

## 有馬頼僊による弓形の研究とその情報源について

武正 泰史

### はじめに

本稿では、和算家大名・有馬頼僊(1714-1783)による弓形の求長について検討する。円や弓形についての研究、いわゆる円理と呼ばれる分野は、江戸時代の数学者(和算家)によって、しばしば取り組まれており、それは有馬も例外ではない。彼の『拾機算法』(1766年序・1769年刊)では、「補遺」として3問の弓形に関する問題が掲載されている。その内容は弓形の弧長、矢(高さ)、弦を求める問題であり、これによりそれぞれの値を精確に計算することが可能となった。

これら3問で提示されている近似式が、現代数学ではどのように翻訳されるかは既に先行研究において分析されている。その一方で『拾機算法』執筆に至るまでの有馬による弓形の研究過程、彼が参照した情報源について、十分な検討が行われていない。

そこで本稿では有馬の著作を比較検討し、彼がどのように弓形を研究していたのか、その過程を明らかにする。この時、有馬が参照したとされる和算家の著作を比較することで、彼の情報源を考察する。

本稿では弓形について、下記のように記号(弧長  $s$ 、矢  $c$ 、弦  $a$ 、弓形を切り取った元の円の直径を  $d$ )を設定する。また引用文では適宜常用漢字を用いた。

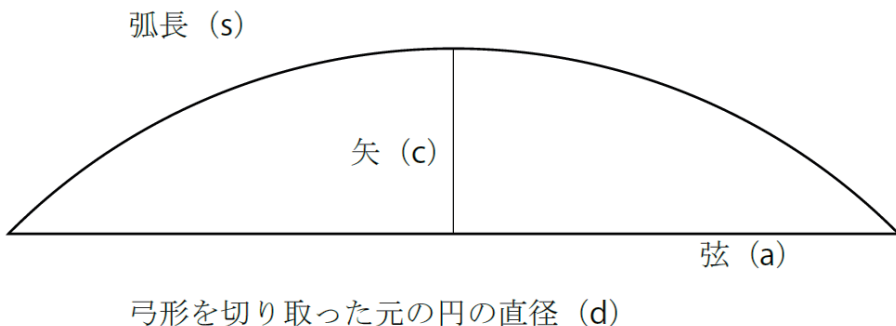


図1：弓形の名称と記号

## 1. 有馬以前における弓形の計算

和算において、弓形（円弧）はしばしば研究の対象となっていた。それは関孝和（?-1708）や、彼の弟子である建部賢弘（1664-1739）が取り組んでいたことから明らかである<sup>1</sup>。

関による弓形の研究は、『括要算法』（1712 年刊）で確認できる<sup>2</sup>。同書は関の遺稿をまとめたものであり、関の弟子である荒木村英が編纂した全 4 巻の刊本である。弓形の弧長の近似式を提示するのは、『括要算法』巻貞である<sup>3</sup>。巻貞では最初に、円に内接する正多角形の周長を計算し（環矩術と呼ばれる）、加速法を適用することで円周率を計算している。この環矩術を応用することで、直径（ $d$ ）を 1 尺とする円から矢（ $c$ ）が 1 寸、2 寸、3 寸、4 寸、4.5 寸となる弓形を切り取り、それぞれの弧長（ $s$ ）の値を求める。次に補間法によって  $c$  を用いた  $s$  の近似式を以下のように提示する。

$$s = \frac{1}{1276900(1-c)^5} (5107600c - 23835413c^2 + 43470240c^3 - 37997429c^4 \\ + 15047062c^5 - 1501025c^6 - 281290c^7)$$

この近似式の構成はニュートン補間法と同等であるとみなされてきた<sup>4</sup>。これにより弓形の弧長について、従来の近似式を用いるよりも格段に精度の高い値を求めることが可能となった<sup>5</sup>。

『括要算法』で得られた数式をさらに発展させ、三角関数の級数展開と同等の計算を行ったのが建部賢弘である。建部による弧長の計算は、彼の数学方法論を紹介したことで知られる『綴術算経』（1722 年）で提示されている<sup>6</sup>。本書の「探弧数 第十二」で弓形の弧長が計算されている。ここで建部は次のような近似式を得ている<sup>7</sup>。

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = cd + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{c^3}{d} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{c^4}{d^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{32}{45} \cdot \frac{c^5}{d^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{32}{45} \cdot \frac{25}{33} \\ \cdot \frac{c^6}{d^4} + \cdots$$

さらに建部は『円理弧背術』でこの式を変形した次の近似式を提示している。

この近似式は  $x = \sqrt{\frac{c}{d}}$  としたとき,  $\arcsin^2 x$  の級数展開と同等の計算である。

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = cd \left\{ 1 + \frac{2^2}{3 \cdot 4} \left(\frac{c}{d}\right) + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{c}{d}\right)^3 + \dots \right\}$$

このように建部は『括要算法』における補間法を用いた近似式からさらに発展させ、冪級数展開の数式にまでたどりつくこととなった<sup>8</sup>。

なお京都の和算家集団である宅間流においても、三角関数の級数展開と同等の近似式が『宅間流円理』（1722 年）の中で言及されている<sup>9</sup>。したがって 1720 年代に、異なる和算家集団が同じ方法で弧長を求める計算に到達していたことになる<sup>10</sup>。

和算家は弓形の研究を進める中で、三角関数の無限級数展開と同等の計算を理解するに至った。ただし『括要算法』以後の代表的な出版物に注目すると、建部が到達したような計算法の詳細な著述は、有馬頼僊の『拾璣算法』まで現れない。有馬がどのような過程で弓形を研究し、『拾璣算法』においてどのように記述したのか、さらに有馬が情報源とした人物について、次節以降で検討する。

## 2. 有馬頼僊の弓形の研究

有馬頼僊（1714–1783）は第 7 代久留米藩主であり、かつ和算家として多くの著作を残した人物である<sup>11</sup>。彼の業績の中で弓形に言及しているのは『拾璣算法』と『方円奇巧』（1766 年序）である。前者は有馬の唯一の出版物として広く普及した書物であり、後者には有馬の円に関する研究が網羅的に記述されている。これらの著作に記載された弓形の問題に注目し、有馬による弓形の研究について検討する<sup>12</sup>。

## 2.1 『拾機算法』における弓形の研究

『拾機算法』全5巻は150問の問題を収録している<sup>13</sup>。これらの問題は20の項目に分けられており、あえて現代の言葉を使えば、代数方程式、不定方程式、合同式、補間法など様々な分野が収録されている。

150問の問題とは別に同書には、「弧背密法」と題する補遺3問が収録されている。この「弧背密法」において弓形の考察が展開されている<sup>14</sup>。その冒頭に次のような解説文が記されている（原漢文）。

### 弧背密法

古今弧背数を求るは数家にして、未だ其正術を審にせず。予嘗て背を求る真術を獲たり。故に巻中皆此術を施して、背数を設く。固より其術技数多有りと雖も、其本各一に帰す。実に窮巧探蹟の精術にして、先哲甚だ秘せり。今や学ぶ者のために、三條を択取し、其梗概を揭示す。此余区々の捷術、悉く之に輯録して、以て他日の鏤刻を期すのみ<sup>15</sup>。

[訳] 昔から今に至るまで弓形の弧長を求めてきたのは僅かな人たちだけで、いまだその正しい方法は審らかではない。私はかつて弧長を求める正しい方法を会得した。ゆえに本書でその方法を用いて、弧背の値を確定した。もとよりその方法は数多く存在しているとはいえ、根本は一つに帰着する。実に技巧を極め真理を探ることができる精密な術である。先人はほとんど秘匿していた。今や学ぶもののために、3題を選択し、そのあらましを示す。その他区々の簡便な術はこれを全て収録して、他日の出版を期したい。

この「弧背密法」に記載されている弓形の近似式は、有馬に至るまで公開されていない、いわば秘伝として解釈できるものである。有馬は自身が学んだ弓形に関する知識について、後学のために3つの問題の概要を示した。その他区々

の簡易な方法は後日の出版を期待していた<sup>16</sup>。

「弧背密法」に掲載された問題は順番に、①直径と弓形の矢から弧長を求める問題、②直径と弧長から矢を求める問題、③直径と弧長から弓形の弦を求める問題である。

この3問について有馬が解法で用いた近似式は現代的な数学表現で表すと、以下のような数式（①'～③'）で表現できる<sup>17</sup>。

$$s = 2\sqrt{cd} \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \left( \frac{c}{d} \right) + \frac{3^2}{5!} \left( \frac{c}{d} \right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{7!} \left( \frac{c}{d} \right)^3 + \dots \right\} \quad \text{①'}$$

$$c = \frac{s^2}{4d} \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 4} \left( \frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left( \frac{s}{d} \right)^4 - \dots \right\} \quad \text{②'}$$

$$a = s \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left( \frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left( \frac{s}{d} \right)^4 - \frac{1}{7!} \left( \frac{s}{d} \right)^6 + \dots \right\} \quad \text{③'}$$

これらはそれぞれ  $\arcsin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$  に対応しており、数学的にはそれぞれ  $2d \times \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}$ ,  $\frac{d}{2} (1 - \cos \frac{s}{d})$ ,  $d \times \sin \frac{s}{d}$  の無限級数展開と同等である<sup>18</sup>。

これらの近似式が『拾璣算法』の本文ではどのように記述されているか、1問目の弧長を求める問題を例にして確認する<sup>19</sup>。その本文を現代語にすると次のようになる（原文は末尾に掲げた附録1を参照）。

[訳] 今弓形がある。直径1尺、矢が2寸であるとき、どのように弧長を求めるか。

答えは 9.27295218001612232428512462922428804 微強。

術に曰く、直径を置き、矢をかけて、4倍した数の平方根を求め、これを原数とする。原数を置き、矢を乗じ直径で割り、得た数に一差乗率を乗

じ一差除率で割り、一差とする。一差を置き、矢を乗じ直径で割って得た数に、二差乗率を乗じ二差除率で割り、二差とする。二差を置き、矢を乗じ直径で割って得た数に、三差乗率を乗じ三差除率で割り、三差とする。三差を置き、矢を乗じ直径で割って得た数に、四差乗率を乗じ四差除率で割り、四差とする。四差を置き、矢を乗じ直径で割って得た数に、四差乗率を乗じ四差除率で割り、五差とする（六差以上もこのようにして差数を求める。その差数は際限なく自由に求める）。原数を置き、各差数を足して得る数を、弧背として、題意に合致する（なお問題において矢が長い場合、少数点以下の値で正確に一致する数が少ない。桁数を正確に求めるためには、差数を多く用いることで、値を正確に求められる。この後の問題もこれに倣う。もし、矢が半径より長い場合は直径から矢を引いて、小矢とする。術によって小背を求め、円周を減らすことで弧長を求める）。

弧長の値を求めるために、以下のように定義された原数、第一差、第二差、... を順に加える。

原数： $\sqrt{4cd}$

第一差： $\text{原数} \times \left(\frac{c}{d}\right) \times \frac{\text{一差乗率}}{\text{一差除率}}$

第二差： $\text{第一差} \times \left(\frac{c}{d}\right) \times \frac{\text{二差乗率}}{\text{二差除率}}$

第三差： $\text{第二差} \times \left(\frac{c}{d}\right) \times \frac{\text{三差乗率}}{\text{三差除率}} \dots$

このとき各差の乗率、除率は第 30 差まで一覧となって掲載されている（末尾の附録 2 を参照）<sup>20</sup>。この方法に即して直径 1 尺、矢 2 寸の値から弧長を求めると、「答曰」で示した値が得られる。なおここで得られた値と、

$2d \times \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}$  を数値計算した値を比較すると、小数点以下第 35 位まで正しい<sup>21</sup>。

なお上記の引用では最後に、矢が半径より短い半径に近い長さ、半径よりも長い場合について補足している。前者の場合は多数の差数を原数に加えることで、精密な値を求めるとしている。一方後者の場合、半径から矢を減らし「小矢」を設定する。「小矢」から④'の数式によって「小背」を求める。その値を円周から引くことで、元々の弧長を得る。

弧長を求める問題と同じように、2 問目では矢、3 問目では弦を求める方法が記載されている。どちらも原数を設定し、各差を順々に定めた上で、求める値を算出している。このとき各差を設定するための表も併記されている。

このように三角関数の無限級数展開と同等の方法によって、有馬は弓形に関する値を計算していた。次に有馬がどのように弓形について検討していたのか、その過程を示す史料として彼の『方円奇巧』に注目する。

## 2.2 『方円奇巧』における弓形の研究

弓形について、『拾璣算法』とは別に有馬が研究した著作が『方円奇巧』である<sup>22</sup>。同書は全 4 巻の写本であり、自序文は明和 3 (1766) 年に書かれている。円周率、弓形、円に内接・外接する正多角形の問題を中心に扱っている。

同書は東北大学附属図書館 (2 点)、国会図書館 (1 点)、東京大学総合図書館 (1 点)、日本学士院 (2 点)、天理大学図書館 (1 点) に所蔵されている。自筆本を写したとされる写本は、日本学士院蔵本 (請求記号 8865, 以下学士院本) である。

学士院本の特徴として、本来ならば第 1 巻から順に元、亨、利、貞と分類されるべきところ、第 1 巻の内容を元巻、第 2 巻の内容を利巻、第 3 巻の内容を貞巻、第 4 巻の内容を亨巻と分類している<sup>23</sup>。また題箋では、利巻を第 3 巻とし、貞巻を第 2 巻とするなど、その順序が逆になっている。他にも学士院本は

落書きと思われる箇所や省略が確認されるため、有馬の自筆本がそのまま写されたのか、それとも写す段階で写し間違い、分類の間違いなどの変化が生じたのか、考慮する必要がある。

一方国会図書館蔵本（請求記号 139-109，以下国会本<sup>24)</sup>）は，上中下＋附巻で分類されている．学士院本との違いとして，奥付の位置が異なっている．国会本は下巻の末尾に「大尾筑南鎮府秋風閣有其映源頼僮撰」と書かれている．一方学士院本は第4巻（国会本の附巻）の末尾に「大尾筑南鎮府秋風閣有其映源頼僮撰 印 印」とある．

以上をふまえつつ，本稿では学士院本と国会本の双方を参照する．引用に際して，特に断りのない場合，自筆を写した学士院本によるが，必要に応じて国会本を参照する．

『方円奇巧』の構成は次の通りとなる．

## 第1巻

方円真術

円術

第一求円周幕，第二求円周

弧術

第三求弧背幕，第四求弧背，第五求弧矢，第六求弧弦，第七求弧積

## 第2巻

累斜術

第八 求弧中距斜矢，第九 求弧中距斜弦

方術

第十求角中径幕，第十一求角中径，第十二求平中径幕仍求角積幕，第十三求平中径仍求角積，第十四求角面幕，第十五求角面，第十六求距面矢或設係面矢，第十七求距面斜或謂係面斜

角総平方術（山路主住述作）

## 第3巻



## 括術

其一求弧背，其二求弧矢，其三求弧弦，其四求弧積，其五求弧中距斜矢，其六求弧中距斜弦，其七求角中徑，其八求平中徑，其九求角積，其十求角面

## 第4巻

## 術路

第1巻では円周率，弓形について検討している．第2巻では主に円と正多角形の関係について考察している．第3巻では，第1巻と第2巻でとりあげた題材を再度考察している．第4巻は傍書法と呼ばれる数式の表記法によって、『方円奇巧』でとりあげた数式を解説している．

同書の自序文によれば，有馬は後述する松永良弼(?-1744?)の『方円算経』(1739年)を参照している．該当する箇所を引用すると次の通り(〈 〉は原文中における割注)．

往歳内藤政樹〈従五位下，備後守，采地七万石．その頃奥州岩城の城主，後，日州延岡の城を賜る．今致仕落髪して兼山と号す〉の臣，葆直齋良弼ママ〈氏は松永，安右衛門と称す〉なる者著す所の方円算経全備五巻を獲て，之を閲す．その原路深奥にして，まことに妙術と謂うべし．故にその高妙に服し，簾中に秘蔵すること尚し．今やその要例を取り，以て更に術文を施し，技巧を分け，冊子と成し，名づけて方円奇巧と曰ふ<sup>25</sup>．(原漢文)

[抄訳] 内藤政樹の家臣である葆真齋良弼が著すところの『方円算経』全5巻を入手して，これを閲覧した．その原理は奥深く，まことに優れた術であると言えよう．その妙術に心服し，書箱に秘蔵したまま久しい．今その中から重要な事例を取り，術文を記載し，技法を分けて冊子にし，『方円奇巧』と名付ける．

有馬が他の和算家の業績をどの程度把握していたのかを知る上で、この序文の情報は重要である。有馬は内藤家臣、松永良弼の『方円算経』を入手し、これを主な情報源として『方円奇巧』を成立させたのである。これに関連する史料として、奥付に「于時延享丁卯〔1747年〕清和日 林窓庵〔有馬頼僮〕模写之」と記す『方円算経』が、日本学士院に所蔵されている<sup>26</sup>。

『方円奇巧』で弓形に言及している箇所は、第1巻の「第三 求弧背冪」から「第七 求積」である。そこでは順に、弓形の弧長の2乗、弧長、矢、弦、面積について検討している。このうち『拾機算法』の「弧背密法」と同じ内容を扱っているのは、「第四 求弧背」、「第五 求弧矢」、「第六 求弧弦」である。ここでは主として「第四 求弧背」に注目し、『拾機算法』「弧背密法」第1問と比較する。

「第四 求弧背」では5種類の弧長の求め方を記載している。それぞれ、

- (1) 直径と矢から弧長を求める方法（「有径矢求背」）
- (2) 矢と弦から弧長を求める方法（「有矢径求背〈設背之多極数而施術〉」）
- (3) 直径と弦から弧長を求める方法の1つ目（「有径弦求背」）
- (4) 直径と弦から弧長を求める方法2つ目（「有径弦求背」）
- (5) 直径・矢・弦から弧長を求める方法（「有径矢弦求背之新術」）

である。それぞれの方法で用いられる弧長の近似式は次のように表せる<sup>27</sup>。

$$s = 2\sqrt{cd} \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \left( \frac{c}{d} \right) + \frac{3^2}{5!} \left( \frac{c}{d} \right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{7!} \left( \frac{c}{d} \right)^3 + \dots \right\} \quad (1)$$

$$s = \frac{4cd}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{c}{d} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \left( \frac{c}{d} \right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \left( \frac{c}{d} \right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \left( \frac{c}{d} \right)^4 - \dots \right\} \quad (2)$$

$$s = a \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{c}{d} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \left( \frac{c}{d} \right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \left( \frac{c}{d} \right)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \left( \frac{c}{d} \right)^4 + \dots \right\} \quad (3)$$

$$s = a \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \left( \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3^2}{5!} \left( \frac{a}{d} \right)^4 + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!} \left( \frac{a}{d} \right)^6 + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{9!} \left( \frac{a}{d} \right)^8 + \dots \right\} \quad (4)$$

$$s = a + \frac{8 \cdot c^2}{3a} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{c}{d} \right) - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{7} \left( \frac{c}{d} \right)^2 - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \left( \frac{c}{d} \right)^3 - \dots \right\} \quad (5)$$

このうち(1)は『拾機算法』『弧背密法』の第1問と同じ構成であり、用いられている用語、記述のスタイルもほぼ一致している(末尾の附録3を参照). 同様に『拾機算法』の他の2問(矢を求める問題、弦を求める問題)も、『方円奇巧』『第五 求弧矢』『第六 求弧弦』の記述と一致している<sup>28</sup>. すなわち『拾機算法』『弧背密法』の3問は、『方円奇巧』と同じ内容を扱っているだけでなく、その記述も酷似している.

『拾機算法』の序文は明和3年5月(明和丙戌夏五月穀旦)に、『方円奇巧』の序文は明和3年1月(明和三年龍集柔兆閏茂太族)<sup>29</sup>に記されていることから判断すると、『方円奇巧』が『拾機算法』よりも先に成立した事になる. ゆえに『拾機算法』『弧背密法』は『方円奇巧』の一部を採用したと推察される. ただし4ヶ月程度の差であり、ほぼ同時期に両書を編集、執筆していたと考えられる.

『方円奇巧』が提示する弓形に関する情報量は『拾機算法』よりも多い. 『方円奇巧』では上述した5種類の近似式を示す他に、後述する「折術」についても検討している. 『拾機算法』で公開された弓形に関する知識は、『方円奇巧』の内容のごく一部であったといえよう.

この他にも『方円奇巧』と『拾機算法』の間に差異は存在する(附録3を参照). 『方円奇巧』では『拾機算法』のように具体的な数値を与えておらず、一般的な解法だけに言及している. 具体的な数値の計算は「解曰」と書かれた箇所で行っており、直径10寸、矢1寸という『拾機算法』とは異なる数値を与えて弧長を導出している<sup>30</sup>. なお算出した桁数は『拾機算法』が小数点以下35位まで計算しているのに対し、『方円奇巧』は小数点以下13位まで計算している<sup>31</sup>.

次に『拾機算法』には収録されていない『方円奇巧』の「折術」を検討する(末尾の附録4を参照). 「折術」とは弓形の弧を順次2等分する操作を連続し、微小な弓形の弧長を既に提示した近似式によって求めた後、その総和を取って元の弧長を求める操作である. これにより差数を多数用いることなく、弧長を求めることが可能だと有馬は述べる<sup>32</sup>.

具体的には下図において，Bは弧ACの2等分点，Eは弧ACの2等分点とすると，線分BCは $\sqrt{cd}$ ，線分EFは $\frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - cd})$ となる<sup>33</sup>．次に線分ECを弦とする弓形について同様の手順を行い，その矢を求める．これをn回繰り返して微小な弓形の弦長と矢の値を計算する．さらにここで得られた矢の長さから，上記(1)の方法によって微小な弓形の弧長を求める．得られた弧長を $2^n$ 倍することで元の弓形の弧長を導くのである<sup>34</sup>．

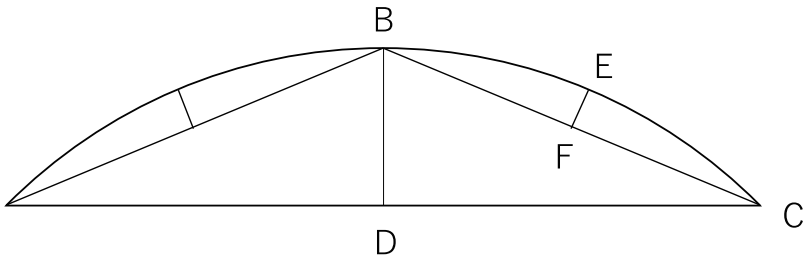


図2：「折術」参考図

他に有馬は「括術」でも，弓形について検討している．「括術」は『方円奇巧』で提示した数式をより簡易に扱えるよう数式を操作した箇所である．例えば弧

長について， $\alpha = \frac{d}{c}$ を除法として，

$$s = a \left( 1 + \frac{A_1 + \frac{A_2 + \frac{A_3 + \frac{A_4 + \frac{A_5}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha}}{\alpha} \right)$$

( $A_1, A_2 \dots$ はこの問題における差数) という級数を得ている<sup>35</sup>．

以上の『拾機算法』と『方円奇巧』の相違点に加えて，『方円奇巧』には有馬と他の和算家の交流を考える上で重要な情報が「角総平方術」として記されている．これは山路主住(1704–1772)<sup>36</sup>による述作として明記されている<sup>37</sup>．

この中にも弓形の問題への言及が確認できる．例えば矢算法 ( $\beta = 5.8696$ ) という定数を設定した上で、弧長  $s$  について、 $s = \sqrt{a^2 + \beta c^2}$  という近似式を得ている<sup>38</sup>．有馬は山路の弟子であり、その山路からも情報提供を得た上で『方円奇巧』を成立させたのである<sup>39</sup>．

以上のように『方円奇巧』では弓形について、「折術」や「括術」など『拾璣算法』には収録されていない内容を記載している．『拾璣算法』に記載された「弧背密法」とは、『方円奇巧』の一部であり、基本的な問題のみが公開されたといえる<sup>40</sup>．次節以降では有馬が弓形の近似式をどのような和算書から学んだのかを確認する．

### 3. 有馬頼僮が参照した弓形の計算

本節では有馬頼僮が参照した和算家の記述について検討する．特に『方円奇巧』執筆の際に参照したとされる松永良弼の記述、次いで中根彦循 (1701–1761) の記述を検討する．

#### 3.1 『方円算経』における弓形の研究について

松永良弼は『方円奇巧』の有馬の自序文にもあるように、磐城平藩主 (延享4〔1747〕年に日向延岡へ転封) 内藤政樹 (1703–1766) の家臣であった．松永は和算家として多くの著作を執筆しただけでなく、天文学に関係する書物も執筆している<sup>41</sup>．

円、弓形、円と正多角形の関係に注目した松永の著作が『方円算経』である<sup>42</sup>．同書の構成は次のとおりであり、『方円奇巧』との類似性が確認できる．

首巻 率引

巻一 円率

第一求周数幂，第二求周数

弧背率

第一求背幂，第二求背数内元率，第三求背数中元率，第四求背数  
外元率，第五求矢，第六求弦，第七求積

卷二 方率

第一求角中径幂，第二求角中径，第三求距面弦

捷術

第一求角中径，第二求平中径，第三求距面弦

卷三 円充方

第一求角面，第二求距面弦，第三求距面矢

弧中截斜

第一求距斜矢，第二求距斜弦，附捷術補

卷尾 立表

『方円算経』において弓形をとりあげている箇所は、「弧背率」と題された項目である．これを有馬の記述と比較する．特に「第二 求背数」から「第六 求弦」に注目し，提示される近似式を対照する．それらの近似式は順に以下のように表記できる<sup>43</sup>．

$$s = a \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{c}{d} \right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \left( \frac{c}{d} \right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{c}{d} \right)^3 + \dots \right\} \quad (\text{i})$$

$$s = 2\sqrt{cd} \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \left( \frac{c}{d} \right) + \frac{3^2}{5!} \left( \frac{c}{d} \right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{7!} \left( \frac{c}{d} \right)^3 + \dots \right\} \quad (\text{ii})$$

$$s = \frac{4cd}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{c}{d} \right) - \frac{2}{3 \cdot 5} \left( \frac{c}{d} \right)^2 - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} \left( \frac{c}{d} \right)^3 - \dots \right\} \quad (\text{iii})$$

$$c = \frac{s^2}{4d} \left\{ 1 - \frac{1}{3 \cdot 4} \left( \frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left( \frac{s}{d} \right)^4 - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left( \frac{s}{d} \right)^6 + \dots \right\} \quad (\text{iv})$$

$$a = s^2 \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \left( \frac{s}{d} \right)^2 + \frac{1}{5!} \left( \frac{s}{d} \right)^4 - \frac{1}{7!} \left( \frac{s}{d} \right)^6 + \dots \right\} \quad (\text{v})$$

これらのうち『拾璣算法』における近似式と同等のものは、(ii)「第三求背数 中元率」、(iv)「第五 求矢」、(v)「第六 求弦」である。有馬はこれら松永の記述を理解して、自身の著作に採用した。その結果弓形に関する近似式は、『拾璣算法』の出版によって世に公開されたのである。

松永は弧長の計算法について、3種類の求め方((i)「第二 求背数 内元率」、(ii)「第三求背数 中元率」、(iii)「第三 求背数 外元率」)に言及している<sup>44</sup>。『拾璣算法』の「弧背密法」と同等のものは「中元率」で、その他「内元率」、「外元率」は『方円奇巧』にも記載されており、(3)「有径弦求背」、(2)「有矢<sup>ママ</sup>径求背」が該当する。

有馬と松永の記述をさらに比較すると、有馬は松永を完全に踏襲していない(末尾の附録5を参照)。その違いは以下のようにまとめられる。

- (a) 有馬は松永と異なり、原数と各差の和を逐次記載していない。
- (b) 有馬は松永が用いなかった乗率、除率という表現を用いている。
- (c) 有馬は『方円奇巧』では差数を第12差まで計算し、松永が第5差までの計算に留めた域を上回っている。
- (d) 弧長について、有馬は『方円奇巧』で5種類の近似式を、松永は3種類の近似式を提示する<sup>45</sup>。
- (e) 有馬は「折術」を説明するが、松永の記述にはない。

弓形の弧長計算の記述に注目すると、有馬の弓形の研究の情報源は『方円算経』だけではないと考えられる。その一つとして、上述のように山路主住からの経路を想定できるだろう。それだけでなく、有馬自身による計算方法の改良が行われた可能性もある。

このように有馬の弓形の研究は、彼自身の研究成果や、松永以外の複数の情報源を前提としなければならない。次項では、松永がふれていない「折術」について、その情報源となる可能性のある和算家の記述を検討する。

### 3.2 中根彦循の『勘者御伽双紙』『弧背真術』について

有馬の別の情報源と比定される和算家が、京都の中根彦循である<sup>46</sup>。彦循は父の元圭（1662–1733）、建部賢弘などに和算を学んでいた。

彦循の著作『勘者御伽双紙』（1743 年）第 3 巻の最後に、「弧背真術」と呼ばれる項目が設けられている。そこで直径と矢から弧長を求める問題、弧長と直径から矢を求める問題が収録されている<sup>47</sup>。

その解法の本文は、答えを求めるための近似式の係数と次数が記載されているのみである。それぞれの近似式を現代的に表現すると以下ようになる。

$$s = \sqrt{\frac{4(51975d^4 - ((276c + 1060d)c + 3085d^2)c + 22050d^3)c}{(33d - 25c)1575d^2}}$$

$$c = \frac{\left[ \left\{ 360s^2 - 30\left(\frac{s^2}{d}\right)^2 \right\} d + \left(\frac{s^2}{d}\right)^3 \right] \times 56d - \left(\frac{s^2}{d}\right)^4}{80640d^3}$$

これらの数式について、前者は久留島義太（?-1758）による近似式、後者は松永良弼による近似式と同等であると指摘されている<sup>48</sup>。有馬の近似式の記述と比較すると、彼は『勘者御伽双紙』における近似式の記述を踏襲していない。

『勘者御伽双紙』で注目される点は「折術」への言及である。同書によれば、多くの桁数を正確に求めるために「折術」を用いることを提案している（末尾の附録 6 を参照）。

『勘者御伽双紙』と『方円奇巧』の「折術」を比較すると、数学的な操作は同じである。弓形を  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , ... と小さくする過程が記載されていることが分かる。ただし、両者の記述は完全に一致していない。彦循は弓形を折半し、その上で上記の近似式を用いる操作のみを記載しているのに対して、有馬は数値を代入して具体的な計算まで行っている点も注目される<sup>49</sup>。

また、彦循と有馬は共に桁数を正確に多く求めるため、「折術」を利用する



としている。加えて有馬は、差数を多数用いることなく計算できる方法だと解釈している。すなわち両者の「折術」に関する評価は完全に一致していない。以上のように史料の文面を見る限りでは、有馬が『勘者御伽雙紙』の「折術」を情報源とし、『方円奇巧』に引用したと断定することはできない。別の情報源が存在した、ないし有馬が独自に研究した成果と考えられる

一方で経済的に恵まれた有馬が、『勘者御伽雙紙』を入手していた可能性はある<sup>50</sup>。また、中根元圭門下の暦算家・入江修敬（1699-1773）が久留米藩士に召し抱えられている<sup>51</sup>。有馬は出版物、ないし入江という人物を通して彦循につながる手段を有していたといえよう。

さらに有馬と彦循の繋がりをみる上で、有馬の『逐索奇法』（1762年）における記述が重要となる。

右〔螺旋の求長問題の解法〕関氏の遺術なり。近世中根彦循は詳解を施して其稿を贈る。以てここに附す<sup>52</sup>。（原漢文）

上記の引用箇所では関孝和の『解見題之法』にある螺旋の求長問題が考察されている。この問題に対して彦循が答えを施し、その原稿を有馬に送った<sup>53</sup>。弓形ではないものの、有馬は彦循から数学に関して情報提供を受けていたのである。

したがって、有馬は彦循から弓形に関して、特に「折術」について知らされ、自身の言葉、解釈に置き換えて『方円奇巧』に掲載した可能性は捨てきれない。他方、有馬が別の情報源を得ていた、もしくは彼が独自に研究した成果をまとめたとも考えられる<sup>54</sup>。これについてさらなる検討は後日の課題としたい。

## おわりに

本稿での議論を確認してみよう（図3）。有馬頼僮が『拾璣算法』に記載した弓形の計算は、三角関数の無限級数展開と同等の内容であった。同書に記載

された内容は、有馬の『方円奇巧』にほぼ同じ形で記載されている。ゆえに有馬は弓形の問題を『方円奇巧』から『拾機算法』に抜粋して出版したと想定される。自序文の年記の前後関係に従うならば、『方円奇巧』の成立は『拾機算法』より若干早いものの、両書はほぼ同時期に編纂されたと考えられる。

有馬は弓形の研究について、松永良弼の『方円算経』を参照していた。ただし有馬は、扱っている近似式については同書に依拠しているものの、その記述を全面的に採用、引用していない。彼は松永よりもさらに精密な計算を行い、松永の記述にはない技法をも考察していた。その一つが「折術」である。「折術」は中根彦循の『勘者御伽雙紙』に収録されており、断定できないものの、その記述を有馬が参照した可能性があることを本稿で指摘した。有馬は松永以外に複数の情報源を有しており、その内容と自身の研究を『方円奇巧』に編纂し、その一部を『拾機算法』に抜粋したのである。

今後の課題として、なぜ『方円奇巧』の一部のみが『拾機算法』によって公開されたのか、その理由について検討する必要がある。さらに刊行が予定されていたとされる『拾機算法』の後編<sup>55</sup>がどのような内容を含んでいたのか、それを示唆する史料の発見が待たれるところである。

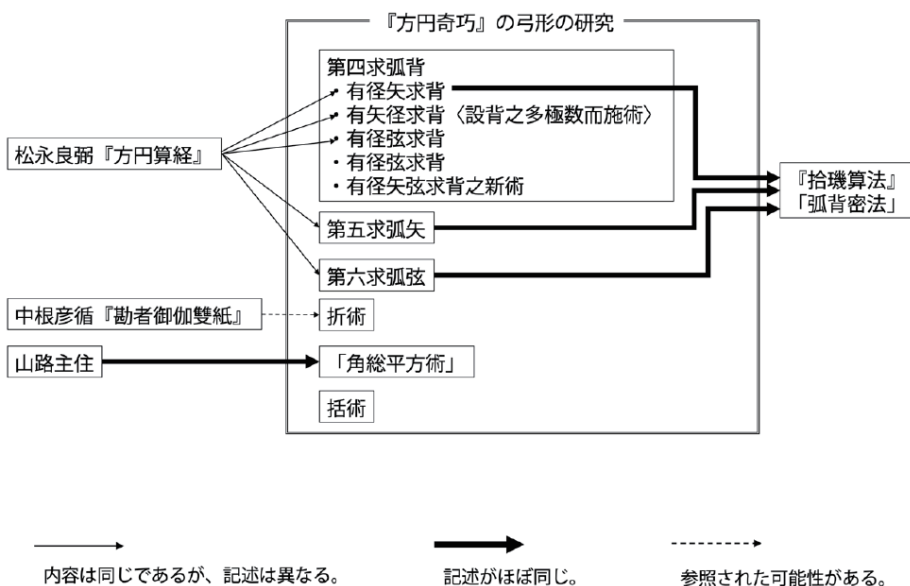


図3：『拾機算法』に至るまでの弓形の研究の流れ

謝辞：本研究は科学研究費助成事業（研究課題 21J10631）の助成を受けたものである。謹んで感謝申し上げる..

## 附録

### 凡例

- ・句読点は引用者による.
- ・旧字は適宜常用字に変更した.
- ・〈 〉は原文中の割注を示す. ただし一部割注に含まれる数値は地の文に入れた.
- ・〔 〕は引用者による注とする.

附録1：「弧背密法」第1問（『拾機算法』巻5，43丁裏-44丁表）

今有弧，円径一尺矢二寸．問得其背術如何．

答曰背 九寸二分七二九五二一八零零一六一二二三二四二八五一二四六二九二二四二八八零四微強

術曰置円径，以矢相乗四之，得数，開平方除之，為原数．置原数，乗矢除径，得数乗一差乗率，除一差除率，為一差．置一差，乗矢除径，得数，乗二差乗率，除二差除率，得二差．置二差，乗矢除径，得数，乗三差乗率，除三差除率，為三差．置三差，乗矢除径，得数，乗四差乗率，除四差除率，為四差．置四差，乗矢除径，得数，乗五差乗率，除五差除率，為五差．〈六差已上，逐如此宜求差数，其位数無窮随意也．皆倣之〉．置原数，併加各逐差数，共得数为定背，合問．〈乃題辞矢長者，密合位数少．故欲設密合多位者，多求逐差件々，則密合位数亦多．後術皆倣之．若矢長於半径者，以減径，余為小矢，而依術設其小背，以減円周，余為欲求其背也〉

附録2：「弧背密法」第1問の数表．

※第10差までを記載し，第11差から第30差までは省略した．乗除率の数字は漢数字からアラビア数字に改めた．

	乘率	除率
一差	1	6
二差	9	20
三差	25	42
四差	49	72
五差	81	110
六差	121	156
七差	169	210
八差	225	272
九差	389	342
十差	361	420

附錄 3：『方圓奇巧』「第四求弧背，有徑矢求背」（『方圓奇巧』元卷，19 丁裏-20 丁表）

今有弧圓徑〈若干〉，矢〈若干〉，問背。

術曰置圓徑，以矢相乘，四之，得數開平方，除之，為原數〈即弧中二箇旁弦也。擬背數〉。置原數，乘矢除徑，得數，乘一差乘率，除一差除率，為一差。置一差，乘矢除徑，得數，乘二差乘率，除二差除率，為二差。置二差，乘矢除徑，得數，乘三差乘率，除三差除率，為三差。置三差，乘矢除徑，得數，乘四差乘率，除四差除率，為四差。置四差，乘矢除徑，得數，乘五差乘率，除五差除率，為五差。〈六差已上倣之〉。逐如此求之，而所得逐差數，各疊加于原數，共得數為汎背，如法得定背也。

附錄 4：『方圓奇巧』「第四求弧背，折術」（『方圓奇巧』元卷，33 丁表-34 丁裏）  
折術〈不設逐差數多件，而求定背多位，謂之折術也。若原矢位數短者，折矢之位數，却繁多。勞乘除，而求多位不簡易，故宜拋本術。又原矢長者依本術，雖究多位，原矢位數繁多。徒困乘除，難輒得長位，故施折術，則譬雖折矢長位，乘次數少，而設多位便也。因無如折術，右技巧之難易，只應乘除數，宜從捷敏矣。〉〔中略〕  
今有弧，圓徑〈若干〉，矢〈若干〉，問背。

術曰〈原矢少於矢限數者，皆宜施此術〉，置原矢，以徑乘之得數，為甲弦幕〈即旁弦幕也，或謂之一次折小弦幕也〉。以減徑幕，余開平方除之得數〈凡開商末位每逢加減乘除，自有收棄，其增損數次，而遂至多或至少故，宜設開商多位，后倣之〉，以減徑余半之，為甲矢〈即旁矢也，或謂之，一次折小矢。此數得最小數，則直用之〉。置甲矢，以徑乘之，為乙弦幕〈謂之二次折小弦幕〉。以減幕〔国会本では，以減徑幕〕，余開平方除之，得數以減徑，余半之，為乙矢〈謂二次折小矢，逐如斯，若此數亦猶多，則如前乘徑，為丙弦幕。以減徑幕，余開平方除之，得數以減徑，余半之為丙矢也。丁矢已上如此求逐矢〉。逐如是求小矢〈至得<sup>ママ</sup>微數而止〉，而取攸止微矢与円徑〈如旧〉，拋求背原術，設其定小背，而如法倍之，〈倍法曰，用甲矢者二倍，用乙矢者四倍，用丙矢者八倍，用丁矢者十六倍，用戊矢者三十二倍，次第如此〉，得數為所求定背也。

#### [前半部分の訳]

折術（順番に差数を設定することなく，弧長の桁数を多く求める方法を折術という．もし矢の桁数が短い場合，折矢の桁数が多くなり計算が煩雑になる．簡単に多くの桁数を求めにくい．したがって本術に依拠するべきである．原矢の桁数が多い場合は本術に依拠すると，矢の桁数の計算が煩雑になる．弧長の桁数を多く求める場合は折術を施す．このとき折矢の桁数が長いとしても，かけ算の数は少ないため簡易に多くの桁数を求めることができる．右の技巧の難易は乗除数の数におうじて，素早い方法に従うべきである）。

附録5：『方円算経』「第五 中元率」（『方円算経』巻1，26丁表-27丁裏）

解曰，以截斜背為原者，雖其數未免於弱率，然勢在于内漸密於背，故各言中元率。倍二斜弦，為原數。

解曰，假如円徑一十寸，矢一寸者，徑矢相乘為實。平方開之，得二斜弦三寸一六二二七七六六〇一六八三，倍之為原數。

原數 六寸三二四五五五三二〇三三六七五。

置矢一段，以乘原數，為一差實。以徑六段付之，得一差。由陰率，得差數也。

以矢一段乘原數，得六寸三二四五五三二〇三三六七，為一差實。置徑六之，得六十寸。以除一差實，得一差。加原數，得一差汎背，後故于此。

一差 〇寸一〇五四〇九二五五三三八九四。

汎背 六寸四二九九六四五七五六七五七。

置矢九之，以乘一差，為二差實。以徑二十段付之，得二差。

二差 〇寸〇〇四七四三四一六四九〇二五。

汎背 六寸四三四七〇七九九二一六五九五。

置矢二十五之，以乘二差，為三差實。以徑四十二段付之，得三差。

三差 〇寸〇〇〇二八二三四六二一九六五。

汎背 六寸四三四九九〇三三八三八五六一。

置矢四十九之，以乘三差，為四差實。以徑七十二段付之，得四差。

四差 〇寸〇〇〇〇一九二一五二二八八三。

汎背 六寸〔十と誤記している〕四三五〇〇九五五三六一四四五。

置矢八十一之，以乘四差，為五差實。以徑一百一十段付之，得五差。

五差 〇寸〇〇〇〇〇一四一四九三九五七。

汎背 六寸四三五〇一〇九六八五五四〇三。

通推之，求逐差數，以疊加于原數，得從弱漸親之背數。

附錄 6：『勘者御伽雙紙』「弧背真術」折術（『勘者御伽雙紙』第 3 卷，27 丁表 -27 丁裏）

... 故猶欲得真數多位者，宜依折術〈折術見後〉求之也。

折術曰，列矢以徑乘之，為一次折小弦冪。以減徑冪，余開平方，所得以減徑，余折半之，為一次折小矢。亦以徑乘之，為再折小弦冪。以之求再折小矢，依求背術，求小弧背。四之〈如一次折者倍之，三次折者八之也〉，為所求定背也。

又列背，折半之，為小弧背。亦折半之，為再折小弧背。依求矢術，求小弧矢，與徑相減，相乘四之，為小弧弦冪。以徑除之，為一次折矢〈如一次折者以之為定矢也〉。以之亦求弦冪，以徑除之，為所求定矢〈如三次折者以之亦求弦冪，以徑除之為定矢也〉

## 文献と注

- 1 関孝和について、日本学士院編『明治前日本数学史』第2巻、岩波書店、1956年、133–265頁、佐藤賢一『近世日本数学史』東京大学出版会、2005年、上野健爾・小川東・小林龍彦・佐藤賢一『関孝和論序説』岩波書店、2008年を参照。建部賢弘について、『明治前日本数学史』第2巻、266–446頁、小川東・佐藤健一・竹之内脩・森本光生『建部賢弘の数学』共立出版、2008年を参照。
- 2 『括要算法』については『明治前日本数学史』第2巻、146–190頁を参照。
- 3 『括要算法』の弧長の計算について、本稿では『明治前日本数学史』第2巻、183–189頁、上野健爾ほか『関孝和論序説』（特に第3章）を参照。
- 4 『明治前日本数学史』第2巻、188頁。
- 5 関孝和より以前は、 $s^2 \approx a^2 + 6c^2$  という数式が知られていた（上野ほか『関孝和論序説』、154–155頁）。この近似式の精度が『括要算法』によって高まったのである。なお注8で述べるように、『括要算法』の近似式は建部賢弘の『研幾算法』の近似式よりも精度が高い。
- 6 『綴術算経』については『明治前日本数学史』第2巻、284–310頁を参照。
- 7 以下2つの建部の数式は『明治前日本数学史』第2巻、302–303頁、小川ほか『建部賢弘の数学』、130頁を参照。
- 8 建部賢弘は『研幾算法』（1683年）において弓形の弧長の値を求めており、ここでは多項式補間が用いられている。（佐藤賢一「建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について」『電気通信大学紀要』第30巻第1号、2018年、52–61頁、佐藤賢一「建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式の復元について（続）」『電気通信大学紀要』第34巻第1号、2022年、7–16頁）。佐藤によると『括要算法』における技法は建部による『研幾算法』の計算を、より簡易かつ精確にしたものと位置付けることも可能である（佐藤「建部賢弘『研幾算法』による弓形の弧長の導出式について（続）」、2022年）。

9 宅間流については、『明治前日本数学史』第3巻，岩波書店，1957年，407–423頁を参照．東京大学総合図書館に所蔵されている『宅間流円理』（請求記号 T20-572）第2巻をみると，本文で後述する①の近似式と同等の計算を行ない，弧長を求めている．

10 関孝和と建部賢弘は京都の和算家と交流を持っていたことが指摘されている（佐藤賢一「関孝和と同時代の和算家たち」日本数学会・2018年度秋季総合分科会，数学基礎論および歴史分科会・特別講演アブストラクト，2018年，1–15頁）．ゆえに弓形の計算についても情報交換していた可能性があるものの，今後の史料調査が求められる．

11 有馬頼鐘については『明治前日本数学史』第3巻，215–262頁，篠原正一『久留米人物誌』菊竹金文堂，1981年を参照．

12 有馬は『諸術奇鑑』（1746年）という写本を執筆しているとされる．同書では弓形について「弧形」と題して研究している．だが，有馬は同書において，答えを求めるための係数と次数のみを提示しており，どのようにその値を導出したか明らかではない．

13 『明治前日本数学史』第3巻，222–223頁，藤井康生・米光丁『『拾機算法』—現代解と解説』私費出版，1999年，拙稿「和算書『拾機算法』の著者をめぐる再検討」『哲学・科学史論叢』第22号，2020年，21–50頁を参照．なお本稿では日本学士院蔵本（請求記号 469）を底本とした．

14 なお『拾機算法』では他にも弓形を題材にした問題を掲載している．例えば「点竄」の項目において，弓形の弦と直径の和，弓形の面積の2数から，弦を求める問題がある．

15 『拾機算法』巻5，43丁表–43丁裏．

16 『拾機算法』の刊記に「拾機算法後編嗣出」と書かれた版が存在する．これについて藤井は，後述する『方円奇巧』の内容が『拾機算法』の後編である可能性を指摘する（藤井康生「『方円奇巧』の解説」『数学史研究』173・174合併号，2002年，29–66頁）．だが同書の後編は出版されておらず，その内容は現時点で不明である．

17 『明治前日本数学史』第3巻，223頁を参照．なお，後世の和算家がこれらの公式の導出法について検討しており，その一部は横塚によって紹介されている（横塚



啓之『『拾機算法弧背術解極秘伝』と『拾機算法弧背解』における弧矢弦の公式の導出方』『数学史研究』第183号, 2004年, 1-25頁).

18 このとき  $2d \times \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}$  という式は現代的に次のように導くことが可能

である.  $c = \frac{d}{2}(1 - \cos \theta)$  (このとき  $\theta = \frac{s}{d}$ ) より,  $1 - \cos \theta = \frac{2c}{d}$  であ

り, この時  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$  なので,  $\frac{c}{d} = \sin^2 \frac{\theta}{2}$  となり,  $\sqrt{\frac{c}{d}} = \sin \frac{\theta}{2}$  を得

る. ゆえに  $\frac{\theta}{2} = \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}$  であり,  $\theta = \frac{s}{d}$  なので,  $\frac{s}{2d} = \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}$  となり,

$s = 2d \times \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}}$  となる.

19 『拾機算法』巻, 43 丁裏-44 丁表

20 ここで用いられている「乗率」, 「除率」という用語は『括要算法』にも用いられており, 関孝和が活躍して以後数学用語として一般的に理解されていたと思われる (『括要算法』貞巻, 34 丁裏).

21  $d = 10$ ,  $c = 2$  とした時,

$$2d \times \arcsin \sqrt{\frac{c}{d}} = 9.2729521800161223242851246292242880405707411$$

となる. 筆者が計算すると, 小数点以下第35位まで正確に得るためには原数 (『拾機算法』では  $4\sqrt{5}$ ) に第48差まで差数を加える必要があると判明した.

22 『方円奇巧』については, 『明治前日本数学史』第3巻, 223-228頁, 藤井「『方円奇巧』の解説」を参照.

23 学士院本には「亨歟」(亨であろうか) という補注がある. 同様に貞巻には「利歟」, 亨巻には「貞歟」という補注がある. これは写した人物か, 別の人物による書き込みか判然としない.

24 国会本は蔵書印から, 奥州水沢の藩校立生館の旧蔵書である.

- 25 『方円奇巧』第1巻, 2丁表.
- 26 請求記号 8922.
- 27 藤井「『方円奇巧』の解説」, 32-35 頁も参照.
- 28 『方円奇巧』第1巻, 37丁裏-38丁表, および 43丁裏-44丁表を参照.
- 29 『方円奇巧』第1巻, 2丁裏.
- 30 『方円奇巧』第1巻, 21丁表-22丁表. 同様に「第五 求弧矢」, 「第六 求弧弦」でも「解曰」として具体的な数値計算を行なっている.
- 31 『方円奇巧』では原数に第12差まで加えた段階で計算をやめている.
- 32 東北大学所蔵の『弧背術』(岡本写 34) に, 「折術」に関する記述がある(『弧背術』下巻, 7丁表-8丁裏). 同写本は『明治前日本数学史』によると, 建部賢弘の著作とされる(『明治前日本数学史』第2巻, 336-350頁). この岡本写 34 は, 後述する中根彦循から伝授された写本であると, 村井中漸(1708-1797)による奥付がある. つまり建部から中根, 村井へ伝授された写本だと考えられるものの, その詳細は明らかではない.
- 33 線分 BC は直角三角形の相似より, から得られる. 線分 EF は三平方の定理を利用することで求められる.
- 34 同様に「接術」は「第五 求弧矢」, 「第六 求弧弦」でも言及されている.
- 35 『方円奇巧』第3巻, 1丁表-3丁裏.
- 36 山路主住については『明治前日本数学史』第3巻, 159-210 頁を参照.
- 37 『方円奇巧』の序文で, 有馬が山路から原稿を受け取った旨が確認できる. 「連貝軒平生住<sup>ママ</sup>〈東都天文生, 府朝に仕ふ〉, 算類平方術を以て, 角平両中径を得る一般の通術を自発し, その稿を贈る. 不穀之を熟覧す. 算経の術に合せ攷れば, 則ち其の技異ると雖も, 玄理を推すに至れば, 即ち一源に帰す. 故に之を文して, 尾條に掲げて, 以て其の淵源を示す」(『方円奇巧』第1巻, 2丁表-2丁裏, 原漢文).
- 38 この他の数式の現代的な表現については, 藤井「『方円奇巧』の解説」, 53-55 頁を参照.
- 39 有馬と山路との交流について参考となる史料が存在する. それが『山路蔵書』である. 同書は仙台藩士戸板保佑(1708-1784)によって編纂された『関算四伝書』

のうち、「関算後伝 109」（東アジア数学史研究会編『関流和算書大成－関算四伝書』第5巻，勉誠出版，2010年，740–748頁）として所収されている．この蔵書目録は主住の息子である山路之徼（1729–1778）によって編纂され，山路家に伝わる書物名が収録されている．これを見ると，有馬の複数の著作が「関流算術別伝目録」として掲載されており，『方円奇巧』を含めた有馬の著作を山路家が所有していたと考えられる．

40 『方円奇巧』における(2)～(5)の弧長を求める方法について，それぞれ直径と矢を用いている．したがって与えられた条件から(1)の数式を用いることも可能であり，『拾璣算法』でも(1)を採用した可能性がある．

41 松永良弼については，『明治前日本数学史』第2巻，450–585頁，平山諦・内藤淳編『松永良弼』松永良弼刊行会，1987年を参照．主な著作として関孝和の『解伏題之法』（1683年重訂）を解説した『解伏題交式斜乗之諺解』（1715年）や，『天経或問發揮』（1735年），『天学名目鈔正誤』（1735年）といった天文学書がある．

42 『明治前日本数学史』第2巻，455–475頁も参照．なお本稿では有馬が写したとされる学士院蔵本（請求記号 8922）を参照した．学士院蔵本は首巻と巻一が合冊，巻二から立表まで合冊した全2冊の写本となっている．

43 『明治前日本数学史』第2巻，457–458頁も参照．

44 内，中，外，それぞれについて松永による説明がある．内は弦（ $a$ ）を近似の出発点としていること，中は本文の図2における線分 AB，線分 BC（ $2 \times \sqrt{cd}$ ）を近

似の出発点としていること，外は点 B で弓形に接する線分（ $\frac{4cd}{a}$ ）を近似の出発点としていることにそれぞれ由来している（『方円算経』巻一，8丁裏–9丁表，11丁表，12丁裏．『明治前日本数学史』第2巻，460頁も参照）．

45 上述の(4)，(5)の数式を『方円算経』では取り扱っていない．

46 中根彦循については『明治前日本数学史』第3巻，99–112頁を参照．

47 本稿では東北大学附属図書館蔵本（林文庫 95）を参照した．同書に関する先行研究として，『明治前日本数学史』第3巻，100–103頁，田辺寿美枝『『勘者御伽雙紙』

の弧背真術』『数理解析研究所講究録』第 1677 巻, 2010 年, 73–82 頁, 田辺寿美枝  
 「『勘者御伽雙紙』の弧背真術其ノ二」『数理解析研究所講究録』第 1739 巻, 2011 年,  
 149–156 頁がある.

48 久留島義太については『明治前日本数学史』第 3 巻, 1–75 頁を参照.

49 「折術」を用いた具体的な数値計算は、『方円奇巧』第 1 巻, 36 丁表–37 丁裏,  
 42 丁裏–43 丁裏を参照.

50 同じ彦循の出版物である『竿頭算法』(1738 年刊)について, 有馬はしばしば  
 言及している. 『加減乗除門』(1756 年, 天理大学蔵本〔請求記号 419–イ 1–2〕を参  
 照した) 2 丁表や, 『拾機算法』巻 3, 20 丁裏において確認できる.

51 入江については『明治前日本数学史』第 3 巻, 121–140 頁を参照.

52 『逐索奇法』, 55 丁表. 本稿では日本学士院蔵本(請求記号 2278)を参照した.

53 彦循が有馬に送った原稿は、『見題解』であることが示唆されている(『明治前  
 日本数学史』第 3 巻, 109–112 頁). 該当史料は日本学士院に所蔵されている(請求  
 記号 8886).

54 有馬と弓形の研究について, 注 32 で言及した『弧背術』が参考になる. 『明治  
 前日本数学史』では, 日本学士院に所蔵されている『弧背術』は有馬頼僊に献上さ  
 れたものであると推察している(『明治前日本数学史』第 3 巻, 336 頁). 筆者は未  
 見であるものの, これが事実であれば建部由来の「折術」の記述が, 中根彦循, 村  
 井中漸を経由して, 有馬に伝わった可能性もある.

55 注 16 を参照.