論文の内容の要旨

論文題目　Studies on singular Hermitian metrics on holomorphic vector bundles via L^2 estimates and L^2 extension theorems

(L^2 評価及び L^2 拡張定理による正則ベクトル束の特異エルミート計量の研究)

氏 名　稲山 貴大

本論文では主に正則ベクトル束の特異エルミート計量 (以下, 特異計量) の性質を, L^2 評価や L^2 拡張定理といった手法を用いて研究する. 具体的には特異計量の正値性を L^2 評価や L^2 拡張定理を用いて特徴付けること, 及び正値な特異計量があったときにどのような L^2 評価やコホモロジーの消滅定理が成立するかを考察する. 論文は全 5 部で構成される.

第 1 部は細野元気氏 (東北大 PD) との共同研究 [HI] に基づく. Deng-Wang-Zhang-Zhou は論文 [DWZZ] で multiple L^2-extension property という性質を導入した. これは領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則ベクトル束と特異計量の組 (E, h) に対して, 次のように定義される概念である:
任意の点 $x \in D$ と元 $a \in E_x \setminus \{0\}, |a|_h < +\infty, m \in \mathbb{N}$ に対し, $E^{\otimes m}$ の切断 $f_m \in H^0(D, E^{\otimes m})$ であって $f_m(x) = a^{\otimes m}$ と

$$\int_D |f_m|^2 \leq C_m |a^{\otimes m}|^2_{h^{\otimes m}} = C_m |a|_h^{2m}$$

を満たすものが存在する. ここで C_m は $\log C_m/m \to 0\ (m \to +\infty)$ を満たす定数であるとする.

この条件は L^2 拡張定理の主張に対応している. [DWZZ] では, $h^\star$ が上半連続な特異計量であって multiple L^2-extension property を満たすとき, (E, h) が Griffiths 半正値になることが示された. それと同時に, この multiple L^2-extension property が Griffiths 半正値性よりも真に強い正値性である中野半正値性を示すのではないかという予想が提示された. これに対し, 以下の形で反例を挙げることに成功した.

Theorem 0.1. [HI] $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束の完全列

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \underline{\mathbb{C}}^{n+1} \to Q \to 0$$

を考える. ここで, $\mathcal{O}(-1)$ は普遍直線束である. このとき, $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}$ 上の標準計量から自然に定まる Q 上の計量 h_Q は *multiple* L^2*-extension property* を満たすが, 中野半正値ではない.

また, 捻れた L^2 評価の条件に相当する twisted Hörmander condition という条件を導入し, これがある仮定で Griffiths 半正値性を示すことを証明した. この条件と応用については, 第 4 部の要旨で述べる.

第 2 部では, 多重標準束の順像層に入る標準的な擬ノルムについて解析した [Ina3]. 有界擬凸領域 Ω 上の p-乗可積分 (ここでは $0 < p < 2$ とする) な正則関数の空間 $A^p(\Omega)$ や, コンパクト複素多様体 X 上の多重標準束の切断の空間 $H^0(X, mK_X)$ (ここでは $m \geq 2$ とする) には自然に擬ノルムの構造が定まる. 2 つの有界単連結超凸領域 Ω_1, Ω_2 間に双正則写像があれば, $A^p(\Omega_1), A^p(\Omega_2)$ 間に自然な等長写像が誘導されるが, 逆に $A^p(\Omega_1), A^p(\Omega_2)$ 間に線形等長写像があるとき, 元の領域間に双正則写像が伸びることが知られている [DWZZ2]. このタイプの研究は, 代数幾何学では一般型の射影代数多様体と双有理写像の枠組みで研究されており, Yau の擬ノルム計画とも呼ばれている [CY]. 我々はこれらの研究の延長として, ある種の Stein 射の順像層に定まる擬ノルムの構造から Stein 射の同型が定まることを示した. 大沢-竹腰の $L^{2/m}$ 拡張定理が証明の核となっている.

Theorem 0.2. [Ina3] *$\widetilde{X}$ と $\widetilde{Y}$ を $n+r, \ell+r$ 次元の Stein 多様体, $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to B$ と $\widetilde{g} : \widetilde{Y} \to B$ を r 次元単位球 $B \subset \mathbb{C}^r$ 上の滑らかな Stein 射とする. また $f = (f_1, \cdots, f_r) : X \to B$ と $g = (g_1, \cdots, g_r) : Y \to B$ をそれぞれ $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ の相対コンパクトな Stein 射とする. ここで $X \subset \widetilde{X}$ と $Y \subset \widetilde{Y}$ はそれぞれ $\widetilde{X}$ と $\widetilde{Y}$ の開部分多様体である. この設定で, 以下 2 つの条件を仮定する:*
(i) $X_t := f^{-1}(t)$ と $Y_t := g^{-1}(t)$ は超凸である.
(ii) 線形等長写像 $T : A(X, mK_X) \to A(Y, mK_Y)$ が存在し, 任意の $U \in A(X, mK_X)$ に対し

$$\int_{X_t} |U_t \wedge \overline{U_t}|^{1/m} = \int_{Y_t} |(TU)_t \wedge \overline{(TU)_t}|^{1/m}$$

を満たす. ここで, $A(X, mK_X) = \{U \in H^0(X, mK_X) \mid \int_X |U \wedge \overline{U}|^{1/m} < +\infty\}$ であり, $U|_{X_t} = U_t \wedge (df_1 \wedge \cdots \wedge df_r)^{\otimes m}, U_t \in H^0(X_t, mK_{X_t})$ である.

このとき, T は各ファイバー毎に線形等長写像 $T_t : A(X_t, mK_{X_t}) \to A(Y_t, mK_{Y_t})$ を誘導し, $n = \ell$ であり, 双正則写像 $F : X \to Y$ であって $f = g \circ F$ を満たすものが存在する.

第 3 部では, 正則ベクトル束の特異計量について取り扱った [Ina1]. 特異計量に関する Griffiths 半正値性の定義は知られているが, 中野半正値性の定義は知られていなかった. そこで Demailly-Skoda の定理に着目し, 特異計量係数の L^2 評価を得た. これは, (E, h) が Griffiths 正値であるとき, $(E \otimes \det E, h \otimes \det h)$ が中野正値になることを保証する定理である. 具体的には strictly Griffiths δ_ω-positive という概念を導入し, 以下の定理を示した. またこの L^2 評価を応用し, あるタイプのコホモロジーの消滅定理も示した.

Theorem 0.3. [Ina1] *(X, ω) を射影多様体とその上の Kähler 計量, $E \to X$ を X 上の正則ベクトル束とする. また h を E の strictly Griffiths δ_ω-positive な特異計量とする. f を $\bar{\partial}$-閉な $E \otimes \det E$ 係数の (n, q)-form で ($(\omega, h \otimes \det h)$ に関する) L^2 ノルムが有限なものとする. このとき $E \otimes \det E$ 係数の*

$(n, q-1)$-*form* g であって, $\bar{\partial} g = f$ であり

$$\int_X |g|^2_{(\omega, h\otimes \det h)} dV_\omega \leq \frac{1}{\delta q r}\int_X |f|^2_{(\omega, h\otimes \det h)} dV_\omega$$

となるものが存在する.

Theorem 0.4. [Ina1] X, E, h を上と同じ設定とする. また各点 $x \in X$ での *Lelong number* $\nu(-\log \det h, x) < 1$ が *1* 未満であるとする. このとき $q \geq 1$ に対し以下が成立する

$$H^q(X, K_X \otimes E \otimes \det E) = 0.$$

定理 0.4 は Griffiths の消滅定理の特異計量への一般化と見なすことができる.

第 4 部では, まず特異計量の中野半正値性を定めた [Ina4]. Deng-Ning-Wang-Zhou [DNWZ] は, 第 1 部 [HI] で導入した twisted Hörmander condition を使い, C^∞ 計量の中野半正値性を L^2 評価で特徴付けることに成功していた. これを応用することで, 以下の定式化を得た.

Definition 0.5. [Ina4] h を正則ベクトル束 E 上の Griffiths 半正値な特異計量とする. 以下の条件が満たされるとき, h は中野半正値であるという:
$(\Omega, \iota : \Omega \to X)$ を X の Stein 座標, ω_Ω を Ω 上の Kähler 計量, ψ を Ω の C^∞ 級強多重劣調和関数とする. また f を Ω 上の $\bar{\partial}$ 閉 $\iota^\star E$ 係数 L^2-(n, q) 形式 ($(\omega_\Omega, \iota^\star h e^{-\psi})$ に関する) とする. このとき $\iota^\star E$ 係数の L^2-$(n, q-1)$ 形式 u であって, $\bar{\partial} u = f$ と

$$\int_\Omega |u|^2_{(\omega_\Omega, \iota^\star h)} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega} \leq \int_\Omega \langle [\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi \otimes Id_E, \Lambda_\omega]^{-1} f, f\rangle_{(\omega_\Omega, \iota^\star h)} e^{-\psi} dV_{\omega_\Omega}$$

を満たすものが存在する. ここでは右辺が有限になるような f を取っている.

同様に特異計量の strict Nakano δ_ω-positivity を定義し, 以下の L^2 評価とコホモロジーの消滅定理を示した.

Theorem 0.6. [Ina4] (X, ω) を射影多様体とその上の *Kähler* 計量, $E \to X$ を X 上の正則ベクトル束, h を E の *strictly Nakano* δ_ω*-positive* な特異計量とする. このとき任意の $\bar{\partial}$ 閉な E 係数の L^2-(n, q) 形式 $((\omega, h)$ に関する*)* f に対し, ある E 係数の L^2-$(n, q-1)$ 形式 u が存在し, $\bar{\partial} u = f$ と

$$\int_X |u|^2_{(\omega, h)} dX_\omega \leq \frac{1}{\delta q}\int_X |f|^2_{(\omega, h)} dV_\omega$$

を満たす.

Theorem 0.7. [Ina4] X, E, h を上と同じ設定とする. このとき $q \geq 1$ に対し以下が成り立つ

$$H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h)) = 0.$$

ここで $\mathcal{E}(h)$ とは h に関して局所二乗可積分な E の局所正則切断の芽のなす層である.

h が中野半正値な特異計量であるとき $\mathcal{E}(h)$ が連接層になることは, 第 1 部で示している. 定理 0.6 は定理 0.3 の, 定理 0.7 は 定理 0.4 の一般化に相当する. また定理 0.7 は, 中野の消滅定理の特異計量への一般化に相当する.

第 5 部では Griffiths 半負及び半正な特異計量に関する曲率カレントについて調べた [Ina2]. 高階のベクトル束の場合直線束の場合とは異なり, 特異計量が Griffiths 半負であっても曲率カレントが測度係数で適切に定まらないことが Raufi [Rau] によって指摘されている. しかし例えば Griffiths 半負な特異計量 h が, ある正の定数 $\epsilon > 0$ に対して $\det h > \epsilon$ を満たすとき, 曲率カレントが測度係数として定まることが同様に Raufi によって示されている. 我々は h が退化している集合 $\{\det h = 0\}$ 上でも, 曲率カレントが測度係数として適切に定まるためのある十分条件を発見した.

参考文献

[CY] C.-Y. Chi and S.-T. Yau, *A geometric approach to problems in birational geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **105**, (2008), no. 48, 18696-18701.

[DNWZ] F. Deng, J. Ning, Z. Wang, and X. Zhou, *Positivity of holomorphic vector bundles in terms of L^p-conditions of $\bar{\partial}$*, arXiv:2001.01762.

[DWZZ] F. Deng, Z. Wang, L. Zhang, X. Zhou, *New characterizations of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves*, arXiv:1809.10371.

[DWZZ2] F. Deng, Z. Wang, L. Zhang, X. Zhou, *Linear invariants of complex manifolds and their plurisubharmonic variations*, arXiv:1901.08920, to appear in J. Funct. Anal.

[HI] G. Hosono and T. Inayama, *A converse of Hörmander's L^2-estimate and new positivity notions for vector bundles*, to appear in Sci. China Math. (DOI: 10.1007/s11425-019-1654-9)

[Ina1] T. Inayama, *L^2 estimates and vanishing theorems for holomorphic vector bundles equipped with singular Hermitian metrics*, Michigan Math. J. **69**, (2020), 79-96.

[Ina2] T. Inayama, *Curvature currents and Chern forms of singular Hermitian metrics on holomorphic vector bundles*, J. Geom. Anal. **30**, (2020), 910-935.

[Ina3] T. Inayama, *Pseudonorms on direct images of pluricanonical bundles*, arXiv:1910.05771, submitted.

[Ina4] T. Inayama, *Nakano positivity of singular Hermitian metrics and vanishing theorems of Demailly-Nadel-Nakano type*, arXiv:2004.05798, submitted.

[Rau] H. Raufi, *Singular hermitian metrics on holomorphic vector bundles*, Ark. Mat. **53**, (2015), no. 2, 359-382.