

# 振動子ネットワークにおけるリズム精度の同期依存性

2022年9月修了 複雑理工学専攻 47206130 平田幸子 指導教官：郡宏教授

**keywords:** 同期, リズム精度, ノイズ, 集団サイズ, ネットワーク構造

## 1 同期現象とそのリズム精度

心臓の鼓動、神経細胞の発火、睡眠覚醒リズムなどの生体リズム現象は、細胞同士の複雑な相互作用により実現され、精確に周期的な集団振動がなされることが、生命活動の維持において、重要であると考えられている。

同期 (synchronization) とリズム精度 (temporal precision) は異なる概念であり、同期していても、リズム精度は精確とは限らない。リズムがゆらいでいるのは機能的なシステムとは言えないため、リズム精度には非常に精密な制御メカニズムが存在すると考えられる。

リズム精度は実験により簡単に測定できるため、古くから様々な実験論文の報告がなされている [1,2]。例えば、cycle-to-cycle 周期  $T$  の変動係数  $CV$  と集団サイズ  $N$  について、心筋細胞を用いた実験研究において  $CV \propto 1/\sqrt{N}$  の関係が成り立ち、集団の効果 (Collective enhancement of precision) が存在することが知られている [1]。

一方で理論研究や数値解析の先行研究はまだ少ないが、文献 [3] では、Stuart-Landau 振動子を用いて、リズム精度  $CV$  とネットワーク構造の関係を調べている。弱ノイズ、振動子同士の強結合 (振動数同一) を仮定すると、位相方程式を M-OU 過程として取り扱うことができる [4]。

文献 [3] では、 $CV \propto 1/\sqrt{N}$  となることを数値解析と理論式で確認したほか、同期を生じやすいネットワーク構造ではリズム精度が良く、同期を生じにくいネットワーク構造ではリズム精度が悪くなることについても報告している。

## 2 本研究の主題

本研究では、振動子ネットワークにおける同期レベルとリズム精度の関係について数値解析を行った。

文献 [3] が線形近似条件での結果について報告していることから、本研究では、非線形性の強い条件、特に同期のオンセット領域について調べることを目的とした。

自然界では、振動子の集団は自然振動数に分布を持って存在しており、振動子同士の結合強度が臨界値を超えると相転移的に同期を生じる。同期転移は非線形に生じる線形モデルでは解析できないため、蔵本モデルによる解析が有効となる。

また、ネットワーク構造によって同期の成長が異なることが知られていることから [7]、リズム精度のネットワーク構造依存性についても調べた。

## 3 数理モデル

### 3.1 位相方程式

#### 1. 蔵本モデル

自然振動数  $\omega_i$  は  $\mathcal{N}(2\pi, 1)$  のガウス分布とした。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (1)$$

#### 2. 蔵本モデル (ノイズあり)

上記 1. にノイズを加えた系である。

自然振動数  $\omega_i$  は  $\mathcal{N}(2\pi, 1)$  のガウス分布；

ノイズは  $E[\xi_i(t)] = 0$  かつ  $E[\xi_i(t)\xi_j(t')] = \delta_{ij}\delta(t-t')$  の白色ノイズ (ノイズ強度  $\sqrt{D} = 1$ ) とした。ノイズにより位相が乱れ、同期転移は生じにくくなる。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) + \sqrt{D}\xi_i \quad (2)$$

#### 3. 同一振動数 (ノイズあり)

同一振動数  $\omega_{const.} = 2\pi$  とし、上記 2. と同じノイズを加えた系。文献 [3] と同じ数理モデルであるが、本研究ではノイズ強度を  $10^4$  倍とし非線形な現象を観察した。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_{const.} + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) + \sqrt{D}\xi_i \quad (3)$$

### 3.2 同期レベルの指標

平均場振動の振幅値  $R$  が同期レベルの指標となる。

$$R = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \right| \quad (4)$$

### 3.3 リズム精度の指標

平均場の振動周期の変動係数  $CV = \text{std}[T] / \text{mean}[T]$ 、及び、平均場の振動時系列の自己相関関数

$$C(t') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t) \cdot \psi(t-t') dt \quad (5)$$

の包絡線  $e^{-t'/\tau}$  の時定数  $\tau$  の逆数  $1/\tau$  を用いた。

$CV$  は正確な指標であり、実験論文の結果との比較も容易である。一方で  $1/\tau$  は近似指標であるが、ノイズを含む数理モデル (2. と 3.) の場合は  $CV$  を正確に算出することが困難であるため、専ら  $1/\tau$  を指標とした。

## 4 数値解析結果

### 4.1 同期とリズム精度の関係 (全結合蔵本モデル)

蔵本モデル、全結合の場合の結果を示す。同期レベル  $R$  が大きくなるにつれて、CV が減少しリズム精度が良くなること、集団の効果が存在することが確かめられた。また、同期オンセット領域においては、CV は  $R$  に対して指数減少を示すことがわかった。

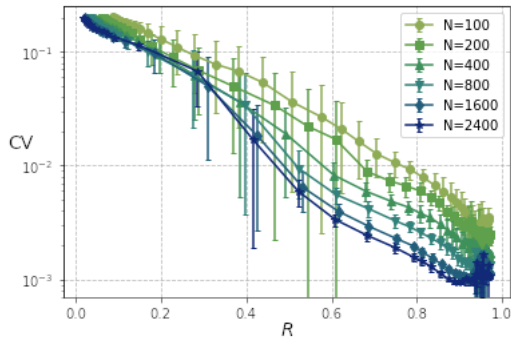


図 1: 同期転移に伴うリズム精度の変化 (全結合)

また、同期振動子の数  $N_s$  に対してリズム精度を調べた結果、 $CV \propto 1/\sqrt{N_s}$  とはならず非同期振動子の存在がリズム精度を悪くすることがわかった (非図示)。

### 4.2 ノイズ有無の効果 (全結合蔵本モデル)

集団サイズ  $N$  が比較的大きい時、同期オンセット領域では、ノイズありの系 (数理モデル 2) のほうがリズム精度が良くなることがわかった。

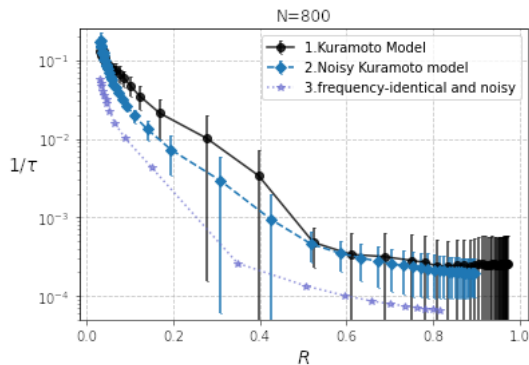


図 2: ノイズ有無の効果,  $N=800$ (全結合)

### 4.3 ネットワーク構造とリズム精度の関係

リズム精度のネットワーク構造依存性を検証した。ランダムネットワークにおいては、同期レベル  $R$  とリズム精度  $CV$  の関係は、ネットワーク構造の粗密にはよらなかった (非図示)。

一方で、スケールフリーネットワークの場合、同期レベル  $R$  とリズム精度  $CV$  の関係は、全結合の場合とは異なる特性を持つことが確かめられた ( $N=100$ , 上図)。

また、スモールワールドネットワークにおいても、同期レベル  $R$  とリズム精度  $CV$  の関係性について検証を行った ( $N=100$ , 下図)。

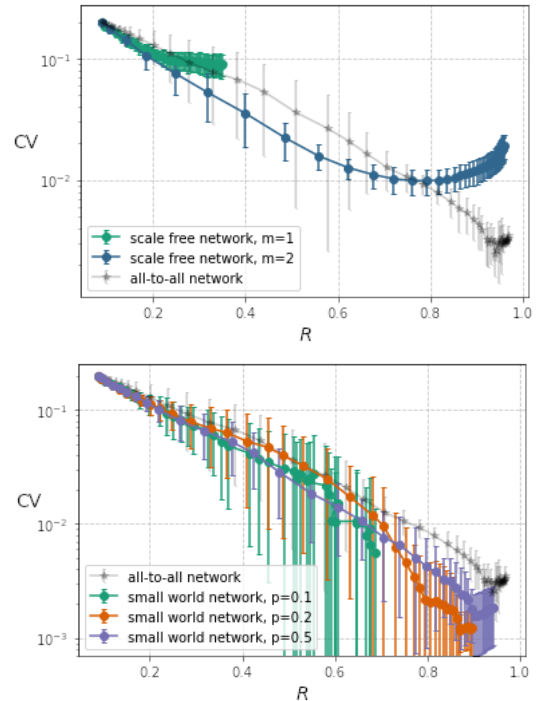


図 3: リズム精度のネットワーク構造依存性

## 5 本研究の成果及び今後の展望

- 同期レベルが高くなるにつれてリズム精度が良くなること、集団の効果が発揮されることを確認した。
- 集団サイズが比較的大きい時、同期オンセット領域ではノイズありのほうがリズム精度が良くなることを確認した。
- リズム精度のネットワーク構造依存性について知見が得られた。

今後の研究においては、同期レベルとリズム精度の関係について、引き続き現象の解明を行いたい。

## 参考文献

- [1] J. R. Clay, R. L. DeHaan, 1979, Biophysics J., 28(3) 377-389
- [2] K. Moortgat, T. Bullock, T. Sejnowski, 2000. J. Neurophysiol. 83(2), 971-983.
- [3] H. Kori, Y. Kawamura, N. Masuda / Journal of Theoretical Biology 297(2012)
- [4] W. Gerstner, W. Kistler, Cambridge University Press, Cambridge (2002)
- [5] Kuramoto, Y., 1984. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer, New York.
- [6] 蔵本由紀, 河村洋史 (著) 『同期現象の科学』 京都大学学術出版会 2017
- [7] F. A. Rodrigues, T. K. DM Peron, P. Ji, J. Kur-tus., Physics Reports 610(2016) 1-98