' \exp(-imz) \\ &\quad + \Delta'' \exp(imz)] J_0(kr) \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

と表現している。係数  $\Delta'$  と  $\Delta''$  は境界条件 (初期条件) により決まる。カッコ内第 1 項が鉛直正の方向 (上向き) に位相が伝播する波動を表し、第 2 項は負の方向 (下向き) に位相伝播する波動を表す。異方性のない媒質の弾性波であれば、位相の伝播方向は群速度の伝播方向であり、エネルギー輸送の方向となる。そのため、地震学や音響学などでは下から上に波動エネルギーが伝播する波動のみを考える場合、 $\Delta'' = 0$  とする。Harkrider (1964) でも同様に考え成層構造した上端の上には半無限の等温大気が広がるとし、その波動の境界条件は、大気上端では  $m^2$  の値にかかわらず、 $\Delta'' = 0$  を要請している。

密度成層する非圧縮流体重力波は位相の伝播方向と群速度の伝播方向は同じ鉛直面内にあり直交する。例えば、斜め上方にエネルギーが伝播する

重力波の位相の伝播方向は斜め下方である。詳しくは流体力学の教科書（例えば、Lighthill 4.4 章など）を参照されたい。圧縮流体中の重力波の場合も位相の鉛直伝播方向とエネルギーの鉛直伝播方向は逆向きとなる。そのため、係数  $\Delta'$  と  $\Delta''$  の選択は正しくは以下になる。

上端層大気の中で  $(k, \omega, c_s, g)$  から

$$\begin{aligned} (kr_\alpha)^2 &= m^2(k, \omega, c_s) \\ &= k^2 \left( \frac{(\gamma - 1)g^2}{\omega^2 c_s^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^4} \end{aligned}$$

を評価し、場合分けをする。

- 1) 音波領域の境界条件  
 $m^2 > 0$  かつ  $\frac{\omega}{k} > c_s$  であれば、 $\Delta'' = 0$
- 2) 重力波領域の境界条件  
 $m^2 > 0$  かつ  $\frac{\omega}{k} < c_s$  であれば、 $\Delta' = 0$
- 3) 無限遠に伝わらない（境界付近に捕獲された波となる）場合の境界条件  
 $m^2 < 0$

Press and Harkrider (1962) eq (10) の下で

$$kr_\alpha = m = -i \sqrt{k^2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_s^2} \right) - \frac{N^2}{c^2} \left( 1 - \frac{c^2 \gamma^2}{4c_s^2(\gamma - 1)} \right)}$$

と定義され、無限遠で発散しないよう、 $\Delta'' = 0$  が要請される。

特に 2) の場合は Press and Harkrider (1962) の境界条件ではエネルギーが大気上端から注入されるため、波動が増幅してしまう。

### 3. 終わりに

Press and Harkrider (1962) は、現実に近い構造を持つ大気に対して、火山噴火や空中核実験のような波源から生ずる大気中の圧力波シミュレーション手法を開発した。本稿ではその手法の若干の修正点を示した。彼らの手法は、大気層に海洋層を含めると大気と海洋のカップリングが自動的に考慮される点が優れている。1883 年インドネシア・クラカタウ火山噴火では、遠地津波が想定よりも早く到達し、最大波高は初動から遅れ、直

達津波が到来しないような大西洋沿岸や、英仏海峡付近でも海面変動が記録された。Press and Harkrider (1966) や Harkrider and Press (1967) はこの手法により、クラカタウ火山噴火で発生した大気波動とのカップリングにより津波が発生することを示した。

2022 年トンガ海底火山噴火直後に太平洋周辺で予測よりも早く津波は到達し、そして、最大波高は初動からかなり遅れて到来した（小林 2022）。1883 年クラカタウ火山噴火津波の再来である。トンガ火山噴火津波を契機に、大気・海洋の相互作用や大気層の風系を含むような高度なシミュレーション手法が開発され、大気波動起源の津波の発生に関する研究が進むことが期待される。

### 参考文献

- [1] 小林祥司, トンガの海底火山噴火津波はなぜ起きた?, 日経サイエンス, 52, 4, 30-33, 2022.
- [2] Harkrider, D., Theoretical and observed acoustic-gravity waves from explosive sources in the atmosphere, J. Geophys. Res., 69, 5295-5321, 1964.
- [3] Harkrider, D., F. Press, The Krakatoa Air-Sea waves: an example of pulse propagation in coupled systems, Geophys. J. R. astr. Soc., 13, 149-159, 1967.
- [4] Lighthill, J., Waves in Fluids, Cambridge University Press, 1978.
- [5] Press, F., D. Harkrider, Propagation of acoustic-gravity waves in the atmosphere, J. Geophys. Res. 67, 3889-3908, 1962.
- [6] Press, F., D. Harkrider, Air-Sea waves from the explosion of Krakatoa, Science, 154, 1325-1327, 1966.
- [7] Watada, S., Radiation of acoustic and gravity waves and propagation of boundary waves in the stratified fluid from a time-varying bottom boundary, J. Fluid Mech., 627, 361-377, doi:10.1017/S0022112009005953, 2009.
- [8] Watada, S., Tsunami speed variations in density-stratified compressible global oceans, Geophys. Res. Lett., 40, 4001-4006, doi:10.1002/grl.50785, 2013.

