論文審査の結果の要旨

氏名 伊藤要平

ヒルベルトの第 21 問題として知られる古典的なリーマン=ヒルベルト問題は，与えられたモノドロミーを実現する線型常微分方程式の存在を問うものであった．

その高次元化として，Deligne は Lect. Notes in Math. (1970) において，複素多様体 X 上の超曲面 Y に極をもつ確定特異点型可積分接続と $X \setminus Y$ 上の局所系との一対一の対応という形でリーマン=ヒルベルト対応を定式化した．

さらに，柏原正樹氏は 1980 年代前半に，

$$\text{複素多様体 } X \text{ 上の確定特異点型ホロノミー } \mathcal{D} \text{ 加群の導来圏 } \mathbb{D}^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$$

と

$$X \text{ 上の } \mathbb{C} \text{ 構成可能層の導来圏 } \mathbb{D}^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$$

との間の導来圏同値として (高次元の) 確定特異点型のリーマン=ヒルベルト対応を定式化し，それを証明した．その同型は，「解」を取る函手 $\mathcal{S}ol(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_\lambda)$ によって

$$\mathcal{S}ol \colon \mathbb{D}^b_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)^{\mathrm{op}}$$

として与えられる．これは微分方程式論における一つの革命的な結果であり，また，表現論における Kazhdan–Lusztig 予想の解決の主要な道具としても用いられ，「幾何学的表現論」という研究領域が勃興するきっかけとなった．

しかし，(確定特異点型とは限らない) 一般のホロノミー $\mathcal{D}$ 加群に対してリーマン=ヒルベルト対応を拡張することはこの分野の専門家にとって長い間の懸案であった．その一つの理由は (確定特異点型の場合の) 像である「X 上の $\mathbb{C}$ 構成可能層の導来圏 $\mathbb{D}^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$」をどのように拡張するかという難しさがあった．最近，柏原正樹氏は D'Agnolo と共同で，帰納層の拡大版を用いることによって，この問題を解決した (Publ. IHES 2016)．その証明には 2 つの手法が大きな役割を果たした．その 1 つは柏原–Shapira が導入した帰納層という概念 (Astérisque 2001) である．この概念は，緩増加な関数の “層” を定式化

するために導入された．もう 1 つは，特異点の近くでの解の多様な増大度を捉えるために，もとの多様体 X ではなく，それに 1 変数付け加えて，$X \times \mathbb{R}$ 上の帰納層を考察するというアイディアである．これによって，ホロノミー $\mathcal{D}$ 加群の解の特異点における増大の様子を完全に理解することができ，D'Agnolo–柏原氏は

$$\text{複素多様体 } X \text{ 上のホロノミー } \mathcal{D} \text{ 加群の導来圏 } \mathbb{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$$

から

$$X \times \mathbb{R} \text{ 上の } \mathbb{R} \text{ 構成可能な帰納層のなす導来圏 } \mathbb{E}^b_{\mathbb{R}\text{-}c}(I\mathbb{C}_X)$$

へのド・ラーム函手を構成し，それが忠実充満函手であることを証明し，さらに解複体 $\mathbf{Sol}^E(\mathcal{M}^\bullet) \in \mathbb{E}^b_{\mathbb{R}\text{-}c}(I\mathbb{C}_X)$ からホロノミー $\mathcal{D}$ 加群の複体 $\mathcal{M}^\bullet$ が再構成できることを証明した．しかし，忠実充満函手

$$\mathbb{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbb{E}^b_{\mathbb{R}\text{-}c}(I\mathbb{C}_X) \tag{1}$$

の本質的像を決定するという問題は未解決問題として残されていた．

これに関して望月拓郎氏はプレプリント (arXiv:1610.08572, 第 3 版 2008, Dec.1) において「曲線テスト」という手法によって (1) の本質的像が特徴づけられることを示し，また，桑垣氏はこの問題に別のアプローチを導入している (arXiv:1808.02760)．

博士論文提出者は，この未解決問題に拡大帰納層の枠組の中で解答を得ようと取り組み，拡大帰納層における，ある意味での 「$\mathbb{C}$-構成可能層の概念」を提起して $\mathbb{E}^b_{\mathbb{R}\text{-}c}(I\mathbb{C}_X)$ の部分圏 $\mathbb{E}^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(I\mathbb{C}_X)$ を定義し，次の定理を証明した．

定理. $\mathcal{S}ol^E_X \colon \mathbb{D}^b_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}^b_{\mathbb{C}\text{-}c}(I\mathbb{C}_X)$ は圏同値である．

この定式化と証明は，D'Agnolo=柏原正樹や望月拓郎氏, Kedlaya 等の理論に (明示的あるいは潜在的に) 現れているアイディアを用いたものであり，決して斬新なものとはいえないが，重要な問題に取り組み，それに一つの直接的な解答を与えようと試みたものといえる．今後さらに深化させることができれば，リーマン=ヒルベルト対応のより明快な理解につながることが期待される．

博士論文の主要部は申請者の単著論文として学術誌に投稿され，査読の結果，既に出版されており，またそれ以外にも単著および，学術誌の査読の結果出版が決定している 2 本の共著論文もある．以上を総合的に審査した結果，当学位論文審査委員会は申請者が博士 (数理科学) の学位の資格があると認め，合格と判定した．