

審査の結果の要旨

論文題目： **Bayesian Shrinkage Approaches to Parametric Inference**

題目和訳： パラメトリック推測へのベイズ的な縮小化法によるアプローチ

氏名： 羽村 靖之

本論文は、様々な統計モデルにおいてベイズ的な縮小化法を用いた統計的推測手法の導出と理論的側面や応用的側面から提案手法の良さを論じている。論文は全体的に2つの部分に分かれ、前半の第2章から第5章までが第1部、後半の第6章から第8章までが第2部にあたる。第1部は統計的決定理論における所謂スタイン現象に関する内容で、ポアソン分布モデルや負の多項分布モデルなどにおいてベイズ推定量やベイズ予測分布が通常的手法を一様に改良するための縮小型事前分布の条件を解析的に導出しており、ベイズ的手法の数値的な性質を調べている。第2部では、裾の厚い分布のクラスを利用し、小さなノイズは縮小する一方大きな信号は縮小せずに保つようなベイズ推測法の導出や、線形回帰モデルにおいて外れ値に対して事後分布が頑健となるような誤差分布の導出を行っている。 **global-local** 縮小型事前分布の観点からは、第1部が **global** 縮小事前分布を理論的に研究している部分であり、第2部が **local** 縮小事前分布を理論的に、 **global-local** 縮小事前分布を数値的に研究している部分になる。

第1章 序

第2章 ポアソン変量に基づいたベイズ推定と予測密度の推定

第3章 負の多項分布のベイズ縮小推定

第4章 不釣り合い型の負の多項分布の推定と予測に向けたベイズ縮小化法のアプローチ

第5章 平均と分散が未知の正規分布に従う変量に基づいた残差変量分布のベイズ予測問題

第6章 計数データに対する **global-local** 型縮小事前分布

第7章 頑健性をもつ縮小：まばらな信号を分析するための対数調整型事前分布

第8章 頑健な回帰分析のための新たな尺度混合正規分布

第9章 結論

第2章では、サンプルサイズや損失関数に不均一性があり得るという一般的な設定のもとで、標準化された二乗損失の下でのポアソン分布の母数の同時推定の問題を考えている。サンプルサイズの不均一性を反映した形の、不均一なベイズ的縮小推定量を与え、その許容性とミニマックス性が成り立つための整合的な条件を導き、理論的な正当化を与えている。シミュレーション実験により不均一な推定量と均一な推定量のリスクの挙

動の比較を行い、実データへの適用を行っている。さらに、カルバック・ライブラー損失での比較と予測分布の予測問題への拡張について述べている。

第3章では、負の二項分布を一般化した負の多項分布の観測変量に基づいて、未知の確率から成る行列を標準化された二乗損失の下で推定する問題を扱っている。まず、一般的な形の縮小事前分布が最小分散不偏推定量を改良するための条件を導き、その条件を満たすような経験ベイズ推定量を構成する。次に、階層的縮小事前分布を導入し、その事前分布から得られるベイズ推定量が適切な条件下で最小分散不偏推定量を改良することを示している。事後分布からのサンプリング方法を与え、最後に、縮小推定量と最小分散不偏推定量のリスクをシミュレーションにより比較している。

第4章では、負の多項分布の観測に基づく推定と予測の問題を不均一な設定のもとで扱っている。まず、複数の負の多項分布の母数のベクトルを標準化された二乗損失の下で推定する問題を扱い、適切な条件下で最小分散不偏推定量を優越する新しいクラスの経験ベイズ推定量を導出している。次に、多項分布に従う複数の多元表をカルバック・ライブラー情報量の下で同時に予測する問題を考へて、階層的縮小事前分布に基づくベイズ予測密度がジェフリーズの事前分布に基づく予測密度を改良するための十分条件を導出している。さらに、提案するベイズ推定量とベイズ予測密度の性能をシミュレーションにより調べ、最後に、負の多項分布に従う変数を予測する問題についても議論している。

第5章では、カイ二乗分布に従う変数の密度関数を、他のカイ二乗分布に従う変数と正規分布に従う変数の観測に基づいて、カルバック・ライブラー情報量の下で予測する問題を考察している。これらの三つの変数は共通の未知の尺度母数を共有すると仮定し、また、正規分布の平均も未知であると仮定する。このとき、2つのベイズ予測密度が考えられ、その一つは、階層的縮小事前分布に基づくベイズ予測密度であり、二つ目は、無情報事前分布に基づく予測密度である。前者は正規分布の観測に依存する一方、後者は正規分布の観測に依存しない。両者のリスクを比較し、前者が後者を一様に改良するための十分条件を導出している。このことは、分散の推定に平均の情報を上手に組み入れることによって改善が可能であることを示している。

global-local 縮小事前分布は小さな信号を事前分布の平均に縮小する一方、大きな信号は縮小せずに保つような事前分布として知られ、正規分布の観測の場合には広く議論されている。しかし、そのような global-local 縮小事前分布に関する知識を直接利用できないような、計数データが観測される場面に実際しばしば直面する。そこで第6章では、計数データを分析するための global-local 縮小事前分布を議論している。まず、観測値が大きいときには事後平均が観測値に近づくという tail robustness のための十分条件を与えている。次に、その条件を近似的に満たす事前分布と正確に満たす事前分布を提案し、それらの下でベイズ推測を行うための事後分布からの効率的なサンプリングのアルゴリズムを与えている。提案手法には調整すべき母数がないので、全ての超母

数をデータに基づいて自動的に推定することが出来る。最後に、シミュレーションと実データへの適用を通して提案手法を説明している。

第7章では、まばらな信号を分析するための、 β 分布の密度に対数項をかけて拡張した形の縮小事前分布を導入している。この分布は、コーシー分布よりも厚い裾を持ちベイズ推定量の **tail robustness** を実現する一方、ノイズに対する強い縮小効果は保持する。この性質を、観測値が大きいときの事後の平均二乗損失を解析することを通して確かめている。提案する事前分布は潜在変数を用いて積分により表現できるため、完全な事後分析のための速くて効率的なギブズサンプラーを構成することができる。さらに提案する事前分布は、複数の対数項を用いて一般化できるという特徴を持つ。最後に、シミュレーションと実データの分析を通して提案手法の性能を調べている。

誤差分布に対して古典的に正規性を仮定した線形回帰を用いると、外れ値が回帰係数の事後分析に悪影響を与える可能性がある。第8章では、応用上行われてきたように、裾の厚い分布と裾の薄い分布を混合して得られる誤差分布を考えている。前者として用いるための、新しいクラスの分布を導入しており、その分布はコーシー分布よりも裾が厚いが、正規分布の尺度混合として表されるため、ギブズサンプラーによる効率的な事後分布による分析を可能にしている。提案手法の下での事後分布の外れ値に対する頑健性を少ない仮定の下で証明しており、この結果は高次元の係数ベクトルのための非有界な縮小事前分布に対しても適用可能である。既存手法とのシミュレーションによる比較により、提案手法の点推定と区間推定や計算的な効率性における性能が示されている。さらに、回帰係数に対して縮小事前分布を用いて実データの分析を行い、提案手法の事後分布の頑健性を確認している。

<論文の評価>

前半の第2章から第5章までは、統計的決定理論の内容で、最小分散不偏推定量や無情報事前分布に基づいたベイズ推定量及びベイズ予測分布に対して、リスクを一様に小さくする意味でそれらを改良するために、縮小型事前分布のクラスを考え、それに対するベイズ推定量やベイズ予測分布を導出し、改良結果が成り立つための縮小型事前分布に関する条件を導き出している。このような問題は正規分布の場合にはスタイン問題として広く研究されてきたが、ポアソン分布などの離散分布でしかも標本サイズが不均一なモデルにおいては、リスクの評価式がかなり複雑になるためあまり研究されてこなかった。こうした状況で、リスクの各項を丁寧に評価して、縮小型事前分布に対するベイズ的手法が通常的手法を改良するための条件を明示的に導出している点、特に負の多項分布において縮小型事前分布を提案しベイズ推定量の改良結果を導いた研究成果は高く評価される。

第2章では不均一なポアソンモデルにおいてより一般的な事前分布のクラスを取り上げ、得られたベイズ推定量が、標本サイズが小さいほどより大きく縮小するという望

ましい性質を持つことを示すとともに、改良のための優れた条件式を与えている点が評価され、この研究成果は以下の論文に掲載された。

Hamura, Y. and Kubokawa, T. (2019). Simultaneous estimation of parameters of Poisson distributions with unbalanced sample sizes. *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **2**, 405-435.

Hamura, Y. and Kubokawa, T. (2020). Proper Bayes minimax estimation of parameters of Poisson distributions in the presence of unbalanced sample sizes. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **34**, 728-751.

第3章では、負の2項分布を拡張した負の多項分布のモデルにおいて、セル確率を同時推定する問題を取り上げている。この問題では、これまでベイズ的な研究は議論されてこなかったが、本論文において、新たな縮小型事前分布のクラスを提案し、そのベイズ推定量についての改良結果を理論的に証明しており、斬新で優れた研究成果であると評価できる。この内容は次の論文として掲載されている。

Hamura, Y. and Kubokawa, T. (2020). Bayesian shrinkage estimation of negative multinomial parameter vectors. *Journal of Multivariate Analysis*, **179**, 104653.

また、標本サイズが不均一なモデルへの拡張が第4章で与えられ、次の論文にまとめられている。

Hamura, Y. (2020). Bayesian shrinkage approaches to unbalanced problems of estimation and prediction on the basis of negative multinomial samples. *arXiv preprint arXiv:2010.03141*.

第5章は、分散のスタイン問題を予測分布の予測問題に拡張した内容であり、次の論文にまとめられている。

Hamura, Y. and Kubokawa, T. (2020). Bayesian predictive density estimation for a chi-squared model using information from a normal observation with unknown mean and variance. *arXiv preprint arXiv:2006.07052v2*.

第6章から第8章では、応用的な視点から、global-local 縮小型事前分布に関する研究成果を与えている。global-local 縮小事前分布は小さな信号を事前分布の平均に縮小する一方、大きな信号は縮小せずに保つような事前分布として知られ、正規分布のモデルにおいて主に議論されてきた。そのような性質をもつ global-local 縮小事前分布を計数データを解析するモデルにおいてどのように構成するかが問題となる。第6章では、ポアソン分布モデルの場合に新たな global-local 縮小事前分布を提案し、ベイズ推定量が、観測値が大きいつきに事後平均が観測値に近づくという tail robustness の性質をもつための条件を与えている。また、ベイズ推測を行うための事後分布からの効率的なサンプリングのアルゴリズムを与え、実データへの適用を行っており、評価できる内容である。この内容は、次の論文にまとめられている。

Hamura, Y., Irie, K. and Sugawara, S. (2020). On global-local shrinkage priors for

count data. *arXiv preprint arXiv:1907.01333v2*.

第7章では、正規分布モデルにおける縮小型事前分布について、対数関数を組み込むことによって、コーシー分布より裾が厚く、しかも可積分になる事前分布を新たに提案しており、その事後分布の **tail robustness** を示している点が高く評価される。この研究成果は次の論文にまとめられている。

Hamura, Y., Irie, K. and Sugasawa, S. (2020). Shrinkage with robustness: log-adjusted priors for sparse signals. *arXiv preprint arXiv:2001.08465v2*.

第8章では、線形回帰モデルの誤差項に、裾の厚い分布と裾の薄い分布の混合分布を考え、外れ値に対して頑健なベイズ推測の方法を提案している。特に、裾の厚い分布として、コーシー分布よりも裾が厚く、しかも正規分布の尺度混合として表されることからギブズサンプラーによる効率的な事後分布が構成できるような、新たな分布のクラスを提案している点が、特に評価できる。この内容は次の論文としてまとめられている。

Hamura, Y., Irie, K. and Sugasawa, S. (2020). Log-regularly varying scale mixture of normals for robust regression. *arXiv preprint arXiv:2005.02800*.

以上、説明してきたように、本論文は、羽村靖之氏の優れた研究成果をまとめたものであり、縮小推定法の理論と応用における貴重な貢献であると高く評価できる。2021年1月26日に博士論文発表会を開催し、論文審査委員会は全員一致で、羽村靖之氏が博士（経済学）の学位を授与されるにふさわしいという結論に達した。よって本論文は博士（経済学）の学位請求論文として合格と認められる。

令和3年1月27日

審査委員
久保川達也（主査）
大森裕浩
下津克己
入江薫
菅澤翔之助