論文の内容の要旨

論文題目　Theory on Kähler metrics with constant exponentially weighted scalar curvature and exponentially weighted K-stability including Kähler–Ricci solitons

（ケーラー・リッチ・ソリトンを包括する指数偏スカラー曲率一定のケーラー計量と指数偏 K 安定性の理論）

氏　名　井上 瑛二

まず，本論文の背景と位置づけを説明する．Fano 多様体の Kähler–Einstein 計量（以下，KE 計量）の存在に関する二木昭人や Gang Tian の K 安定性の萌芽と言える一連の研究を経て，2000 年代に突入すると，より一般の偏極多様体のスカラー曲率一定 Kähler 計量（以下，**cscK 計量**）の存在に関わる K 安定性の自然な枠組みが Simon Donaldson によって定式化され，以下の Yau–Tian–Donaldson 予想が樹立した．

Yau–Tian–Donaldson 予想: 偏極多様体の K 安定性は，cscK 計量の存在の必要十分条件である．

特に注目されていた Fano 多様体の KE 計量の存在に関する予想の一部が Chen–Donaldson–Sun [CDS] および Tian [Tian] によって解決し，Calabi 予想の提唱から 60 年を経て KE 計量の存在問題は決着した．

一方，Richard Hamilton のリッチ流の研究で生じる Ricci soliton 方程式

$$\mathrm{Ric}(\omega) - L_{\xi'}\omega = \lambda\omega, \quad \exists\lambda \in \mathbb{R}, \quad \xi' = J\xi + \sqrt{-1}\xi : \text{ holomorphic}$$

を満たす Kähler 計量は**ケーラー・リッチ・ソリトン**（以下，**KRs**）と呼ばれ，リッチ流の文脈における KE 計量の自然な一般化とされている．KRs もまたその存在を特徴付ける修正 K 安定性という概念が定式化され，KRs に拡張された Yau–Tian–Donaldson 予想も Datar–Székelyhidi [DS] により解決した．KE 計量の枠組みは，ちょうど KRs と cscK 計量の両枠組みの共通部分となる．

cscK 計量の存在に関する Yau–Tian–Donaldson 予想は，モーメント写像に付随するシンプレクティック商と GIT 商の関連を説明する Kempf–Ness の定理の無限次元類似とみなせる．実際，**Donaldson–Fujiki moment map picture** [Don] により，偏極多様体のスカラー曲率は概複素構造からなる無限次元 Kähler 多様体上のモーメント写像とみなせ，cscK 計量を持つ偏極多様体はこのモーメント写像の零点と理解できる．この moment map picture は，偏極多様体の標準 Kähler 計量の存在と安定性に結びつきがあるとする思想を支える形式的な根拠となる．ところが，KE 計量と K 安定性の理論と同じかそれ以上の到達点に達した KRs と修正 K 安定性の理論は，（どういうわけか）その理論進歩の思想的な根拠となるべき moment map picture という基本的な描像が見出されていなかった．

本論文では，まず KRs に対する moment map picture を見出し，それによって新たに動機付けられる**指数偏スカラー曲率一定 Kähler 計量**（以下，**μ-cscK 計量**）という概念を導入し，cscK 計量と KRs の枠組み両方を包括する，より広いクラスの多様体が許容しうる μ-cscK 計量の枠組みを構築した．

本論文では以下に定義する μ-cscK 計量を導入し，Kähler–Ricci soliton と cscK 計量の両枠組みを包括する以下の基礎理論を構築した．

1. μ-cscK 計量に関する基礎理論の構築
2. μ-cscK 計量の存在に関わる μK 安定性の基礎理論の構築

さらに，これらの理論に基づいて，[Ino1] で構成した Kähler–Ricci soliton を許容する Fano 多様体のモジュライ空間の代数空間化とコンパクト化の指針を提示した．

Definition (μ-cscK 計量, [Ino2])**.** $X = (M, J)$ を Kähler 多様体，T を X に正則に作用する実トーラス，ω を T 作用に対するモーメント写像 $\mu : X \to \mathfrak{t}^\vee$ を許容する T 不変な Kähler 計量とする．Lie 環の元 $\xi \in \mathfrak{t}$ に対し，$\mu_\xi := \langle \xi, \mu \rangle$ とする．実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，このとき関数

$$s_\xi^\lambda(g_J) := (s(g_J) - \Delta\mu_\xi) - (\Delta\mu_\xi + 2|\nabla\mu_\xi|^2) + 2\lambda\mu_\xi$$

を Kähler 計量 ω の μ_ξ^λ**-scalar curvature** といい，$s_\xi^\lambda(\omega)$ が定数になるような Kähler 計量 ω を μ_ξ^λ**-cscK 計量**という．あるベクトル場 $\xi \in \mathfrak{t}$ があって μ_ξ^λ-cscK 計量になるような Kähler 計量を μ^λ**-cscK 計量**という．

ベクトル場 ξ を 0 とすると μ_ξ^λ-cscK 計量は cscK 計量に他ならない．少々非自明だが，以下の補題により μ-cscK 計量は KRs と結びつく．

Lemma ([Ino1])**.** Kähler 類 $[\omega]$ が $2\pi\lambda c_1(X)$ に等しいような Kähler 計量 ω について，ω が μ_ξ^λ-cscK 計量であることと KRs の方程式

$$\mathrm{Ric}(\omega) - L_{\xi'}\omega = \lambda\omega \quad \text{for} \quad \xi' = J\xi + \sqrt{-1}\xi$$

を満たすことは同値.

Kähler 計量 ω が μ_ξ^λ-cscK 計量であるか否かはモーメント写像 μ の取り方に依存しない．また，X が射影的で T 同変な偏極 L を考えているとき，T 不変な Kähler 計量 $\omega \in c_1(L)$ はモーメント写像を許容する．

μ-cscK 計量（とくに KRs）は，スカラー曲率に関する Donaldson–Fujiki の moment map picture の類似である以下の命題によって特徴付けられる．モーメント写像 μ に対して指数偏な（指数的重みによって測度の "偏り" を正した）体積形式 $e^{-2\mu_\xi}\omega^n$ を考えることが μ-cscK 計量という概念の出発点である．

Proposition (Moment map picture, [Ino1, Ino2])**.** (M, ω) をシンプレクティック多様体，T を (M, ω) に Hamiltonian に作用する実トーラスとする．$\mathcal{J}_T(M, \omega)$ を ω と両立する T 不変な概複素構造からなる Fréchet 多様体とする．$\xi \in \mathfrak{t}$ に対して $\mathcal{J}_T(M, \omega)$ のシンプレクティック構造 Ω_ξ を

$$\Omega_\xi(A, B) := \int_X (JA, B)_{g_J} e^{-2\mu_\xi}\omega^n$$

によって定めると，これは T 同変な Hamilton 微分同相の群 $\mathrm{Ham}_T(M, \omega)$ の作用に関して不変になり，以下のモーメント写像を持つ: $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{S}_\xi^\lambda(J) := \Big(s_\xi^\lambda(g_J) - \frac{\int_X s_\xi^\lambda(g_J) e^{-2\mu_\xi}\omega^n}{\int_X e^{-2\mu_\xi}\omega^n} \Big) e^{-2\mu_\xi}\omega^n \in \Omega_0^{2n}(M, \omega) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Ham}_T(M, \omega))^\vee.$$

本論文の主たる目的は，μ-cscK 計量に関して，上記の moment map picture に基づいて（cscK 計量の理論の類似として）予見される主張や，KRs に関する Tian–Zhu [TZ] の理論との類似において期待される主張を，一般化された枠組みにおいて適切に定式化し証明することである．理論構築が進むにつれ，その内容が単なる cscK 計量や KRs の理論の類似に留まらず，既存理論には見られなかった豊かな側面を持つことが明らかとなった．以下に本理論の特色と言える定理群によってその内容を説明する．

Theorem 1 ([Ino2])**.** Hamiltonian トーラス T 作用を持つコンパクト Kähler 多様体 X と Kähler 類 $[\omega]$ および実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ を固定する．これらのデータに対して汎関数 $\mathrm{Vol}^\lambda : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ が定まり，以下の性質を持つ．

1. (μ-二木不変量) Kähler 類 $[\omega]$ が μ_ξ^λ-cscK 計量を許容するとき，$\xi \in \mathfrak{t}$ は Vol^λ の臨界点になる．

2. μ^λ-cscK 計量の存在に関せず，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ で Vol^λ は臨界点を持つ．
3. 値 $\lambda_{\mathrm{freeze}} := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall \lambda' < \lambda,\ \mathrm{Vol}^{\lambda'}$ の臨界点は一つ $\}$ は常に $\pm\infty$ でない有限値を取る．
4. $\lambda < \lambda_{\mathrm{freeze}}$ に対して ξ^λ を Vol^λ の唯一の臨界点とするとき，$\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda \xi^\lambda$ は収束し，その極限は **extremal vector** ξ_{ext} になる．

extremal vector ξ_{ext} は，cscK 計量の一般化で Calabi 汎関数

$$Cal(\omega) := \int_X \hat{s}(\omega)^2 \omega^n$$

の臨界点（$\iff \exists \xi$ s.t. $s(\omega) + 2\mu_\xi = \mathrm{const.}$）として特徴付けられる extremal Kähler 計量に付随するベクトル場である．ξ_{ext} は extremal Kähler 計量の存在に関わらず，以下の汎関数の一意的な臨界点となる:

$$C(\xi) := \int_X (\hat{s}(\omega) + 2\hat{\mu}_\xi)^2 \omega^n - \int_X \hat{s}(\omega)^2 \omega^n, \quad \text{where } \hat{f} := f - \frac{\int_X f\omega^n}{\int_X \omega^n}.$$

extremal Kähler 計量は存在すれば一意で，その存在から偏極多様体の相対 K 安定性という性質が従う．

上記の定理の 1 と 2 および 3 の $-\infty < \lambda_{\mathrm{freeze}}$ は KRs に付随するベクトル場 ξ に制約を与える Tian–Zhu の volume minimization argument の類似と見られる．特に 3 と偏･満渕汎関数の凸性 [Lah] から，$\lambda < \lambda_{\mathrm{freeze}}$ において μ^λ-cscK 計量の一意性がわかる．一方，3 の $\lambda_{\mathrm{freeze}} < +\infty$ や 4 の $\lambda \to -\infty$ における ξ^λ の挙動は KRs，cscK 計量や extremal Kähler 計量などの既存の標準 Kähler 計量の枠組みには見られなかった新しい現象である．これによって KRs と extremal Kähler 計量という全く異なる種類の標準 Kähler 計量の間に関係を見出す可能性が開けた．実際，以下の定理によって extremal Kähler 計量の存在が μ-cscK 計量の存在に関わることがわかっている．

Theorem 2 ([Ino2]). Hamiltonian トーラス T 作用を持つコンパクト Kähler 多様体 X と Kähler 類 $[\omega]$ を固定する．Kähler 類 $[\omega]$ に extremal Kähler 計量が存在するとき，任意の $\lambda \ll 0$ と $\lambda \gg 0$ について，$[\omega]$ に μ^λ-cscK 計量が存在する．

線織曲面 $\mathbb{P}_\Sigma(L \oplus \mathcal{O})$ 上の Calabi ansatz で与えられるような Kähler 計量に対して，μ-cscK 計量の方程式は区間上の関数に対する境界条件付き常微分方程式に帰着する．これを解くことで以下のように μ-cscK 計量の具体例を得る．この例は μ-cscK 計量が extremal 計量よりも広範な多様体に存在することを示している．

Proposition ([Ino2]). コンパクト Riemann 面 Σ 上の線織曲面 $\mathbb{P}_\Sigma(L \oplus \mathcal{O})$ を考える．ファイバーの Poincare dual を F，セクション $\{(x, (0:1)) \mid x \in \Sigma\}$ の Poincare dual を B とするとき，$\{aF + bB \mid a, b > 0\}$ に属す任意の Kähler 類は任意の $\lambda \geq 0$ に対して μ^λ-cscK 計量を許容する．このような Kähler 類には extremal Kähler 計量を許容しないものもある．

さらに $\mathbb{P}_{\mathbb{C}P^1}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O})$ の Kähler 類 $c_1(X)$ は，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して μ^λ-cscK 計量を持ち，これらは $\lambda = 2\pi$ において現れる KRs と $\lambda = -\infty$ において現れる extremal Kähler 計量を結ぶ連続道を与える．

μ-cscK 計量の基礎理論の構築 [Ino2] では，以上に加えて，自己同型群の簡約性や μ 満渕汎関数の Chen–Tian 型公式など，cscK 計量の理論の基礎とされる事柄も μ-cscK 計量の文脈で明らかにした．

一方，μ-cscK 計量の存在に関わり K 安定性の一般化となる μK 安定性を定式化するために，μ 二木不変量のテスト配位に対する適切な定義を見出すことが重要だが，μK 安定性の基礎理論の構築 [Ino3] でこれを実現した．定式化の基本的なアイディアは Theorem 1 の汎関数 Vol^λ を同変コホモロジーの元として再解釈して，“同変コホモロジーの元をテスト配位方向に微分する” ことで μ-二木不変量の同変コホモロジー的な表示を得

るというものである．この形式的なアイディアを実現するために，スキームの同変交点数の収束に関する基礎を構築した．これに基づいて以下の同変交点数が well-defined な値になることが確かめられる．

Definition (テスト配位の μ-二木不変量, [Ino3])**.** $(\mathcal{X}, \mathcal{L}_T)$ を T 同変偏極多様体 (X, L_T) の T 同変なテスト配位とする．$\lambda \in \mathbb{R}$ と $\xi \in \mathfrak{t}$ に対し，μ_ξ^λ**-二木不変量**を以下の同変交点数によって定義する．

$$\mathrm{Fut}_\xi^\lambda(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 4\pi \frac{\mathrm{Ev}_\xi\Big((K^T_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{C}P^1}.e^{\bar{\mathcal{L}}_T}) \cdot (e^{L_T}) - (K_X^T.e^{L_T}) \cdot (e^{\bar{\mathcal{L}}_T}) \Big)}{(\mathrm{Ev}_\xi(e^{L_T}))^2}$$
$$+ 2\lambda \left[\frac{\mathrm{Ev}_\xi\Big((\bar{\mathcal{L}}_T.e^{\bar{\mathcal{L}}_T}) \cdot (e^{L_T}) - (L_T.e^{L_T}) \cdot (e^{\bar{\mathcal{L}}_T}) \Big)}{(\mathrm{Ev}_\xi(e^{L_T}))^2} - \frac{\mathrm{Ev}_\xi(e^{\bar{\mathcal{L}}_T})}{\mathrm{Ev}_\xi(e^{L_T})} \right] \in \mathbb{R}.$$

任意のテスト配位に対して μ_ξ^λ-二木不変量が半正であるとき，(X, L) は μ_ξ^λ**K-半安定**であるという．

これに関して以下を証明した．

Theorem 3 ([Ino3])**.** X をコンパクト Kähler 多様体とする．

1. Kähler 類 $c_1(L)$ が μ_ξ^λ-cscK 計量を許容するとき，(X, L) は μ_ξ^λK-半安定である．
2. Kähler 類 $c_1(L)$ が任意の $\lambda \ll 0$ において μ^λ-cscK 計量を許容するとき，(X, L) は相対 K 半安定である．（$\exists$ extremal Kähler 計量 $\Rightarrow$ 相対 K 安定 $\Rightarrow$ 相対 K 半安定）

さらに，K 安定性における CM 直線束の類似として以下の定理を示し，これに基づいて [Ino1] で構成した Kähler–Ricci soliton を持つ Fano 多様体のモジュライ空間をコンパクト化するアプローチを提示した．

Theorem 4 ([Ino3])**.** $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\xi \in \mathfrak{t}$ を固定する．偏極多様体の $T \times G$ 同変族 $(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \to B$ に対して定まる特性類 $\mathcal{D}_\xi \boldsymbol{\mu}^\lambda(\mathcal{X}/B, \mathcal{L}) \in H^2_G(B, \mathbb{R})$ が存在し，任意の $\mathbb{C}^*$ 同変な射 $f : \mathbb{C} \to B$ に対して，$f^* \mathcal{D}_\xi \boldsymbol{\mu}^\lambda(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \mathrm{Fut}_\xi^\lambda(f^*\mathcal{X}, f^*\mathcal{L}).\eta^\vee \in H^2_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ となる．この結果は Fano 多様体に限っても新しい．

参考文献

[CDS] X. Chen, S. Donaldson, S. Sun, *Kähler–Einsteins on Fano manifolds I–III*, J. Amer. Math. Soc. 28, 1 (2015), 183–197, 199–234, 235–278.

[DS] V. Datar, G. Székelyhidi, *Kähler–Einstein metrics along the smooth continuity mehtod*, Geom. and Func. Anal. 26, 4 (2016), 975–1010.

[Don] S. Donaldson, *Remarks on gauge theory, complex geometry and four-manifold topology*, In Fields Medalists Lecture, Atiyah and Iagolnitzer, Eds. World Scientific (1997), 384–403.

[Ino1] E. Inoue, *The moduli space of Fano manifolds with Kähler-Ricci solitons*, Adv. Math., **357** (2019), 106841, 65pp.

[Ino2] E. Inoue, *Constant μ-scalar curvature Kähler metric - formulation and foundational results*, arXiv: 1902.00664, submitted.

[Ino3] E. Inoue, *Equivariant calculus on μ-character and μK-stability of polarized schemes*, arXiv: 2004.06393, submitted.

[Lah] A. Lahdili, *Convexity of the weighted Mabuchi energy and weighted K-stability*, private communication.

[Tian] G. Tian, *K-stability and Kähler–Einstein metrics*, Comm. Pure Appl. Math. 68, 7 (2015), 1085–1156.

[TZ] G. Tian, X. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler–Ricci solitons*, Comment. Math. Helv. 77, 2 (2002), 297–325.