

博士論文

四辺形グリッド双対タイリング折紙  
—柱面への拡張及び折り変形の解析—

安達 瑛翔



# 概要

数学や工学の分野において折紙テセレーションに着想を得た構造が注目されている。折紙テセレーションとは、折り目の繰り返しやパラメータ化されたユニットの集合により、平面的な模様や立体構造、曲面形状などを作る折紙である。構造的な折紙テセレーションが工学的な興味を引く性質として、剛性、形状、変形、の三つがある。

一つ目の性質として、折り目はその周りの回転には柔らかいが、折り目自身を変形させる外力には強い剛性を発揮する。段ボールやトタンの波板では折り目が平行に並んでおり、折り目周りの曲げには弱い、折り目に垂直な方向を回転軸とした曲げには強い剛性を発揮する。波板の表裏面にシートを貼り付けて展開しないようにしたものが段ボールであり、軽量高剛性な構造材料を実現している。ミウラ折りなどの折紙テセレーションは複数方向に折り目を含んでおり、どの方向の曲げに対しても剛性を発揮する。そのためミウラ折りなどに表裏から表面材を貼り付けるた折紙コアパネルの利用が注目されている。二つ目の性質として、折紙は一枚のシートから柱面やドーム状など様々な曲面形状を作ることができる。例えばミウラ折りは大域的に平面形状を作るが、折り目パターンのトポロジーを保ちながら折り目の長さや方向を変えることにより曲面形状を作る研究が盛んである。三つ目の性質は、折紙が展開状態と折り状態を連続変形により移りあうことである。展開状態から折り状態までの途中状態において、折り目や外周に囲まれた各面が平面を保つ変形を剛体折りと呼ぶ。剛体折り可能なパターンは金属などの硬い素材でも、折り目部分にのみ切れ目を入れて曲げやすくすることで全体の変形が可能になる。これらの性質は折り目のパターンに強く依存する。よって折紙テセレーションの研究においては折り目のパターンと上記の性質との関係を明らかにし、良い性質を持つパターンを設計可能とすることが重要である。

本研究は、折紙コアパネルのコア材としての利用を志向し、上記三つの性質に注目した折紙テセレーション、即ち折り目による剛性を利用しつつ、様々な曲面形状を実現したり、剛体折りを可能としたりできる折紙テセレーションを得ることを目的とする。従来の研究における折紙コアはミウラ折りと同じトポロジーのものが広く研究されている。それはミウラ折りが剛体折り変形可能であり、折り目の長さや方向を変えることで多様な曲面形状を実現できるためである。しかしながらミウラ折りと表裏に貼る表面材との接着面は折り目なので面積 0 であり、剥離によってパネルの強度が下がってしまう。本研究では接着面の問題を解決するため、表面材と全面で接着可能な折紙コアとなる折紙

テセレーションである、双対タイリング折紙を扱う。双対タイリング折紙は Lang の折り紙作品 “Octet Truss, opus 652” を一般化した折紙である。修士研究においては一般の双対タイリング折紙を定義し、存在条件を示した。その上で具体例として、同一寸法の二回転対称な四角錐を用い、表裏の接着面に平行四辺形のグリッドができ、大域的に平面形状となる両平面双対タイリング折紙について考察した。本論文では、平行四辺形グリッドを作る両平面双対タイリング折紙を基に、柱面形状を実現したり、剛体折りを実現したりできる折り目パターンやその設計方法を議論する。

本論の構成は以下の通りである。第 2 章ではまず一般の双対タイリング折紙の定義と存在条件を示す。次に角錐として全て合同な二回転対称の四角錐を用い、表裏面に合同な平行四辺形グリッドを作る両平面双対タイリング折紙について、当該四角錐を表すパラメータ、即ち折り状態の三次元トラス構造を決定するパラメータと双対タイリング折紙の存在条件との対応を明らかにする。

第 3 章では両平面双対タイリング折紙の折り目パターンのトポロジーを保存したまま、折り目の長さや方向を変えることで柱面形状を作る双対タイリング折紙と、その設計方法を議論する。両平面双対タイリング折紙の平行四辺形グリッドを構成する四角錐の一列を取り出すとくさび形を構成できる。両平面双対タイリング折紙はくさび形の列が上下から噛み合わさったものとみなせる。両平面双対タイリング折紙においては全てのくさび形は合同であるが、くさび形の側面のなす角度が異なるものを接続することで大域的に柱面を作る柱面双対タイリング折紙を構成する。このとき接続可能なくさび形は自身の他に高々一つであることを示す。一つの柱面双対タイリング折紙に用いることのできるくさび形は最大で二種類に制限されるが、くさび形を接続する順番は任意であり筒型や波型など様々な柱面を作ることができる。くさび形のペアの形状表現に適した三つのパラメータを示し、このパラメータについて柱面双対タイリング折紙が存在する条件の解空間を明らかにする。また三つのパラメータ値と接続するくさび形の順番を指定することで柱面双対タイリング折紙をデザインするツールについて説明する。さらに柱面双対タイリング折紙のデザインの参考として、大域的な曲率半径が大きなもの、閉じた角柱を作るもの、一方のくさび形が同一平面上に縮退するもの、の三つの具体例について説明する。

第 4 章では両平面双対タイリング折紙の剛体折り可能性を議論する。一般に剛体折り可能かを判定するアルゴリズムは未確立であり、剛体折り可能性は数値シミュレーションにおける歪み具合で推定するに留まっている。両平面双対タイリング折紙の折り目パターンは基準となる角錐形状を定める三つのパラメータにより三次元トラス形状が決定されるが、四面体領域と呼ばれる四角形を四面体内部に折るパーツの折り目パターンは自由である。本研究では両平面双対タイリング折紙を折り目パターンの決まっているフレームと内部の折り目を自由に定められるモジュールに分解し、それぞれの変形の整合性を評価する。フレームは特定の二自由度の剛体折りが可能である。対してモジュールは剛体折りが可能ならば一自由度であり、折り目パターンによって様々な変形をする。フレームとモジュールの境界形状に注目した配置空間を提案し、フレームによって定めら

れる二次元の変形可能領域とモジュールの一次元の変形可能領域の共通領域を評価することで全体の剛体折り可能性を判定する。さらに剛体折りが可能になりやすいモジュールの設計方法として、平坦折り可能なモジュールを用いることを提案する。

第 5 章では、第 2, 3, 4 章の内容をまとめ、今後の発展的な研究について議論する。

# 目次

概要		i
第 1 章	イントロダクション	1
1.1	折紙テセレーションの特徴と応用 . . . . .	1
1.2	研究目的 . . . . .	4
1.3	構成 . . . . .	5
第 2 章	両平面双対タイリング折紙	7
2.1	Lang の Octet Truss . . . . .	7
2.2	双対タイリング折紙の定義 . . . . .	8
2.3	両平面双対タイリング折紙 . . . . .	10
2.4	両平面双対タイリング折紙の特殊な例 . . . . .	19
第 3 章	柱面を作る双対タイリング折紙	21
3.1	くさび形への分解 . . . . .	22
3.2	くさび形の接続条件 . . . . .	22
3.3	柱面双対タイリング折紙のデザインパラメータ . . . . .	27
3.4	デザイン戦略と結果の例 . . . . .	31
第 4 章	両平面双対タイリング折紙の剛体折り解析	36
4.1	剛体折りに関する先行研究 . . . . .	36
4.2	フレームとモジュール . . . . .	38
4.3	フレームの変形 . . . . .	39
4.4	モジュールの変形 . . . . .	42
4.5	両平面双対タイリング折紙の剛体折り判定 . . . . .	47
4.6	剛体折り可能となりやすい両平面双対タイリング折紙の設計手法 . . . . .	48
第 5 章	まとめ	52
5.1	研究成果 . . . . .	52
5.2	考察と今後の展望 . . . . .	53

---

付録 A	角錐底面に折り目を追加しない場合のフレームの剛体折り	59
参考文献		64





## 第 1 章

# イントロダクション

### 1.1 折紙テセレーションの特徴と応用

数学や工学の分野において折紙テセレーションに着想を得た構造が注目されている [41, 4, 37]。折紙テセレーションの一般的な定義は定まっていないが、本研究では図 1.1 のような二方向に並進対称性のある折り目を持つ折紙と、より一般化し、図 1.2 のように、折り目の接続関係は変わらず長さや方向が変更されたユニットが二方向に繰り返し現れる折紙のことを言うこととする。

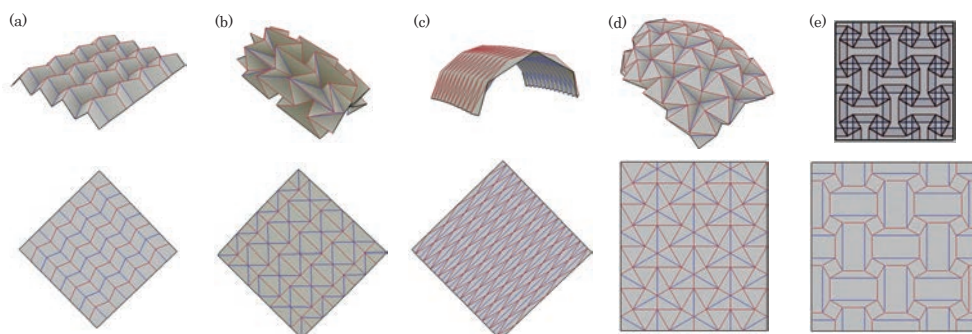


図 1.1 折紙テセレーション。図は Freeform origami [34] にて作成。(a) ミウラ折り [23] (b) waterbomb テセレーション [42] (c) 吉村パターン [40] (d) Resch パターン [29] (e) ねじり折り [7]

構造的な折紙テセレーションが工学的な興味を引く性質として、(1) 折り目によって全体として剛性を発揮すること、(2) 折り目のトポロジーを保ちながら様々な曲面形状を作ること、(3) 折り変形によって形状を連続的に変えること、の三つが考えられる。折紙構造はマイクロスケールから建築まで様々な分野で折紙が研究されている [26, 4] が、それは以上の三つの性質はスケールや材料よりも折り目パターンの影響を大きく受けるからである。よって折紙テセレーションを応用する研究においては折り目パターンと三つの性質との関係を調べるのが重要である。以下の小節では、三つの性質をそれぞれ (1) 剛性、(2) 形状、(3) 変形、のキーワードで表し、折紙テセレーションの構造材料としての

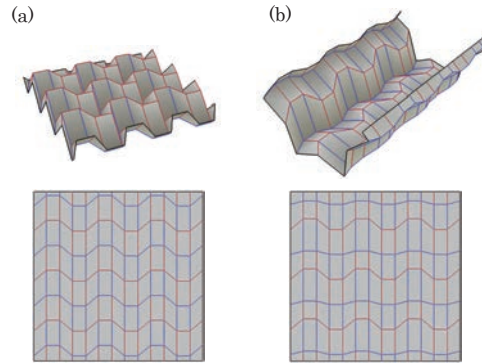


図 1.2 ミウラ折りと折り目のトポロジーが同じパターン。図は Freeform origami [34] にて作成。(a) 皺の構造が異なるが大域的に平面を作る構造 (b) 大域的に柱面を作る構造

応用に注目して各性質を解説する。

### 1.1.1 剛性

折紙テセレーションは折り目が剛性を発揮することで、重量当たりの剛性が高い材料として用いられる。シートを直線の折り目に沿って折ったとき、折り目は曲げや圧縮に対し剛性を発揮する。ただしシートを折り目で折る変形では折り目はほとんど剛性を発揮しない。例えばトタンの波板は、構造の内部にある折り目が曲げに強い梁の役割をすることで、折り目に垂直な軸周りの曲げについて平板よりも剛性が高くなる。特に段ボールのように表面材を貼り付けることで、折った後の状態である折り状態を固定し剛性を保つことができる。しかし波板や段ボールは全ての折り目が平行であるため折り目を軸とした曲げに弱く、曲げ剛性に著しい異方性がある。折紙テセレーションでは二方向以上に折り目が存在するものがあるため、それをを用いることで折り目が曲げに強い梁または圧縮材として、どの方向の曲げに対しても剛性を発揮することが期待される。折紙テセレーションに表裏から表面材を貼り付け固定したものを折紙コアパネルと呼び、特に二方向以上に折り目を持つ折紙テセレーションをコアとすることで軽量高剛性な構造材料を実現できるものとして注目されている。折紙コアパネルの剛性について、Klett らはミウラ折り (図 1.1 (a)) やそのパラメータ値、即ち折り目の寸法や角度を変化させたもの、また waterbomb テセレーション (図 1.1 (b)) に対し有限要素法や紙モデルによる実験によって剛性を比較し、高い剛性を持つ折紙コアパネルを得ようとした [19]。ミウラ折りを折紙コアとする折紙コアパネル [28, 22] はゼータコアと呼ばれ、実用化に向け剛性が広く研究されている [25, 14]。

既存の多くの折紙コアパネルにおいて折紙コアと表面材との接着面は折り目であり、理論上の面積は 0 であるため表面材が剥離しやすい。中間構造のコア材を表面材で挟むサンドイッチコアパネルにおいては、コア材には表面材と面接着可能なものが求められる。三浦は、金属板によるミウラ折りをコア材として利用する際にプレス加工により表裏面

に糊代の面を作ることを提案した [21]。ただしこのようなコア材は平坦なシートを折って作ることでできる形状ではなくなる。折紙構造で糊代面を作る例として、ミウラ折りや吉村パターン (図 1.1 (c)) を基にした構造で一部に糊代面を作るものがある [39, 38]。また須藤らのミウラ折りを伸長し糊代面を作る折紙テセレーションの一部では、表面材の全面を糊代とするものがあり [31]、著者らによる双対タイリング折紙は表面材の全面を糊代とすることを可能にする折紙テセレーションである [3]。

### 1.1.2 形状

折紙テセレーションは折り状態において様々な形状を作ることができる。ミウラ折り (図 1.1 (a)) や吉村パターン (図 1.1 (c))、Resch パターン (図 1.1 (d)) は皺のような立体構造を作るが、大域的には平面や曲面と見なすことができる。ミウラ折りの折り状態は大域的に平面であり、吉村パターンは大域的に円筒形である。また折り目の接続関係即ちトポロジーを保ちながら、折り目の長さや方向を変化させることで折り状態の形状が異なる折り目パターンの集合を得ることができる (図 1.2)。折り目パターンと折り状態の形状の関係について、折り目パターンと各折り目の折り角度に対しどのような曲面形状が作られるかという順問題と、目的とする折り状態の大域的な曲面形状や内部構造を実現または近似する折り目パターンをデザインする逆問題が考えられる。順問題は、折紙シミュレータ [13, 34] によりシートの歪みを許容して折りながら歪みを修正する方法で、可能な形状の一つを求めることができる。逆問題では特にミウラ折りについて、与えられた曲面形状を作る折り目パターンを求める研究が盛んである [18, 15, 27, 16]。例えば Dudte らは柱面や回転面、鞍型やその組み合わせによる曲面を近似する一般化ミウラ折りパターンの設計手法を提案した [11]。航空機の船体などのデザインされた曲面形状を少ない数の折紙コアパネルで実現するため、様々な曲面形状を作るのに適した折紙テセレーションの設計手法が求められている。

### 1.1.3 変形

折紙は金属のプレス成形と異なり、最終的な折り状態において折り目以外の面、即ち折り目やシートの外周に囲まれた領域は、最初の展開状態と合同である。しかし連続的な変形プロセスを考えると、変形途中ではシートの面が曲がったり伸縮する、即ち歪むことがある。変形の過程において、どの時点でもシートの全ての面が歪まない折り変形を剛体折りと呼ぶ。また展開状態から折り状態まで剛体折りで変形可能な折り目パターンを剛体折り可能と呼ぶ。例えばミウラ折りは剛体折り可能だが、ねじり折り (図 1.1 (e)) は剛体折り不可能である。剛体折り可能な折紙の三つの利点を述べる。一つ目は面が変形しないため、硬い素材を用いることができる点である。剛体折り不可能な折紙では紙やポリプロピレンなど柔らかい素材が用いられるが、剛体折り可能な折紙であれば、硬い素材に折り目とする部分にのみ切れ目を入れて柔らかくする [2] などの方法が利用できる。

二つ目は剛体折りの自由度、即ち変形挙動の次元が小さいとき、硬い素材であればシートの限られた箇所を相対的に動かすことで全体を連動して変形させられる点である。例えばミウラ折りは一自由度で剛体折り可能であり、一か所の折り目を操作することで全体を変形させられる。三つ目は折る際に面に歪みが生じないため、折りと展開の反復に対して耐久性が高い点である。

与えられた折り目パターンの剛体折り可能性を判定するアルゴリズムは、一般の折り目パターンに対しては知られておらず、現状では数値的シミュレーションによる折り変形における面の歪みの計算に頼っている。具体的な折り目パターンごとにシミュレーションしなければ剛体折り可能か推定できず、変形が描画されたとしても数値計算が離散的であることから剛体折りであることは保証されない。そのため一般的に剛体折り可能なパターンを効率的にデザインするツールは存在しない。特殊な例であれば、館はミウラ折りと同ジロジーの同じ折り目パターンについて、平坦折り可能かつ平坦折り状態以外の折り状態が存在するならば剛体折り可能であることを示している [32]。この性質を用いて、館は Freeform Origami [34] によって、与えた折り状態の形状を平坦折り可能性と平坦に展開できる可展性を満たすように修正することで剛体折り可能なパターンを求めている。しかしこの方法は、ミウラ折りと同ジロジーを持った折りパターンのみ限定されている。

## 1.2 研究目的

以上三つの性質を満たす折紙テセレーション、即ち折り目により剛性を発揮し、様々な曲面形状を作るものや、剛体折りできるようなパラメータ化された折紙テセレーションの集合を得ることが本研究の目的である。折紙コアとしてはミウラ折りと同ジロジーのものが多く研究されている。その理由は、ミウラ折りは一自由度で剛体折り変形が可能であり、折り目のパラメータ値、即ち折り目の寸法や角度を変更することで多様な曲面形状を作るためである。しかしながら前述の通り、ミウラ折りと同ジロジーの表面材との接着面は折り目であり面積 0 なので剥離による強度低下の問題があった。本研究では、上下にタイリングを作り表面材と全面で接着可能な折紙コアとして利用できる折紙テセレーションである、四辺形グリッド双対タイリング折紙 [3] について議論する。双対タイリング折紙は著者が修士研究において Lang の折り紙作品 “Octet Truss, opus 652” [20] を一般化し提案した折紙である。特に二回転対称な四角錐一種類を用いた両平面双対タイリング折紙は、折り状態において折り目がオクテットトラスと同ジロジーの構造を含むため、剛性が期待できる。広義の双対タイリング折紙の定義は曲面形状を作るものを視野に入れているが、実在するものとしては大域的に平面な構造を持つ両平面双対タイリング折紙のみが見つかった。また両平面双対タイリング折紙の剛体折り可能性については議論されていなかった。本研究では折紙コアとして剛性の期待される表裏面に四辺形グリッドを作る両平面双対タイリング折紙を基に、折り状態が大域的に柱面形状となるものへの拡張や剛体折り可能なものの設計方法を提案することを目的とする。

## 1.3 構成

本論の構成は以下の通りである。

第 2 章では、著者の修士研究の内容 [3] を基に、一般の双対タイリング折紙を定義し、特に四辺形グリッドを持つ両平面双対タイリング折紙について議論する。一般の双対タイリング折紙は双対なグラフから、角錐と四面体によるトラス構造を構成することで定義される。展開図上で角錐と四面体にかかわる領域をそれぞれ角錐領域、四面体領域と呼ぶ。トラス構造、角錐領域、四面体領域の構成から、双対タイリング折紙の存在条件を示す。両平面双対タイリング折紙は角錐が全て合同な二回転対称な四角錐であり、表裏面に合同な平行四辺形グリッドが現れる双対タイリング折紙である。この基準となる四角錐を表現する三つのパラメータについて両平面双対タイリング折紙の存在条件を明らかにした。ただし存在条件が満たされたとしても、四面体内部の折り状態は定まらない。四面体領域の折り方の例として翼折り [17, 43] を基にした方法を提案する。

第 3 章では両平面双対タイリング折紙の折り目の長さや方向を変更することで柱面形状を構成する柱面双対タイリング折紙を議論する。両平面双対タイリング折紙の平行四辺形グリッドを構成する四角錐の一系列を取り出すとくさび形が作られる。両平面双対タイリング折紙は、このくさび形が上下から噛み合わさったものと見なせることに着目し、上下で異なるくさび形を用いることで大域的に柱面を作る四辺形グリッド双対タイリング折紙が得られることを示す。これを柱面双対タイリング折紙と呼び、接続可能なくさび形は自身の他に高々一種類であることを示す。一つの柱面双対タイリング折紙に用いることのできるくさび形は最大で二種類に制限されるが、くさび形を接続する順番は任意であり筒型や波型など様々な柱面を作ることができる。さらに柱面形状をデザインするために有効な、くさび形の形状を表す三つのパラメータ値を提案し、このパラメータについて柱面双対タイリング折紙が成立する条件の解空間を明らかにする。また三つのパラメータ値と接続するくさび形の順番を指定することで柱面双対タイリング折紙をデザインするツールについて述べる。解空間を参考にパラメータ値を設定することで、ツールにより展開図とトラス構造を確認しながら形状をデザインできる。柱面双対タイリング折紙のデザインの参考として、(1) 緩やかに曲がり円筒を近似するもの、(2) 閉じた角柱面を作り閉じるもの、(3) 一方のくさび形が縮退するもの、の三つの特殊な例について説明する。

第 4 章では両平面双対タイリング折紙の剛体折り可能性を判定する方法と、剛体折り可能な両平面双対タイリング折紙を設計する戦略について議論する。前述の通り剛体折り可能な折り目パターンを設計する一般的な手法はなく、両平面双対タイリング折紙は館 [32] のような設計手法が知られた折り目パターンの集合には含まれていない。そこで本研究では、両平面双対タイリング折紙を、基準となる角錐から定まる網目状のフレームと、内部の折り目を自由に定められる四面体領域モジュールに分解する。境界形状に注目した配置空間を考え、フレームとモジュールの変形可能領域を比較することで、剛体

折り可能性を判定する。そうした剛体折りを実現しやすいモジュールの設計手法として、平坦折り可能なモジュールを用いることを提案する。

第 5 章では本研究の成果をまとめ、今後の研究の発展について議論する。

## 第 2 章

# 両平面双対タイリング折紙

この章では本論文の主題である双対タイリング折紙を導入する。双対タイリング折紙とは Lang の折紙作品 “Octet Truss, opus 652” [20] を一般化した折紙である。2.2 節では最も一般的な双対タイリング折紙を定義するが、本論文で扱うのは 2.3 節の二回転対称な四角錐一種類による表裏面に平行四辺形グリッドを作る双対タイリング折紙である。このような双対タイリング折紙を四辺形グリッド両平面双対タイリング折紙、または単に両平面双対タイリング折紙と呼ぶこととする。2.4 節では両平面双対タイリング折紙の特殊な例について述べる。

### 2.1 Lang の Octet Truss

オクテットトラス構造 [6, 12] とは正八面体と正四面体による空間充填を基にしたトラス構造である。工業応用としては主に平行平面で区切った層を取り出して、正八面体の半分である正四角錐と正四面体による板状の構造を用いる。二つの平行平面による断面



図 2.1 Lang の “Octet Truss, opus 652” [20]。URL: <https://langorigami.com/artwork/octet-truss-opus-652/>

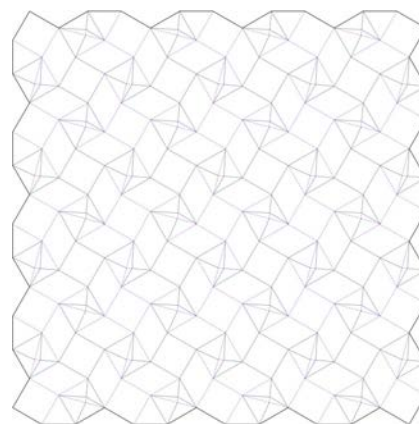


図 2.2 “Octet Truss, opus 652” の展開図。URL: <https://langorigami.com/crease-pattern/octet-truss-opus-652/>

には正四角錐の底面による正方形格子が現れる。<sup>\*1</sup>二つの正方形格子において、正四角錐は一方の格子の正方形を底面に、もう一方の格子の頂点を頭頂点としている。また正四面体は四つの正四角錐に囲まれて存在しており、六つの辺の内二辺が一本ずつ、二つの正方形格子の辺となっている。

Lang の折紙作品 “Octet Truss, opus 652” [20] (図 2.1) はこの構造を表現した折紙であり、オクテットトラス構造の辺を折り目に含んでいる。“Octet Truss” は正四角錐と正四面体のパーツに分解される。正四角錐パーツは正四角錐の表面にあるシートであり、底面が集まることで板状の構造の表裏面に正方形格子による平面充填を作る。一方正四面体パーツは図 2.1 の側面に見える部分であり、翼折り [17, 43] と呼ばれる構造をしている。翼折りの詳しい構造は 2.3.1 節で述べる。<sup>\*2</sup>展開された各パーツを並べると図 2.2 の展開図となり、正四角錐パーツは稜線で切り開かれた星形、正四面体パーツは正方形になる。折り目がオクテットトラス構造の辺、即ち引張・圧縮に強い線材の役割をなすため、折紙トラスコアパネルとしての利用が期待される。特に上下面に平面充填を作ることから、トラスコアパネルの表面材との接着面を広くとることができる。

## 2.2 双対タイリング折紙の定義

“Octet Truss” の正四角錐や正四面体を任意の角錐と四面体に一般化する。双対タイリング折紙の構成は以下の通りである。

1. 二つの曲面を与える。これを表面、裏面と呼ぶこととする。表裏面はパネルコアにおける表面材を貼り付ける面である。表裏面の上にそれぞれ平面グラフを描く。ただし上下のグラフは互いに双対関係にあるものとする。双対関係は表裏のグラフの面と頂点、辺同士を対応させる。表面のグラフの面と裏面のグラフの対応する頂点を結び図 2.3 左に赤く示されるように角錐を構成する。裏のグラフの面と表のグラフの対応する頂点を結び図 2.3 左で黒く示されるような角錐を構成する。角錐の底面は表裏のグラフの面である。表裏のグラフの対応する辺同士を結ぶことで図 2.3 左で青く示されるような四面体を構成する。青い四面体の各面は赤と黒の角錐の側面に一致している。
2. 角錐の側面を稜線で切り開き図 2.3 右の赤と黒で示されるような星形に展開する。この星形を角錐領域と呼ぶこととする。角錐領域を平面上に並べる際、赤い角錐の外側はシートの表、黒い角錐の外側はシートの裏となるように並べることとする。また赤と黒二つの角錐が稜線を共有しているとき、それぞれの角錐領域は辺で接続させる。二つの角錐領域を接続する辺はトラス構造での角錐が共有している辺をそれぞれの角錐で切り開いて現れる辺である。一つの辺を切り開くとそれぞれの角錐領域では二本の辺になるため、このとき角錐の接続方法は四種類考え

<sup>\*1</sup> 図 2.3 左はオクテットトラスがシアードした構造であるが参考になる。

<sup>\*2</sup> 翼折りは扇型四角形に用いられる折り方だが、本論文では凸四角形に拡張して用いている。



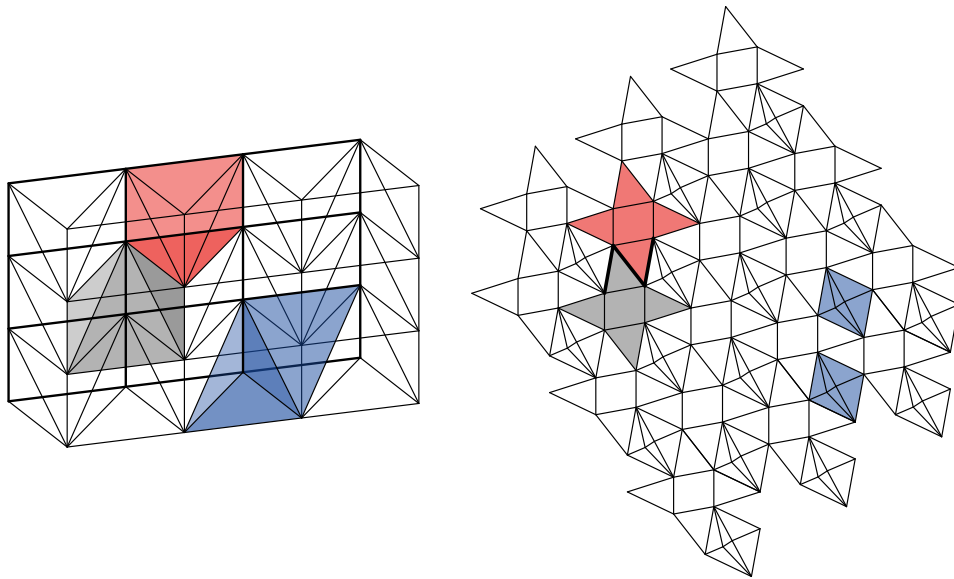


図 2.3 両平面双対タイリング折紙。左: トラス構造。右: 展開図。上の平面に底面を持つ赤い四角錐と下の平面に底面を持つ黒い四角錐、上下の平面の辺を繋いだ青い四面体からなる。

られる。本論文では角錐領域の共有辺を挟む二つの三角形の稜線、即ち図 2.3 右の太線が Z 字をなすものを選ぶこととする。<sup>\*3</sup>

3. 角錐領域が平面上に並べられたとき、平面には図 2.3 右で青く示されるような四角形の穴が残っている。この四角形を四面体領域と呼ぶこととする。四面体領域の境界辺はそれぞれ異なる四つの角錐領域と共有されている。これらの角錐領域は折り状態においてひとつの四面体を囲んでいる。四面体領域の内部に折り目を加え、折り状態が上述の四面体内部からはみ出ないようにする。

以上のプロセスが滞りなく行われたとき、双対タイリング折紙が得られる。

このプロセスを精査すると双対タイリング折紙の存在条件は以下ようになる。

**非交差条件** 上下の双対グラフからトラス構造を構成した際、角錐同士が互いに交差していないこと。

**角錐条件** 角錐領域を平面上に上記の条件で並べた際に紙の破れや重なりがないこと。

**四面体条件** 四面体領域を対応する四面体に収める折り目パターンが存在すること。

以上をまとめると、双対タイリング折紙の定義は次のようになる。

<sup>\*3</sup> 赤と黒の角錐領域の表裏、展開図上で一致した頂点はトラス構造でも一致していること、シートが展開図上で重ならないこと、の三つを考えると、図 2.3 右の太線が S 字か Z 字を描く接続がそれぞれ一つずつ存在する。

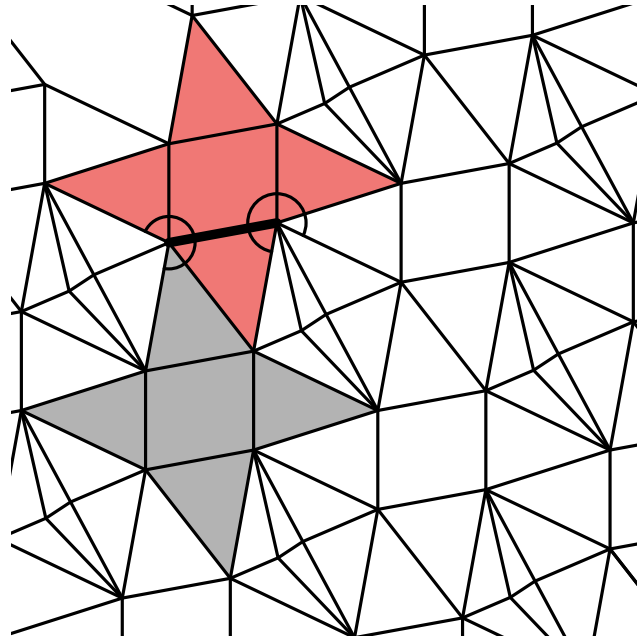


図 2.4 両平面双対タイリング折紙の角錐条件は、図の二種類の円弧の中心角が  $2\pi$  以下であることである。

**定義 1.** 二つの曲面とその上の双対グラフを与えたとき、非交差条件、角錐条件、四面体条件を満たしてトラス構造と展開図が構成されるとする。このとき展開図と折り状態の組を双対タイリング折紙と呼ぶ。

### 2.3 両平面双対タイリング折紙

双対タイリング折紙を設計するためには、どのような上下面と双対グラフが 2.2 節の存在条件を満たすかが問題となる。この節では著者の修士研究で議論した、二回転対称な角錐一種類による両平面双対タイリング折紙について説明する。二回転対称な四角錐は底面は平行四辺形であり、頭頂点から底面に下した垂線は回転中心を通る。このような四角錐を一種類だけ用いるため、両平面双対タイリング折紙の表裏面は平行な二平面であり、双対グラフは合同な二つの平行四辺形グリッドである。また二つの双対グラフは、一方のグラフの頂点からもう一方のグラフに下した垂線が、頂点と双対関係にある平行四辺形面の回転中心を通る位置関係にある。

両平面双対タイリング折紙について、2.2 節で述べた一般の双対タイリング折紙の存在条件を議論する。

**非交差条件** 角錐が直錐なので、非交差条件は常に成り立つ。

**角錐条件** 図 2.3 の赤い角錐と黒い角錐の角錐領域は合同である。角錐が二回転対称なので、角錐領域も二回転対称となる。このとき、ある角錐領域が周りの四つの角錐

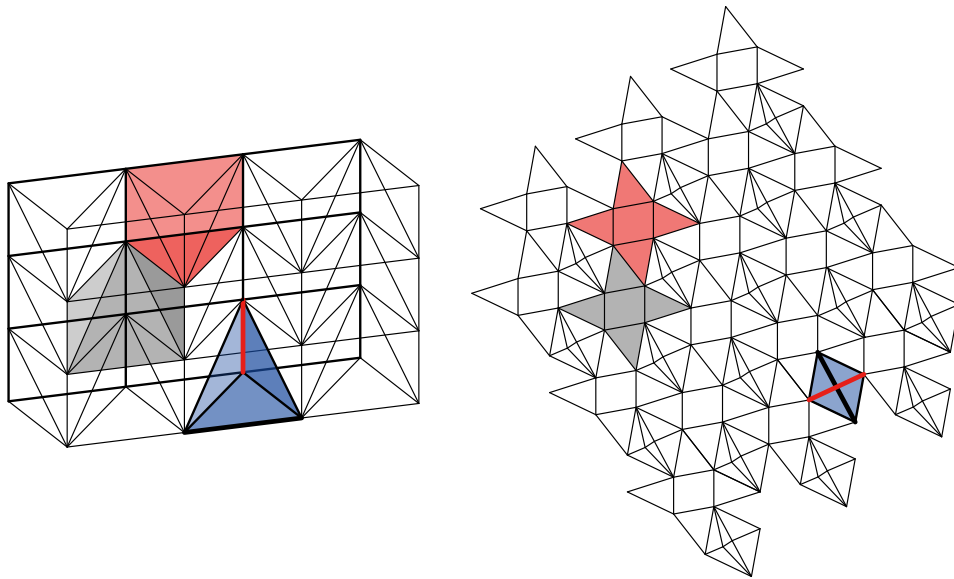


図 2.5 両平面双対タイリング折紙の四面体条件は、展開図 (右) の太い赤線と黒線がそれぞれトラス構造 (左) での太い赤線と黒線の長さよりも長いことである。

領域と共有している辺は二組の平行な二辺になる。よって自身と合同な角錐領域を平行な二辺の間を移る平行移動で複写すると隣接する角錐領域になる。<sup>\*4</sup>一方の平行移動によって角錐領域を一行に並べ、この列をもう一つの平行移動で複写することで、角錐領域を破れなく繋げることができる。よって角錐条件を満たすためには角錐領域の重なりがないことを確認すればよい。展開図の対称性から、角錐領域が重なるのはある頂点周りの内角の和が  $2\pi$  を超える場合のみである。また対称性より、折り目の山谷を無視すると頂点は二種類存在し、図 2.4 の太線の二つの端点である。それぞれの頂点には二つの角錐領域が集まっている。この二つの頂点周りでこの二つの角錐領域の内角の和が  $2\pi$  を超えないことが角錐条件である。

**四面体条件** 両平面双対タイリング折紙では四面体領域と四面体はそれぞれ合同である。よって図 2.5 の青い四面体と四面体領域のように一つの対応を考えればよい。四面体領域の外周の四辺は四面体の赤と黒の太線を除いた四辺に一致している。この四辺はループを作るので空間四辺形である。四面体条件は各四面体領域について次の二つが満たされることである: (a) 外周が対応する空間四辺形に沿うように折られる、(b) 内部が対応する四面体からはみ出ないように折られる。Demaine と Ku [9] によると、(a) は四面体領域の対角線の長さが、空間四辺形での対応す

<sup>\*4</sup> ただし角錐領域の色、即ち底面が表裏面のどちらに表れるかが変わる。

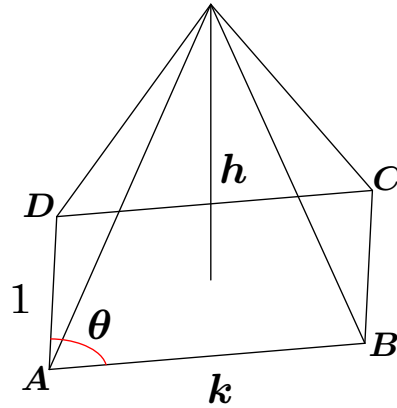


図 2.6 両平面双対タイリング折紙の単位四角錐。二回転対称であり、 $k, \theta, h$  の三つのパラメータで表される。

る頂点間の距離より短くないことと同値である。この頂点間の距離とは四面体の残り二辺、即ち図 2.5 の四面体上の赤と黒の太線の長さである。二回転対称な角錐一種類からなるトラス構造において、四面体領域は凸四角形である。凸四角形が (a) を満たすとき (b) を満たす折り目が存在する。折り目の構成方法は 2.3.1 節において説明する。特に図 2.5 の赤と黒一方の太線長さが折りの前後で等しいとき、この対角線のみが四面体領域内部の折り目となる。このような場合、四面体条件をクリティカルに満たすと言い、また四面体領域がクリティカルであると言うこととする。

両平面双対タイリング折紙のトラス構造は単位となる二回転対称な四角錐から定まり、単位四角錐は図 2.6 のように三つのパラメータで表現される：角錐底面  $ABCD$  の辺  $AB$  の長さ  $k$ 、角錐底面の点  $A$  の内角の大きさ  $\theta$ 、角錐の高さ  $h$ 。ここで相似な折り状態は相似な折り目パターンから折られるため、角錐底面のもう一方の辺  $DA$  の長さを 1 とすることで相似形を除いている。図 2.6 の通り、大きさ  $\theta$  の内角を持つ頂点について、長さ  $k, 1$ 、高さの順で右手系をなすものとする。このとき四面体条件において四面体領域の対角線と比較される辺の長さは、角錐の底辺  $k, 1$  である。展開図上での四面体領域の対角線の長さを計算し、四面体条件をパラメータで表すと次のようになる：

$$\begin{aligned} & ((k - \cos \theta) \sin \theta - \cos \theta \sqrt{4h^2 + \sin^2 \theta} \\ & - \sqrt{4h^2 + k^2 \sin^2 \theta})^2 \\ & + (\sin^2 \theta + 2k \cos \theta + \sin \theta \sqrt{4h^2 + \sin^2 \theta})^2 \geq 4k^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & ((k - \cos \theta) \sin \theta - \cos \theta \sqrt{4h^2 + \sin^2 \theta} \\ & + \sqrt{4h^2 + k^2 \sin^2 \theta})^2 \\ & + (1 + \cos^2 \theta - \sin \theta \sqrt{4h^2 + \sin^2 \theta})^2 \geq 4. \end{aligned} \quad (2.2)$$

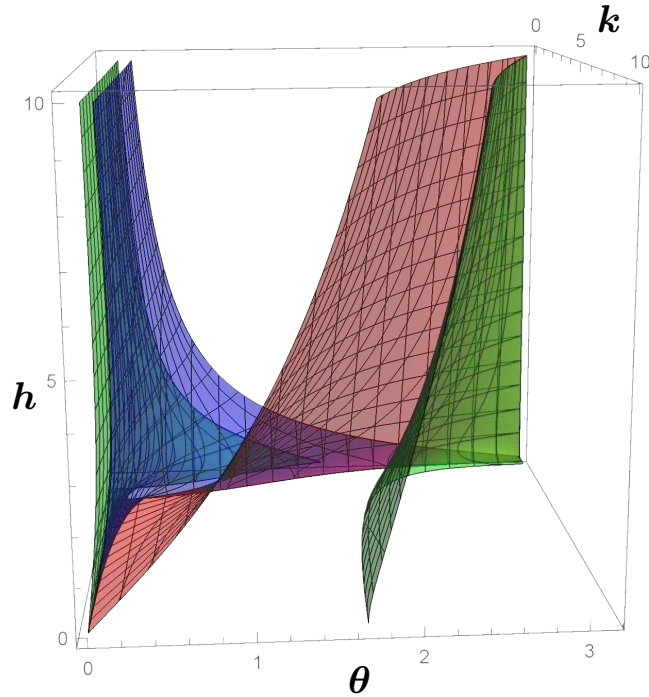


図 2.7 パラメータ  $k, \theta, h$  における両平面双対タイリング折紙の四面体条件と角錐条件。赤・青: 二つの対角線それぞれによって四面体条件がクリティカルになるパラメータ。即ち (2.1), (2.2) のそれぞれで等号が成立するパラメータ。緑: 角錐領域の頂点周りで角錐領域の内角の和が  $2\pi$  となるパラメータ。即ち角錐条件の不等式について等号が成立するパラメータ。赤と青の面の間で四面体条件を満たし、緑の面の間で角錐条件を満たす。

これらの不等式を満たすパラメータは、図 2.7 の通り角錐条件も満たす。即ち、両平面双対タイリング折紙が成り立つための必要十分条件は、不等式 (2.1), (2.2) が成り立つことである。

### 2.3.1 翼折り

双対タイリング折紙の構成において、四面体領域を折って四面体に収める折り目パターンは定まっていない。実際に双対タイリング折紙を折るために、この小節では四面体領域を折る方法の一つとして翼折りを基にしたものについて解説する。ただしより一般に、凸四角形を四面体に収める折りを解説する。ここで四面体は全ての辺が同一直線に縮退していないものとする。翼折りの折り状態は二つのパーツに分けられる。図 2.8 のように、一つは展開図  $ABCD$  の四辺に対応する四面体の辺  $A'B', B'C', C'D', D'A'$  からある点  $O'$  に伸ばした青い四つの三角形で構成される。もう一方のパーツは四角形の対角線で線対称な四角形を対角線で折り重ね、直線  $O'E'$  で更に折った緑の部分である。2.3 節で述べた Demaine と Ku の条件 [9] から、 $|AC| \geq |A'C'|$  かつ  $|BD| \geq |B'D'|$  とする。このとき、翼折りを基に紙を四面体内部に収める折り目を構成する。ただし、四面体

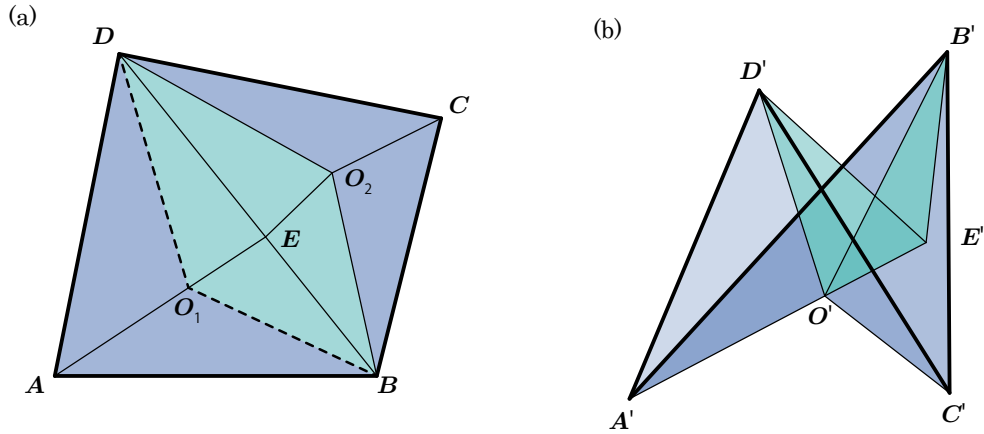


図 2.8 翼折りの概形。(a) 展開図。(b) 折り状態。

の形状によっては点  $O'$  が四面体内に存在せず、青い四つの三角形が四面体からはみ出てしまう。次の定理は点  $O'$  が四面体内部に存在するための条件である。

**定理 2.** 凸四角形  $ABCD$  に対し、点  $A, B, C, D$  を自身を端点に含まない対角線で折り返した点を  $A_r, B_r, C_r, D_r$  とする。四面体  $A'B'C'D'$  が線分に縮退しておらず、以下のいずれかを満たすとき、四面体  $A'B'C'D'$  の内部に  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle BCD$  を満たす点  $O'$  が存在する。

- $A_r$  が四角形  $ABCD$  の内部に存在し、 $|AC| \geq |A'C'| > |A_rC|$  かつ  $|BD| \geq |B'D'|$  である。
- $B_r$  が四角形  $ABCD$  の内部に存在し、 $|AC| \geq |A'C'|$  かつ  $|BD| \geq |B'D'| > |B_rD|$  である。
- $C_r$  が四角形  $ABCD$  の内部に存在し、 $|AC| \geq |A'C'| > |AC_r|$  かつ  $|BD| \geq |B'D'|$  である。
- $D_r$  が四角形  $ABCD$  の内部に存在し、 $|AC| \geq |A'C'|$  かつ  $|BD| \geq |B'D'| > |BD_r|$  である。
- $A_r, B_r, C_r, D_r$  は四角形  $ABCD$  の内部に存在せず、 $|AC| \geq |A'C'|$  かつ  $|BD| \geq |B'D'|$  である。

**証明.** 四面体  $A'B'C'D'$  が線分に縮退していないとする。 $\angle D'A'O' + \angle B'A'O'$  は  $O'$  を三角形  $B'C'D'$  上にとると、点  $C'$  に重なるとき最大、辺  $B'D'$  上で最小である。また  $O'$  を半直線  $A'O'$  の上で移動させても、 $O'$  と  $A'$  が重ならない限り  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O'$  は変化しない。同様に  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O'$  は  $O'$  を三角形  $D'A'B'$  上にとると、点  $A'$  に重なるとき最大、辺  $B'D'$  上で最小である。よって  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O'$  と  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O'$  はそれぞれ  $O'$  が三角形  $D'A'B'$ ,  $B'C'D'$  に近づく程小さくなる。即ち、 $O'$  が辺  $A'C'$  上にあるとき最大、辺  $B'D'$  上にあるとき最小である。

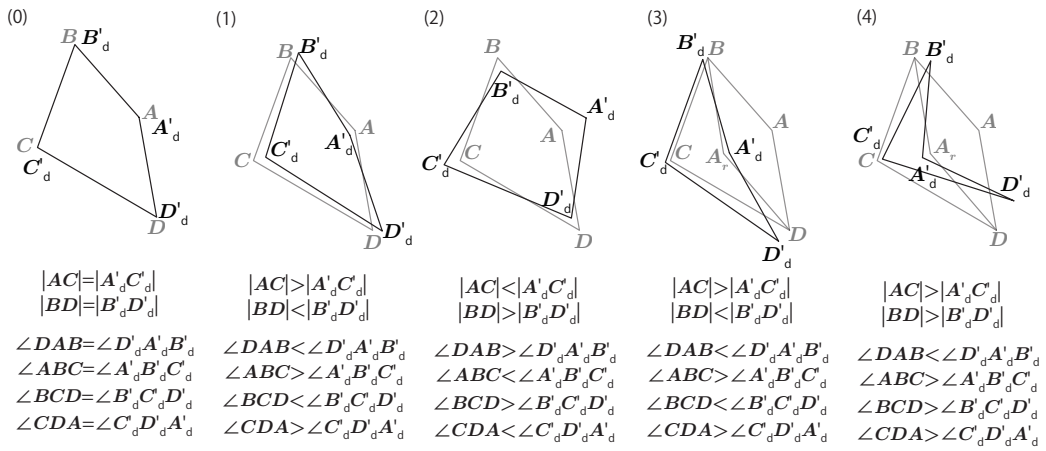


図 2.9 四面体  $A'B'C'D'$  の辺  $A'C'$  または  $B'D'$  を挟む二面を平面上に並べた四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の分類。  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  が非凸だが  $|A'C'| \geq |A_r C'|$  である (3) について、定理 2 において (1) と同一の議論が可能である。

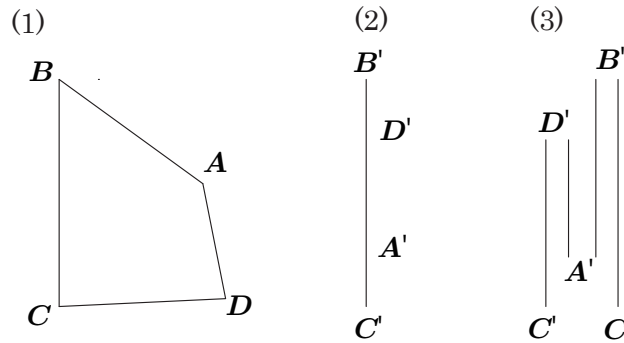


図 2.10 四面体  $A'B'C'D'$  が線分に縮退する例。(1) 四角形  $ABCD$ 、(2) 線分  $B'C'$  に縮退した四面体、(3) 四面体が線分に縮退する必要条件は  $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$  である。

$O'$  が辺  $A'C'$  上にあるとき、三角形  $A'B'C'$  と  $C'D'A'$  を平面上に並べた四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  を四角形  $ABCD$  と比較する。ここでまず  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  が凸四角形である場合を考える。 $|AC| = |A'C'| = |A'_d C'_d|$  のとき図 2.9 の (0) のように二つの四角形は合同となり、 $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle D'_d A'_d B'_d = \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle B'_d C'_d D'_d = \angle BCD$  である。 $|AC| > |A'C'| = |A'_d C'_d|$  のときは図 2.9 の (1) のように  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle D'_d A'_d B'_d > \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle B'_d C'_d D'_d > \angle BCD$  となる。よって  $O'$  が辺  $A'C'$  上にあるとき、 $|AC| \geq |A'C'|$  を満たすならば、 $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' \geq \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' \geq \angle BCD$  である。

実際には四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  は非凸であることがある。図 2.9 のように、四角形

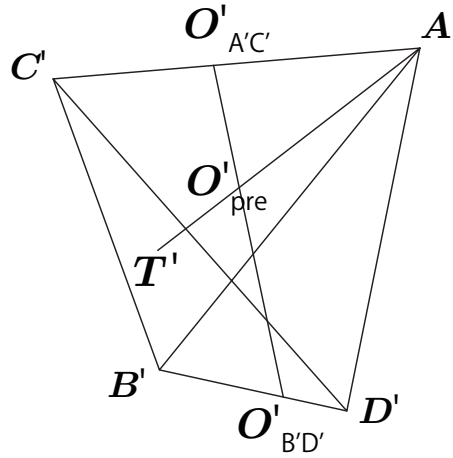


図 2.11 四面体  $A'B'C'D'$  内部に点  $O'$  を求める手順。辺  $A'C'$  と  $B'D'$  にそれぞれ点  $O'_{A'C'}$  と  $O'_{B'D'}$  を取る。線分  $O'_{A'C'}O'_{B'D'}$  上に  $\angle D'A'O'_{pre} + \angle B'A'O'_{pre} = \angle DAB$  を満たす点  $O'_{pre}$  が存在する。直線  $A'O'_{pre}$  と三角形  $B'C'D'$  との交点を  $T'$  とする。線分  $A'T'$  上に  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle BCD$  を満たす点  $O'$  が存在する。

$A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $A'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きくなる時、四角形  $ABCD$  と四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の各内角の大小は、(3):  $|A'C'| = |A'_d C'_d| > |A_r C|$  のとき (1) と等しい。同様に、四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $C'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|A'C'| = |A'_d C'_d| > |A_r C|$  を満たすならば四角形  $ABCD$  と四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の各内角の大小は (1) と等しい。また、

- 四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $B'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|B'D'| > |B_r D|$  を満たすならば  $|AC| < |A'C'| = |A'_d C'_d|$  である。
- 四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $D'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|B'D'| > |B_r D|$  を満たすならば  $|AC| < |A'C'| = |A'_d C'_d|$  である。

よって、定理の前提を満たすならば、四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の凸、非凸によらず、 $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' \geq \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' \geq \angle BCD$  である。

$O'$  が辺  $B'D'$  上にあるとき、三角形  $D'A'B$  と  $B'C'D'$  を平面上に並べた四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  を四角形  $ABCD$  と比較する。ここでまず  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  が凸四角形である場合を考える。 $BD = B'D'$  のとき図 2.9 の (0) のように二つの四角形は合同となり  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle D'_d A'_d B'_d = \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle B'_d C'_d D'_d = \angle BCD$  である。 $BD > B'D'$  のときは図 2.9 の (2) のように  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle D'_d A'_d B'_d < \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle B'_d C'_d D'_d < \angle BCD$  となる。

先述の議論と同様、四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  は非凸であることがあるが、



- 四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $A'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|A'C'| > |A_r C|$  を満たすならば  $|BD| < |B'D'| = |B'_d D'_d|$  である。
- 四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $B'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|B'D'| > |B_r D|$  を満たすならば四角形  $ABCD$  と四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の各内角の大小は (2) と等しい。
- 四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $C'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|A'C'| > |A_r C|$  を満たすならば  $|BD| < |B'D'| = |B'_d D'_d|$  である。。
- 四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の頂点  $D'_d$  の内角が  $180^\circ$  より大きいとき、 $|B'D'| > |B_r D|$  を満たすならば四角形  $ABCD$  と四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の各内角の大小は (2) と等しい。

よって定理の前提を満たすならば、四角形  $A'_d B'_d C'_d D'_d$  の凸、非凸によらず、 $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' \leq \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' \leq \angle BCD$  である。

以上より、定理の前提を満たし、四面体  $A'B'C'D'$  が線分に縮退していないならば、二辺  $A'C'$ ,  $B'D'$  にそれぞれ点  $O'_{A'C'}$ ,  $O'_{B'D'}$  を取り、結んだ線分の上で点  $O'_{pre}$  を動かすと、端点  $O'_{pre} = O'_{A'C'}$  で  $\angle D'A'O'_{pre} + \angle B'A'O'_{pre} \geq \angle DAB$  であり、もう一方の端点  $O'_{pre} = O'_{B'D'}$  で  $\angle D'A'O'_{pre} + \angle B'A'O'_{pre} \leq \angle DAB$  である。線分上を  $O'_{pre}$  が動くとき  $\angle D'A'O'_{pre} + \angle B'A'O'_{pre}$  は単調に変化するので、線分  $O'_{A'C'} O'_{B'D'}$  上に  $\angle D'A'O'_{pre} + \angle B'A'O'_{pre} = \angle DAB$  を満たす点  $O'_{pre}$  が存在する。ただし図 2.10 のように四面体が線分に縮退しているとき、 $\angle D'A'O'_{pre} + \angle B'A'O'_{pre}$  の値は  $\pi$  の整数倍しかとらないため、一般に条件を満たす  $O'_{pre}$  は得られない。

直線  $A'O'_{pre}$  は点  $A'$  で辺  $A'C'$  と交わり、三角形  $B'C'D'$  を通る。直線  $A'O'_{pre}$  と三角形  $B'C'D'$  の交点を  $T'$  とし、点  $O'$  を線分  $A'T'$  上で動かす。  $O' \neq A'$  のとき  $\angle D'A'O' + \angle B'A'O'$  は一定であり、 $\angle DAB$  に等しい。 $\angle B'C'O' + \angle D'C'O'$  は直線  $A'O'_{pre}$  が辺  $A'C'$  と同一直線上にあるとき常に  $\angle BCD$  に等しく、それ以外のときは端点  $O' = A'$  で  $\angle BCD$  より大きい。線分  $C'T'$  を伸ばすと線分  $B'D'$  と交わるため、 $\angle B'C'O' + \angle D'C'O'$  はもう一方の端点  $O' = T'$  では  $\angle BCD$  より小さい。よって線分  $A'T'$  上、即ち四面体  $A'B'C'D'$  の内部に、 $\angle D'A'O' + \angle B'A'O' = \angle DAB$  かつ  $\angle B'C'O' + \angle D'C'O' = \angle BCD$  を満たす点  $O'$  が存在する。  $\square$

この定理から得られる  $O'$  について、頂点間の距離から  $O_1, O_2$  を作図する。具体的には、三角形  $DAO_1$ ,  $BAO_1$ ,  $BCO_2$ ,  $DCO_2$  はそれぞれ折り状態の  $D'A'O'$ ,  $B'A'O'$ ,  $B'C'O'$ ,  $D'C'O'$  と合同であることを利用する。点  $E$  は直線  $AO_1$  と対角線  $BD$  の交点として作図する。

折り状態における点  $E'$  は頂点  $B', D', O'$  の位置、また三角形  $BEO_1$  と  $B'E'O'$ 、 $DEO_1$  と  $D'E'O'$  がそれぞれ合同であることから作図される。点  $E'$  が四面体内部にあるとき、四角形  $ABCD$  は翼折りで四面体  $A'B'C'D'$  の内部に折られている。

点  $E'$  が四面体の外側にあるとき、図 2.8 の緑のパーツを次の折り方で折り四面体内部に収める。図 2.12 のように四角形  $BO_2 DO_1$  を対角線  $BD$  で折り返したのち、点  $O$  か

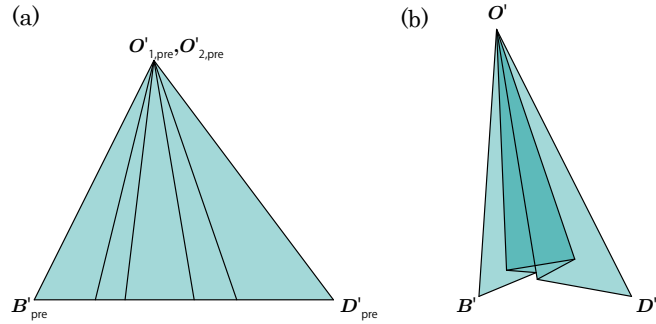


図 2.12 図 2.8 における翼折りの緑の部分を四面体内部に収める折り方。(a) 緑の領域を辺  $BD$  で折り返したもの。(b) さらに点  $O$  からの放射状の折り目で折ったもの。

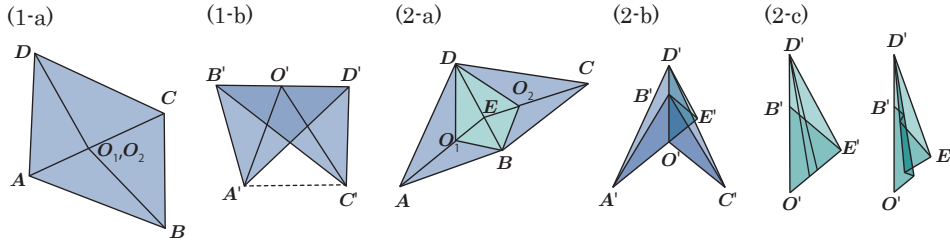


図 2.13 三点  $B'D'O'$  が同一直線上にある場合。(1) 対角線  $BD$  で折られる場合。緑の部分が存在しない。(1-a) 展開図、(1-b) 折り状態。(2) 緑の部分が存在するが図 2.12 折り方ができない場合。(2-a) 展開図、(2-b) 翼折りした状態。全ての頂点が同一平面上にある。(2-c) 緑の部分を四面体内部に収める折り方の例。 $D'$  から放射状に伸びる折り目で折る。

ら伸びる放射状の折り目で畳むことで三角形  $O'B'D'$  の上に収めることができる。三角形  $O'B'D'$  は四面体  $A'B'C'D'$  の内部にあるので、この折り方で全体が四面体内部に収められる。

図 2.12 の折り方は頂点  $B', D', O'$  が同一直線上にあるとき成立しない。頂点  $B', D', O'$  が同一直線上にあるの一つは図 2.13 (1) のように四角形が対角線で折られる場合である。このときは、折られたシートは四面体  $A'B'C'D'$  の二面  $D'A'B'$  と  $B'C'D'$  となり、四面体に収まっている。もう一つの場合は、図 2.13 (2) のように全ての頂点が同一平面上にある場合である。このとき四面体  $A'B'C'D'$  は三角形になる。図の例では四面体  $A'B'C'D'$  は、三角形  $A'C'D'$  と一致する。図の場合では、緑の部分は三角形  $O'E'D'$  となり、点  $D'$  から放射状に伸びる折り目で折ることで三角形  $A'C'D'$ 、特に三角形  $O'C'D'$  に収めることができる。

以上の構成により、凸四角形  $ABCD$  と空間四角形  $A'B'C'D'$  に対し、 $AC \leq A'C'$  かつ  $BD \leq B'D'$  が成り立つとき四面体  $A'B'C'D'$  の内部に紙を収める折り目が存在する。

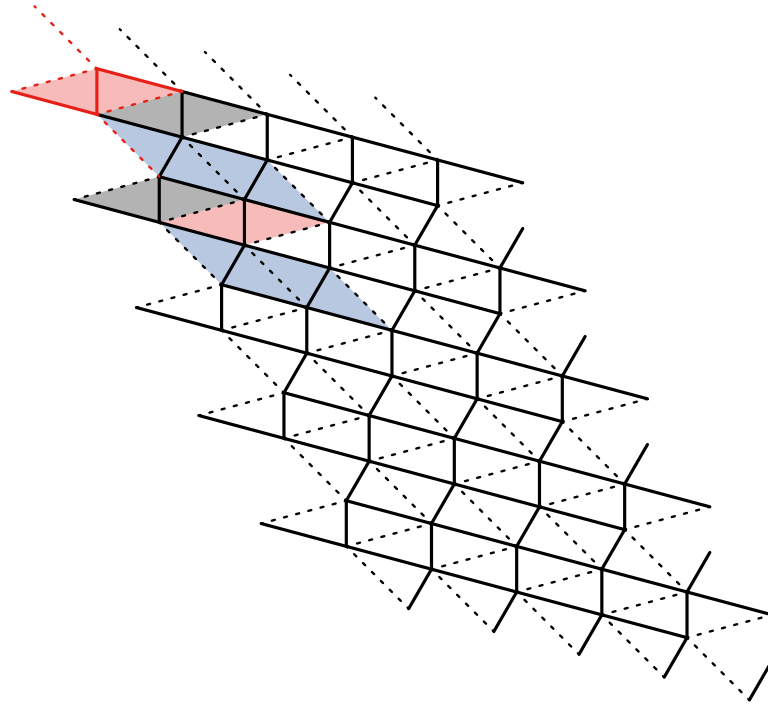


図 2.14  $k = 0$  のときの両平面双対タイリング折紙。赤い線が縮退した角錐領域である。同様に黒い面も角錐領域、青い面が四面体領域である。点線は折り角度が  $0$  であり実際には折られない。四面体領域がクリティカルなとき図のようにミウラ折りパターンとなっている。

## 2.4 両平面双対タイリング折紙の特殊な例

### 2.4.1 ミウラ折りへの収束

図 2.6 において  $k = 0$  である角錐による両平面双対タイリング折紙を考える。角錐底面は線分に縮退するため、実際には角錐底面による平面充填も直線に縮退する。この角錐の展開図、角錐領域は縮退した側面の向きが不定であるが、角錐領域が全て合同で二回転対称となるようにすると、平行移動によって平面上に並べることができる。 $k > 0$  のときの展開図の座標表示に  $k = 0$  を代入することで、図 2.14 のような展開図を描く。このとき四面体条件に不等式 (2.1), (2.2) が利用できる。 $k = 0$  を代入すると、(2.1) は常に成り立つ。 $0 < \theta < \pi, h > 0$  に注意すると、(2.2) から次が得られる:

$$h \geq \frac{\cos \theta + \sqrt{2\sqrt{7} + \cos 2\theta}}{4 \sin \theta} \quad (2.3)$$

式 (2.3) の等号が成り立つとき、四面体条件をクリティカルに満たす。このとき図 2.14 のように四面体領域を対角線のみで折ると、ミウラ折りとなる。そうでないときも平坦

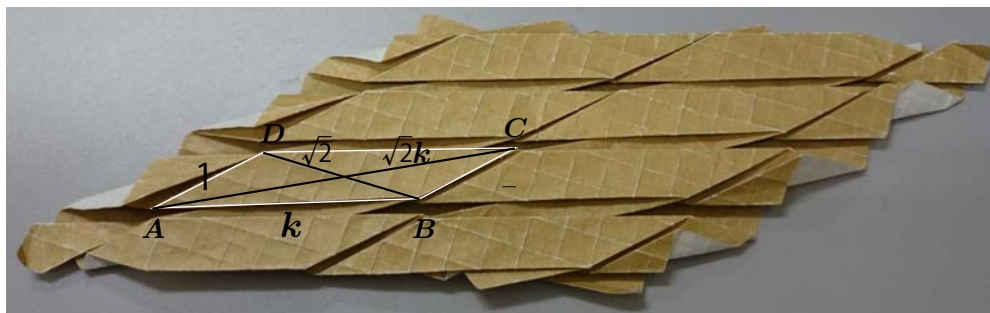


図 2.15 折り状態が平面の上に乗る両平面双対タイリング折紙。角錐の高さ 0 で角錐底面の対角線が辺長の  $\sqrt{2}$  倍のとき成立する。

に畳まれる翼折りによってミウラ折りのような、平坦に畳める波型の折紙が得られる。

#### 2.4.2 シート全体が同一平面上にのる両平面双対タイリング折紙

図 2.6 において  $h = 0$  である角錐による両平面双対タイリング折紙を考える。このとき図 2.15 のように角錐と四面体は平面上ある。折紙ではシートは伸びないため、四面体が平面であるときこの四面体は四面体領域と合同である。<sup>\*5</sup>四面体条件 (2.1), (2.2) に  $h = 0$  を代入し等号を満たすのは

$$k = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 1} \quad (2.4)$$

のときである。これは図 2.6 において  $h = 0$  としたとき、対角線  $AC$  の長さが  $\sqrt{2}k$  であることと同値である。これは  $BD$  の長さが  $\sqrt{2}$  であることとも同値である。底面が以上の条件を満たす高さ 0 の角錐を用いれば、折り状態が同一平面上にのる双対タイリング折紙を作ることができる。

<sup>\*5</sup> 凸四角形は辺の長さを変えずに平面上で変形すると対角線の一方は伸びるため、四面体領域から変形してしまうと Demaine と Ku の条件 [9] を満たさない。

## 第 3 章

# 柱面を作る双対タイリング折紙

この章では第 2 章の両平面双対タイリング折紙を柱面に拡張する。第 2 章では二回転対称な角錐一種類による平行四辺形グリッドを作る両平面双対タイリング折紙を議論した。3.1 節では両平面双対タイリング折紙の折り状態をくさび形の組み合わせとして解釈する方法を示す。3.2 節では異なるくさび形を組み合わせることで大域的に柱面形状を作る四辺形グリッドの双対タイリング折紙、柱面双対タイリング折紙について議論する。特にくさび形同士の接続条件を明らかにすることで、接続可能なくさび形は自身の他に高々一つであることを示す。3.3 節ではまず柱面双対タイリング折紙を構成するくさび形の形状に着目し、三つのデザインパラメータを選び、このパラメータにおける柱面双対タイリング折紙の存在条件を明らかにし、解空間を図示する。3.4 節ではデザインパラメータを用いた形状設計プログラムを提案し、二種類のくさび形を用いた柱面のデザインの例を提案する。

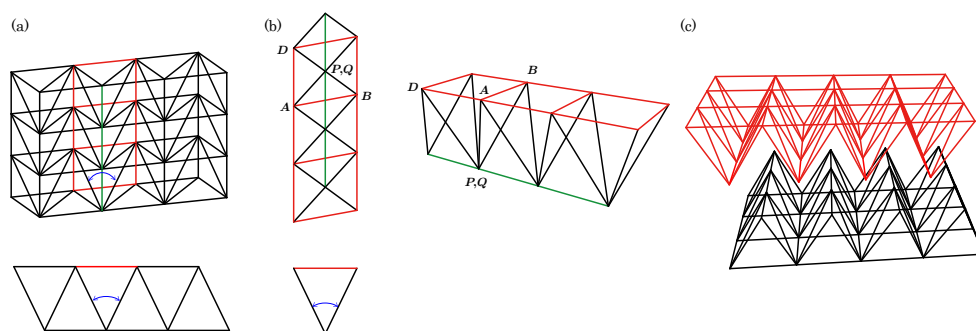


図 3.1 (a) 両平面双対タイリング折紙のトラス構造。(b) 両平面双対タイリング折紙のくさび形。底面: 赤い角錐底面の乗っている面。頂辺: 緑の辺。台形側面: 頂辺を含む面。頂角: 青い矢印が示す台形側面のなす角度。(c) 両平面双対タイリング折紙のトラス構造は上下からくさび形が噛み合わさった構造をしている。

### 3.1 くさび形への分解

両平面双対タイリング折紙をより小さな構成単位に分解することを考える。両平面双対タイリング折紙の折り状態には上下面に平行四辺形グリッドがある。図 3.1 (a) のトラス構造から四辺形グリッドの列に沿って角錐の列を取り出し、間の四面体を加えることでくさび形の構造を切り出すことができる。図 3.1 (b) に示すこの構造をくさび形と呼ぶこととする。角錐底面の列はくさび形の底面を作る。くさび形の底面に接していない緑の辺をくさび形の頂辺と呼ぶこととする。頂辺を挟む二つの台形の面をくさび形の台形側面と呼ぶこととする。くさび形内部で二つの台形側面のなす角度を頂角と呼ぶこととする。両平面双対タイリング折紙のトラス構造はくさび形が上下から噛み合うように接続されたものと見なすことができる。

双対タイリング折紙を柱面に一般化するためには、図 3.2 (b) のように異なるくさび形を接続できればよい。噛み合わせるくさび形の上下で頂角が異なるとき、双対タイリング折紙の上下面は台形側面を挟んで曲がる。こうした複数のくさび形を組み合わせた双対タイリング折紙を柱面双対タイリング折紙と呼ぶこととする。

### 3.2 くさび形の接続条件

異なるくさび形はトラス構造と展開図の双方で接続される必要がある。図 3.2 のように両平面双対タイリング折紙のくさび形の一つを選び、頂角が異なるものに置き換えることを考える。底面を赤く示したくさび形が (a) から (b) に変化するとき、変化後のくさび形は、元のくさび形の台形側面が頂辺周りで回転したものである。この回転によって、くさび形の底面は頂辺に垂直、即ち図 3.1 の辺  $AD$  に垂直な方向に伸び縮みする。

次に展開図 (c), (d) の変化を見る。くさび形の展開図は二つの太線に挟まれた領域である。置き換えたくさび形について、両側のくさび形は変化しないので、太線が描く二本のポリラインの形状は変化せず、相対位置が平行移動で変化している。図 3.2 の (c), (d) の置き換え前後の角錐領域に注目した図 3.3 を見る。一方の太線のポリラインを固定する、即ち点  $A, D, P, Q$  を固定する。前段落で述べた通り、角錐底面は辺  $AD$  に垂直に伸び縮みする。よって点  $B'$  は点  $B$  を通り  $AD$  垂直な青い直線の上にある。また角錐の稜線の長さは変化しないので、切り開いた稜線  $BQ, B'Q$  の長さは等しくなければならない。よって点  $B'$  は点  $B$  を通り点  $Q$  を中心とする青い円の上にある。以上より、点  $B'$  は青い直線と円の交点として作図される。点  $A, B', D, P, Q$  が定まれば、太線のポリラインを  $B$  から  $B'$  へ平行移動することで角錐領域全体を作図することができる。点  $B'$  を用いた角錐によるくさび形を元のくさび形と入れ替えることで双対タイリング折紙を曲げることができる。

図 3.3 の点  $B$  を含む元の角錐領域が与えられたとき、円と直線の交点の性質から  $B$  と異なる点  $B'$  は高々一つ存在する。一方、点  $B'$  を用いた角錐領域からは元の角錐領域

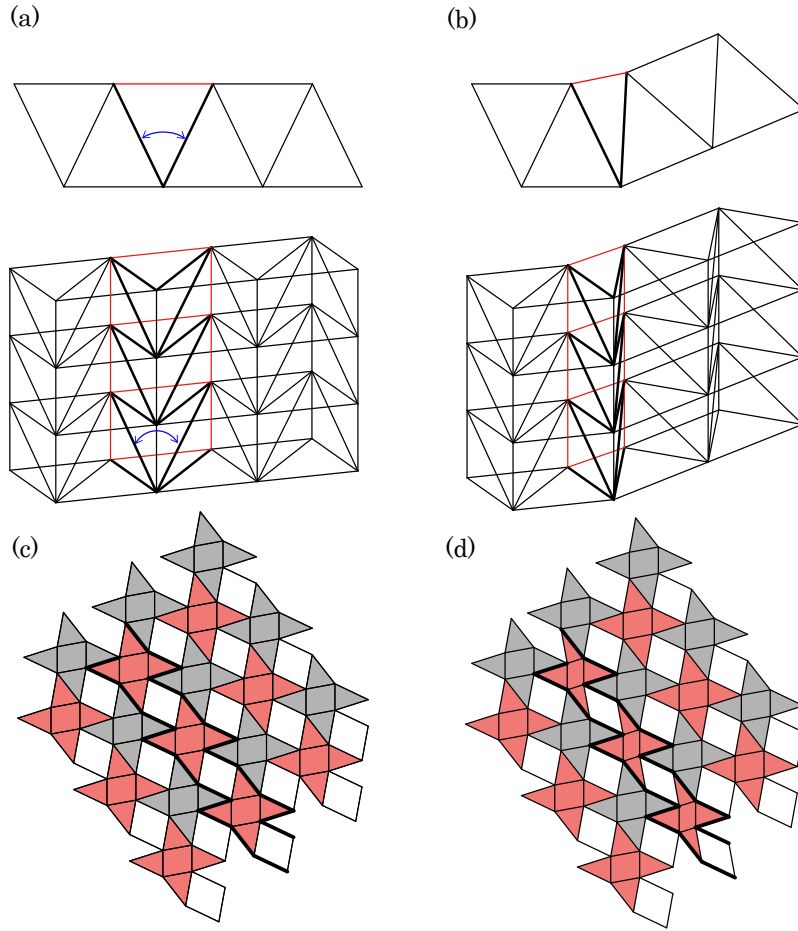


図 3.2 両平面双対タイリング折紙の一つのくさび形を異なるくさび形に置き換える。(a) 元の両平面双対タイリング折紙のトラス構造。(b) 置き換え後のトラス構造。(c) 元の両平面双対タイリング折紙の展開図。(d) 置き換え後の展開図。置き換えるくさび形は太い黒線に挟まれた部分である。

が作図される。このくさび形のペアはトラス構造においても展開図においても境界が一致するので交換可能だが、その他のくさび形をこれらと接続することはできない。

### 3.2.1 角錐が作図される条件

この節では角錐領域が作図可能な条件と、作図された角錐領域が真に角錐の展開図である条件を明らかにする。図 3.3 において点  $A$  を原点とし、ベクトル  $\overrightarrow{AD}$  を  $y$  座標の正の向きとする座標系を導入する。三角形  $ADP$  が平行四辺形  $AB'C'D$  と重ならないためには、点  $B'$  は  $AD$  より右側、即ち  $B'_x > 0 = A_x$  でなければならない。作図より  $Q_x = (B_x + B'_x)/2$  なので、 $Q_x > B_x/2$  であることが必要十分条件である。これは次と同値である：

$$0 < \angle DAB < \frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

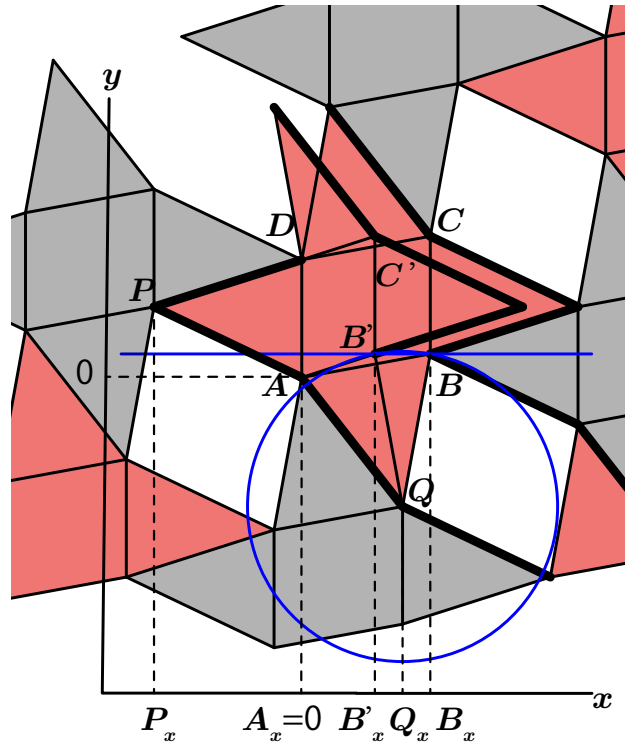


図 3.3 くさび形を変化させる際、一つの角錐領域を拡大したもの。点  $B$  を含む元の角錐領域から点  $B'$  を含む角錐領域が作図される。

$\angle DAB = \pi/2$  のとき、 $B' = A$  となり、作図される角錐は 2.4.1 節のように縮退する。この場合については 3.4.3 節で議論する。

同様に三角形  $AQB'$  が平行四辺形  $AB'C'D$  と重ならない条件を考える。二つの面が重なるのは  $Q_y/Q_x > B'_y/B'_x$  のときである。元の角錐領域を表すパラメータ  $k, \theta, h$  について、この条件を  $B'_x = 2Q_x - B_x$  と  $B'_y = B_y$  に注意して表したものが図 3.4 である。図 3.4 の通り、角錐領域のパラメータ  $k, \theta, h$  で四面体条件を満たすもので二つの面が重なっている場合、 $\theta \geq \pi/2$  である。そのため三角形  $ADP$  が平行四辺形  $AB'C'D$  と重ならない条件の式 (3.1) を満たすならば三角形  $AQB'$  も平行四辺形  $AB'C'D$  と重ならない。

次に、角錐領域の星形が角錐の展開図である条件を確認する。一般に、図 3.5 のような  $2n$  角形の星形を折って角錐になるための必要十分条件は、Abel ら [1] より、次の三つを満たすことである：

1. 任意の  $i$  に対し二辺  $p_i c_i$  と  $p_i c_{i+1}$  の長さが等しい。
2. 任意の  $i$  に対し  $c_{i+1}$  から線分  $p_i p_{i+1}$  に下した垂線が一点  $R$  で交わる。
3. 角錐側面となるべき三角形  $p_i c_{i+1} p_{i+1}$  に対し、底辺  $p_i p_{i+1}$  からの距離は点  $R$  よ



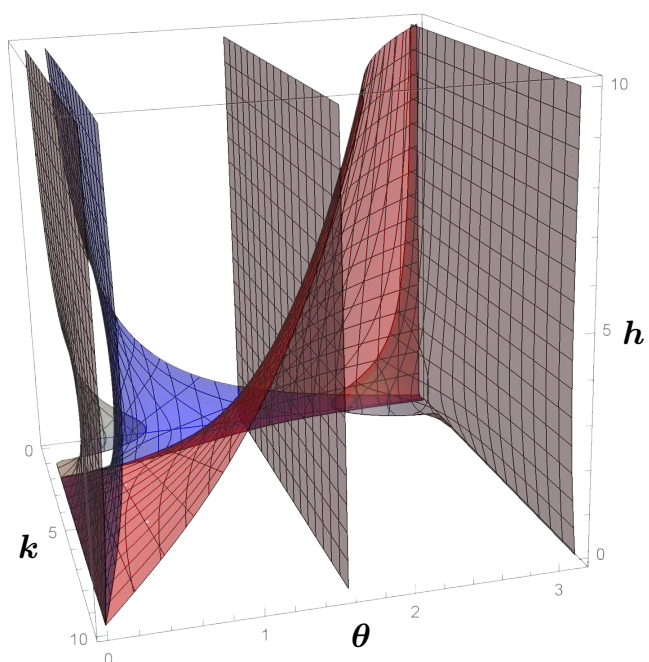


図 3.4 元の角錐のパラメータについて、赤と青の曲面の間で四面体条件が成立する。灰色の三つの曲面について、左の曲面の外側と、右と中央の曲面の間で、作図された角錐領域で三角形  $AQB'$  が平行四辺形  $AB'C'D$  と重なる。灰色の面の中央は  $\theta = \pi/2$  の平面である。

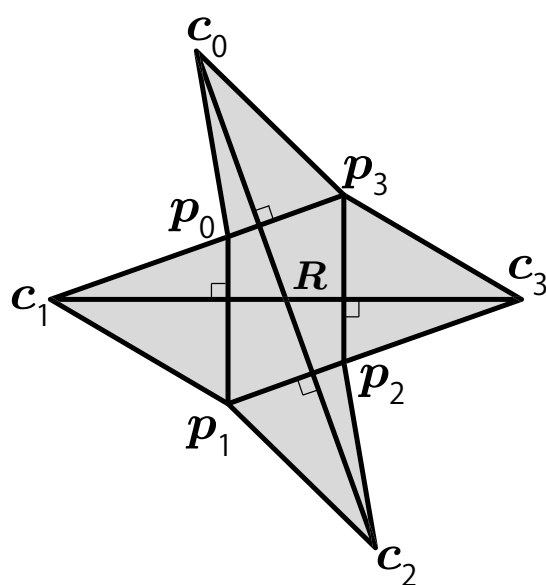


図 3.5 角錐の展開図である星形。

り点  $c_{i+1}$  の方が遠い。

ただし  $i = n - 1$  のとき、 $i + 1 = 0$  とする。図 3.3 において、角錐稜線が切り開かれた辺の長さは変わらないため、最初の条件は成り立つ。

二つ目の条件も以下の証明により成り立つ。

証明. 元の角錐領域が真に二回転対称な角錐の展開図とする。二点  $B, D$  の中点を  $R$  とする。点  $R$  は切り開かれた頭頂点  $P, Q$  から底辺  $AD, AB$  に下した垂線の交点である。よって二辺  $AB$  と  $QR$  は垂直である。即ち、

$$B_x(Q_x - R_x) + B_y(Q_y - R_y) = 0. \quad (3.2)$$

点  $B'$  は点  $B$  を通り  $AD$  に垂直な直線の上にあるので、点  $B'$  の座標は係数  $\alpha$  を用いて  $B'(\alpha B_x, B_y)$  と表される。二点  $B', D$  の中点を  $R'$  とすると、 $R_x = B_x/2, R'_x = \alpha B_x/2$  である。 $R'_y = R_y$  より二辺  $PR'$  と  $AD$  は垂直である。円と直線の交点における鏡映対称性から、 $Q_x = (1 + \alpha)B_x/2$  である。以上より、ベクトル  $\overrightarrow{AB'}$  と  $\overrightarrow{QR'}$  の内積は、

$$\begin{aligned} & B'_x(Q_x - R'_x) + B'_y(Q_y - R'_y) \\ &= B'_x(Q_x - R'_x) - B_x(Q_x - R_x) \\ &= \alpha B_x((1 + \alpha)B_x/2 - \alpha B_x/2) - B_x((1 + \alpha)B_x/2 - B_x/2) \\ &= \alpha B_x^2/2 - \alpha B_x^2/2 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

したがって  $AB'$  と  $QR'$  は垂直である。□

最後の条件は  $A_x - P_x \geq (B'_x - A_x)/2$  で表される。 $B'_x = 2Q_x - B_x$  を代入して、

$$B_x \geq 2Q_x + 2P_x - 3A_x. \quad (3.4)$$

したがって、角錐の展開図から 3.2 節の手続きで作図された角錐領域が真に角錐の展開図であるための必要十分条件は、元の角錐領域が二つの不等式 (3.1) と (3.4) を満たすことである。ただし図 3.3 の元の角錐において辺  $BQ$  と  $AD$  が平行のとき、青い直線と円は一点  $B$  で接する。 $B'$  と  $B$  が同一の点となるのでくさび形は合同であり、異なるくさび形を接続することはできず表裏面は平面になる。

### 3.2.2 柱面双対タイリング折紙の存在条件

3.2.1 節の不等式 (3.1) と (3.4) が満たされたならば、次に 2.2 節の非交差条件、角錐条件、四面体条件を確かめる。非交差条件はくさび形を置き換えても自己交差を生まないもので、構成から自明に成り立つ。角錐領域に破れがないことも構成から明らかなので、角錐条件は角錐領域同士に重なりがないことである。両平面双対タイリング折紙のときと同様に、後述する四面体条件を満たすときに角錐条件のうち角錐領域同士は重ならない。

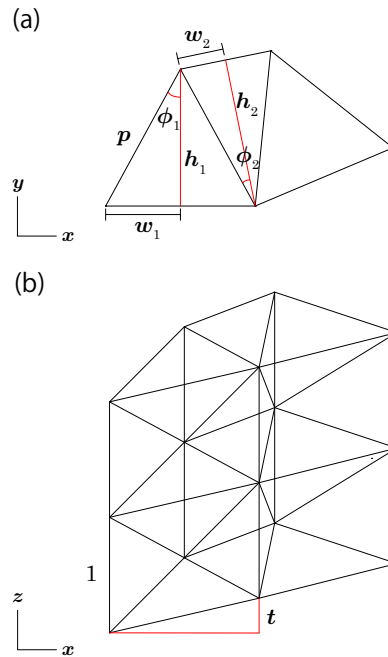


図 3.6 くさび形のペアのパラメータ。(a) くさび形を頂辺方向に投影した図。(b) 左のくさび形の底面に垂直に投影した図。

柱面双対タイリング折紙の四面体条件は、二種類のくさび形 1 および 2 に含まれるそれぞれ合同な四面体部分について、トラス構造での四面体と展開図の四面体領域の対角頂点の距離を比較した不等式である。特にくさび形 1 のみ、または 2 のみを接続した柱面双対タイリング折紙は両平面双対タイリング折紙になるので、不等式はそれぞれのくさび形に含まれる角錐のパラメータ  $k_i, \theta_i, h_i$  ( $i = 1, 2$ ) を式 (2.1), (2.2) に代入したものである。以上より四面体条件は、二種類のくさび形に対する二つずつの不等式、合計四つの不等式となる。

以上より、両平面双対タイリング折紙から柱面双対タイリング折紙を構成できるための条件は、元の角錐領域が (3.1) と (3.4) を満たし、かつ二種類のくさび形それぞれから両平面双対タイリング折紙を考えて、それぞれ (2.1), (2.2) を満たすことである。

### 3.3 柱面双対タイリング折紙のデザインパラメータ

トラス形状を表すパラメータの中から、柱面双対タイリング折紙の形状を編集するために新たにパラメータを選択する。3.2 節の通り、柱面双対タイリング折紙には最大二種類のくさび形が用いられる。くさび形のペアは互いを作図できるので、一方が定まるともう一方も定まる。図 2.6 に示した通り、くさび形の基になる角錐のパラメータは  $k, \theta, h$  の三つであった。くさび形のペア、ひいては柱面双対タイリング折紙を表現するためのパラメータは、接続順を除いて三つである。

相似形を無視するため、図 3.1 の辺  $DA$  の長さを 1 とする。図 3.6 のように、異なる

種類のくさび形にそれぞれ 1, 2 の番号を付け、頂角の半分を  $\phi_1, \phi_2$  とする。隣接するくさび形が異なる種類のとき、くさび形の底面のなす角度を曲がり角度と呼ぶこととする。曲がり角度は  $|\phi_1 - \phi_2|$  で表される。例として図 3.6 のように細いくさび形 2 が太いくさび形 1 に挟まれているとする。くさび形 1 のどちらかとかくさび形 2 の底面のなす角度は  $|\phi_1 - \phi_2|$  であり、二つのくさび形 1 同士の底面のなす角度は、二回曲がっているので  $2|\phi_1 - \phi_2|$  である。

上下面について、角錐の底面はくさび形を繋げていくと頂辺方向にずれていく。これは柱面双対タイリング折紙を構成するくさび形のペアにおいて一定である。<sup>\*1</sup>この距離を  $t$  とおき、シフト量と呼ぶこととする。

くさび形の残りの寸法や角度は  $\phi_1, \phi_2, t$  から計算できる。図 3.6 (a) において、二等辺三角形の斜辺の長さを  $p$  とすると、くさび形の幅  $2w_1, 2w_2$  高さ  $h_1, h_2$  は

$$w_1 = p \sin \phi_1, \quad w_2 = p \sin \phi_2, \quad (3.5)$$

$$h_1 = p \cos \phi_1, \quad h_2 = p \cos \phi_2. \quad (3.6)$$

で表される。ここで  $p$  は後述の連立方程式から求められ、(3.8) によって  $\phi_1, \phi_2, t$  で表される。

展開図を描くための座標を記す。図 3.3 に 3.2.1 節と同様に点  $A$  を原点、ベクトル  $\overrightarrow{AD}$  を  $y$  座標の正の向きとする座標系を導入する。頂点  $B, B'$  が表れる角錐領域を、それぞれくさび形の頂角が  $2\phi_1, 2\phi_2$  であるとして、各頂点の座標は以下ようになる：

$$B = (2w_1, t), \quad B' = (2w_2, t), \quad D = (0, 1), \quad P = \left(-p, \frac{1+t}{2}\right), \quad Q = (w_1 + w_2, q), \quad (3.7)$$

ここで  $p, q$  は図 3.3 において  $|AQ| = |AP|$  と  $|BQ| = |PD|$  を連立して、

$$p = \frac{t}{2 \sin \phi_1 \sin \phi_2} \sqrt{1 + \frac{2}{t} \sin \phi_1 \sin \phi_2 - \sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2}, \quad (3.8)$$

$$q = \frac{1+t}{2} - \frac{2w_1 w_2}{t} \quad (3.9)$$

と求められる。この座標によって描かれる角錐領域について  $B_y = B'_y$  と  $|BQ| = |B'Q|$  を満たすので、図 3.3 より破れなく並べることができる。四面体領域の形状はそれぞれの角錐領域を両平面双対タイリング折紙のように二方向の平行移動で並べることで決定する。

### 3.3.1 解空間

3.3 節におけるパラメータについて柱面双対タイリング折紙の存在条件を明らかにする。存在条件は 3.2.1 節の不等式 (3.1), (3.4) と二種類のくさび形それぞれによる両平面

<sup>\*1</sup> 図 3.3 において  $B_y = B'_y$  であることからわかる。

双対タイリング折紙の四面体条件 (2.1), (2.2) であった。しかしこの節では二つの角錐を同時にデザインするため、条件を今一度確認する必要がある。即ち、角錐領域が真に角錐展開図であることを確認する必要がある。また計算上式 (3.8) において辺の長さ  $p$  が正の実数値をとらないことがある。

式 (3.7) を用いて角錐領域を描くためには、 $p$  が実数で 0 より大きくなければならない。定義より  $0 < \phi_1, \phi_2 < \pi/2$  として、 $p > 0$  であるための条件は

$$t > 0 \wedge t(-1 + \sin^2 \phi_1 + \sin^2 \phi_2) < 2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \quad (3.10)$$

である。

ここで  $t > 0$  とは不等式 (3.1) における  $0 < \angle DAB < \pi/2$  に相当する。ただし  $\angle DAB = \pi/2$ 、即ち  $t = 0$  のときはゼロ除算が起こるが、 $\phi_1 > \phi_2$  としたとき  $\phi_2 = 0$  ならば  $\sin \phi_2/t$  をある正の実数値とみなすことで正の実数  $p$  を得ることができる。この場合については 3.4.3 節で議論する。 $t$  が式 (3.10) の右を等式として満たすときは  $p = 0$  となるため不適である。

$p > 0$  となるパラメータによって角錐領域のペアを描くことができたなら、それぞれが真に角錐の展開図であることを確かめる。 $p, q$  は図 3.3 において  $AQ = AP$  と  $BQ (= B'Q) = PD$  を連立して解いて得たものである。よって角錐に折った時に同一稜線となる辺の長さは一致している (図 3.1 と図 3.3 を見比べよ)。次に、角錐領域の回転中心  $R_1, R_2$  を、それぞれ点  $B, B'$  と  $D$  との midpoint として与える。このとき星形の山である点  $P, Q$  と  $R_1$  をつないだ線分は角錐底面に当たる辺  $AD, AB$  とそれぞれ垂直である。計算すると、ベクトルの内積は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR_1} \cdot \overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix} w_1 + p \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \overrightarrow{QR_1} \cdot \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -w_2 \\ \frac{2w_1w_2}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2w_1 \\ t \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$B'$  と  $R_2$  についても同様に  $\overrightarrow{PR_2} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{QR_2} \cdot \overrightarrow{AB'} = 0$  である。また  $p > w_1, w_2$  より  $P$  は  $AD$  に対して  $R_1, R_2$  よりも遠い。以上より二つの角錐領域は真に角錐の展開図である。3.2.1 節の不等式 (3.4) は  $p > 0$  のとき  $p > w_1, w_2$  より満たされている。

残りの条件は四面体条件である。展開図を描き四面体領域の対角線の長さを調べると、四面体条件は次のようになる:

$$(p \mp (w_1 - w_2))^2 + \left(t + \frac{2w_1w_2}{t}\right)^2 \geq ((w_1 + w_2) \pm (w_1 - w_2))^2 + t^2 \quad (3.11)$$

$$(-p \mp (w_1 - w_2))^2 + \left(1 - \frac{2w_1w_2}{t}\right)^2 \geq 1 \quad (3.12)$$

プラスマイナス記号は添え字 1 のくさび形については上段、添え字 2 のくさび形については下段を用いる。

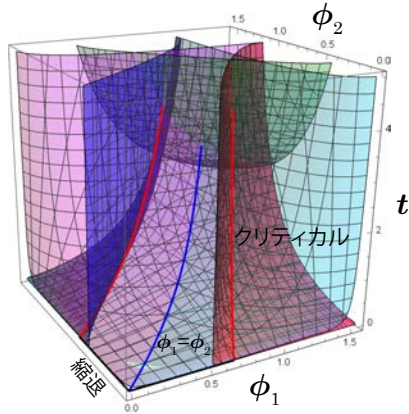


図 3.7 柱面双対タイリング折紙の存在条件である不等式の等号が成立する面。赤・マゼンタ:  $\phi_1$  のくさび形の四面体条件。青・シアン:  $\phi_2$  のくさび形の四面体条件。緑:  $p > 0$  となる条件。赤い曲線は赤とシアンまたは青とマゼンタの面の交線。青い曲線はマゼンタとシヤンの面の交線。解空間内の  $t = 0$  の部分では一方のくさび形が縮退する。

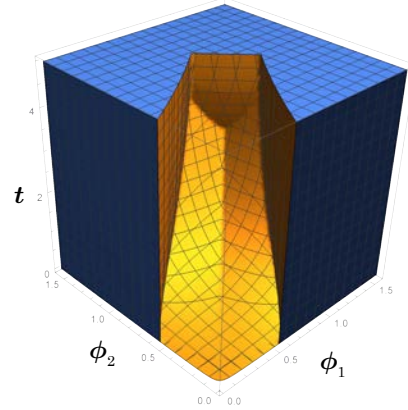


図 3.8 柱面双対タイリング折紙が構成されるパラメータの解空間。図の空隙の領域で双対タイリング折紙の存在条件を満たす。

パラメータ  $\phi_1, \phi_2, t$  が角錐領域の条件 (3.10) を満たし、四面体条件 (3.11) と (3.12) を満たすとき、柱面双対タイリング折紙が構成される。これらの不等式を満たすパラメータの解空間を図 3.7 と図 3.8 に示した。図 3.7 の赤とマゼンタの面はくさび形 1 の四面体条件であり、それぞれ (3.11) と (3.12) のプラスマイナス記号の上段の等号が成立するパラメータを表している。図 3.7 の青とシヤンの面はくさび形 2 の四面体条件であり、それぞれ (3.11) と (3.12) のプラスマイナス記号の下段の等号が成立するパラメータを表している。図 3.7 の緑の面は (3.10) 右で等号が成立するパラメータを表している。柱面双対タイリング折紙の存在条件を満たすパラメータは図 3.8 の空隙の領域である。

解空間内において、 $t > 0$  で  $\phi_1 = \phi_2$  のとき二種類のくさび形は合同となる。このときくさび形は一種類なので表裏面は平面であり、両平面双対タイリング折紙しか作ることができない。ただし  $\phi_1 \neq \phi_2$  であるパラメータは柱面の表裏面を作ることができるが、一種類のくさび形のみを使用することで両平面双対タイリング折紙を作ることもしできる。

二種類の四面体領域が共に四面体条件をクリティカルに満たすパラメータは三つの曲線となる。図 3.7 の青い曲線はマゼンタとシヤンの四面体条件をクリティカルに満たすパラメータである。この曲線は  $\phi_1 = \phi_2$  の平面に乗っており、両平面双対タイリング折紙しか作ることができない。

二種類の四面体条件を共にクリティカルに満たすパラメータのその他の曲線は、図 3.7 で赤く示される、赤とシヤンの面または青とマゼンタの面の交線である。 $\phi_1$  と  $\phi_2$  は交代可能であり、解空間も  $\phi_1 = \phi_2$  の面で対称になっている。そこで代表して  $\phi_1 > \phi_2$  で

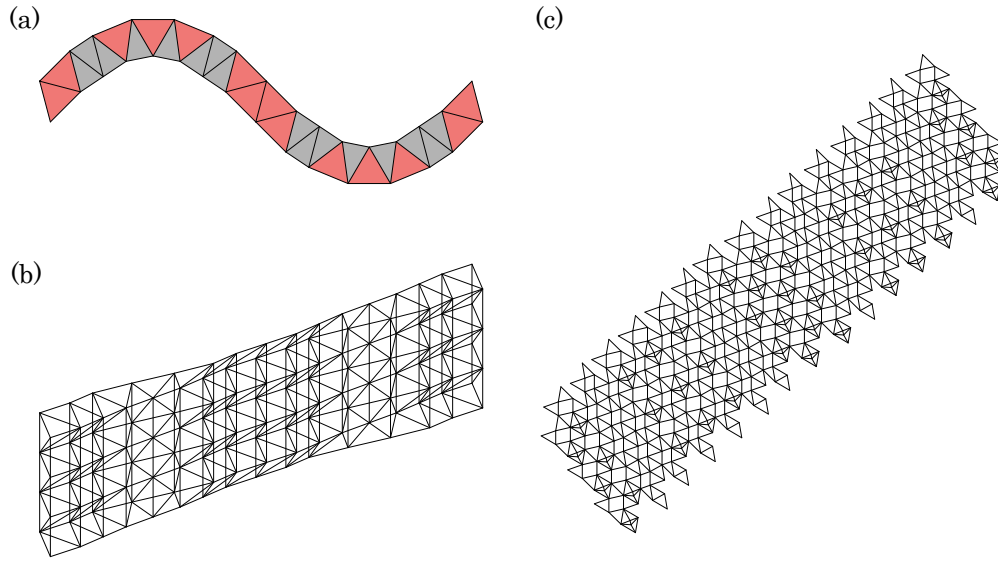


図 3.9 波型曲面を作る柱面双対タイリング折り紙。 $\phi_1 \simeq 0.528429, \phi_2 \simeq 0.332079, t = \frac{1}{4}$  である。(a) 頂辺方向の視点。(b) 頂辺に垂直な視点。(c) 展開図。

ある、赤とシアン面の交線について考える。交線の方程式は (3.11) の上段と (3.12) の下段を連立して、

$$\sin \phi_2 = -1 + \sin \phi_1 + \sin^2 \phi_1, \quad (3.13)$$

$$t = \frac{\sin \phi_2}{\sin \phi_1 - \sin \phi_2}. \quad (3.14)$$

### 3.4 デザイン戦略と結果の例

3.3 節のパラメータ  $\phi_1, \phi_2, t$  を用いてインタラクティブに形状を編集するシステムを、CAD ソフトウェア *Rhinoceros* 上のグラフィカルプログラミングエディター *grasshopper* で構成した。このシステムでは与えられたパラメータ値が存在条件を満たすかどうかを判定し、条件を満たすものについてトラス形状と展開図を描画する。

さらにこのシステムは  $\phi_1 > \phi_2$  を仮定のもと、次の逆問題を解くことができる：

1. 与えられた  $\phi_1 - \phi_2$  と  $t$  から図 3.7 の赤またはシアンの四面体条件をクリティカルに満たす  $\phi_1, \phi_2$  をニュートン法で求める。
2. 与えられた  $\phi_1$  から図 3.7 の赤とシアンの四面体条件を共にクリティカルに満たす  $\phi_2, t$  を式 (3.13), (3.14) を解いて求める。

二種類のくさび形 1 と 2 は任意の順番で接続することができる。形状編集システムでは  $\phi_1, \phi_2, t$  を与えた後、くさび形を接続していく際の添え字の数列を与えることで柱面の形状を編集することができる。例えば、二種類のくさび形を交互に 1212... と繋げる

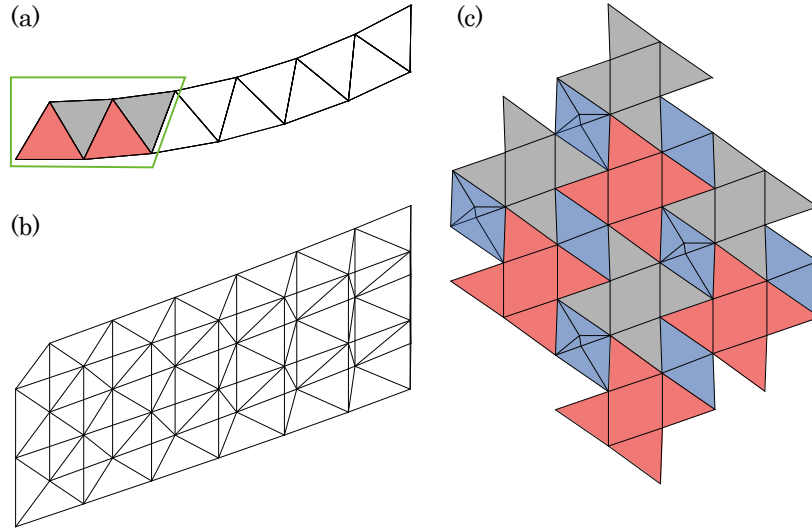


図 3.10 大小 72 列ずつのくさび形で閉じる双対タイリング折紙。 $\phi_1 \simeq 0.534928, \phi_2 \simeq 0.491295, t = \frac{1}{3}$  である。(a) 頂辺方向の視点。(b) 頂辺に垂直な視点。(c) (a) において緑枠で囲んだ部分の展開図。

と図 3.10 のように円柱を粗く近似した柱面ができる。図 3.11 では 111222 を繰り返すことで先の順番より緩やかに曲がる柱面を作っている。図 3.9 では 112221212122211 を繰り返す順番で波型の柱面を作っている。表裏面の柱面を頂辺方向に投影した折れ線について、各線分の長さは  $w_1$  または  $w_2$  の偶数倍であり、隣り合う線分のなす角度は曲がり角度  $|\phi_1 - \phi_2|$  またはその 2 倍である。くさび形を定めると曲がり角度は一つに定まるが、折り状態の大域的な曲率はくさび形を並べる順番で離散的に調整できる。理論上  $\phi_1 \simeq \phi_2$  かつ  $w_1$  と  $w_2$  を十分小さくとれば任意の曲線を任意の精度で近似できるが、表裏の柱面の面積に対するくさび形の数が非常に大きくなり、必要なシートの面積が大きくなるため実用的ではない。

以降この節では、実際にデザインをする際に参考となる特殊な例とその性質を説明する。

### 3.4.1 表面が緩やかに曲がる例

$\phi_1 = \phi_2$  のとき二つのくさび形は合同となり、双対タイリング折紙の上下面は平坦なものしか作ることができない。図 3.7 の通り、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  は異なる値で好きなだけ近づけることができる。したがって柱面双対タイリング折紙の曲がり角度はいくらでも小さくすることができる。図 3.10 は曲がり角度が小さいものの中で、一方の四面体条件をクリティカルに満たすものである。曲がり角度は  $|\phi_1 - \phi_2| = \pi/72$  である。二種類のくさび形を交互に 72 列ずつ並べ、計 144 列のくさび形を繋げると一周して 72 角柱の上下面を作る。このような例は円筒に近い形状を作る折紙コアパネルとして期待される。



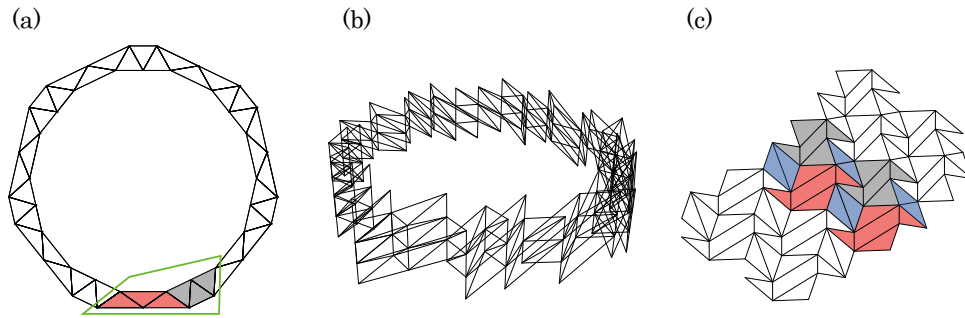


図 3.11 14 角柱を作る双対タイリング折紙。  $\phi_1 \simeq 0.958378$ ,  $\phi_2 \simeq 0.509579$ ,  $t \simeq 1.4762$  である。(a) 頂辺方向の視点。(b) 頂辺に垂直な視点。(c) (a) において緑枠で囲んだ部分の展開図。

### 3.4.2 閉じた角柱を作る例

くさび形のパラメータと並べ方によっては表裏面として閉じた角柱を作ることができる。ここで言う閉じた角柱とは、くさび形を並べて一周して戻ってきたときに、台形側面が一致するだけでなく、内部のパターンも一致することである。このとき展開図も閉じた柱面に描くことができる。

閉じた角柱を作ることができる条件は、曲がり角度が整数  $n$  を用いて  $\pi/n$  で表され、シフト量が有理数のときである。上記の条件において閉じる角柱を作るくさび形の並べ方の一例を示す。整数  $n, p, q$  を用いて、曲がり角度を  $\pi/n$ , シフト量を  $p/q$  とする。くさび形 1 とくさび形 2 を交互に並べたとき、計  $2n$  列で上下面がループを作り  $n$  角柱となる。柱面が一周する間に、くさび形は頂辺方向に  $np/q$  だけシフトしている。頂辺方向の角錐の辺の長さは 1 なので、 $np/q$  が整数ならば一周したトラス構造の頂点が一致する。図 3.9 において  $\phi_1 - \phi_2 = \pi/16$  かつ  $t = 1/4$ 、図 3.10 においては  $\phi_1 - \phi_2 = \pi/72$  かつ  $t = 1/3$  なので上記の性質を満たす。いずれも二種類のくさび形 1, 2 を 1212... と並べることで閉じた角錐を作ることができる。 $np/q$  が整数ではない有理数  $r$  のとき、一周にかかるくさび形を増やすことで閉じる角柱面を作ることができる。 $q$  が奇数のとき、二種類のくさび形を  $q$  列ごとに切り替える。 $q$  が偶数のとき、くさび形 1 は  $q+1$  列、くさび形 2 は  $q-1$  列で切り替える。いずれの場合も、 $2nq$  列で一周しシフト量の合計は  $np$  となる。図 3.7 において  $n \geq 5$  であれば  $|\phi_1 - \phi_2| = \pi/n$  なるパラメータが存在するので、 $2n$  角柱の表面を持つ柱面双対タイリング折紙が存在する。

$n$	5	6	7	8	9
$\phi_1$	0.716498	0.857028	0.958378	1.03468	1.09414
$t$	0.154858	0.763589	1.4762	2.29495	3.2209

表 3.1 図 3.7 における赤とシアンの方の交線上で曲がり角度  $\pi/n$  となるときの  $\phi_1$  と  $t$ 。

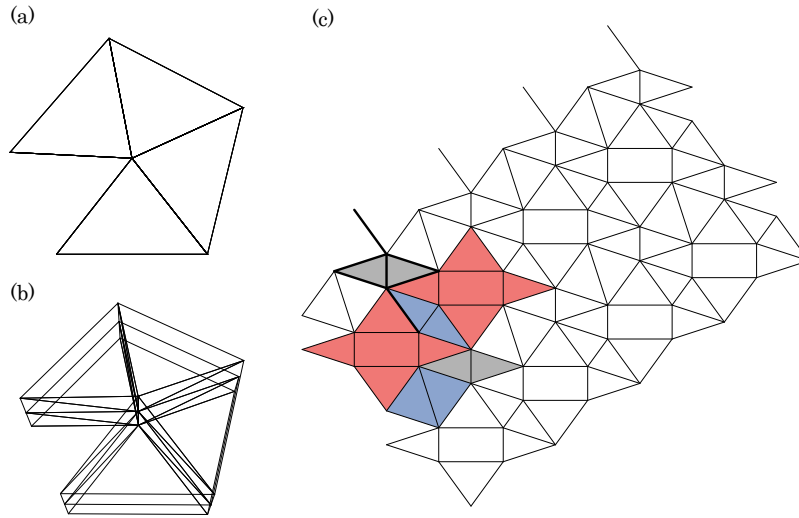


図 3.12 一方の角錐が縮退する双対タイリング折紙。黒い太線が潰れた角錐である。 $\phi_1 = \sin^{-1} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\phi_2 = 0, t = 0$  である。(a) 頂辺方向の視点。(b) 頂辺に垂直な視点。(c) 展開図。

閉じた角錐を作る双対タイリング折紙で二つの四面体条件をクリティカルに満たすものは存在するだろうか。パラメータの満たすべき条件は、等式 (3.13), (3.14) かつ  $\phi_1 - \phi_2 = \pi/n, t = p/q$  である。ここで  $n, p, q$  は整数である。(3.13), (3.14) を満たす図 3.7 の右の赤い曲線において、 $n$  のとりうる値は 5, 6, 7, 8, 9 である。それぞれの  $n$  に対し、 $\phi_1$  と  $t$  を *Wolfram Mathematica* で数値計算すると、表 3.1 のようになる。これらの  $t$  は有理数ではないと思われるが、閉じた角柱面を作る柱面双対タイリング折紙を近似することは考えられる。図 3.11 に示す  $n = 7$  の場合について、表 3.1 より精度を上げて計算すると  $21t \simeq 31.0000991837564$  である。よって図 3.11 のように太いくさび形と細いくさび形を三列ごとに切り替えて接続することで 42 列で一周し、近似的に上下面の 14 角柱に四辺形グリッドを作る柱面双対タイリング折紙を作ることができる。

### 3.4.3 くさび形が縮退する例

図 3.3 において元の角錐底面を長方形、即ち  $\angle DAB = \pi/2$  とする。このとき作図される角錐は底面と一方の側面の対が線分に縮退する。即ち、 $B'$  が点  $A$  に一致する。このとき 2.4.1 章同様、縮退したくさび形を用いて双対タイリング折紙を考えることができる。

元の角錐を表すパラメータ  $k, \theta, h$  について、この場合は  $\theta = \pi/2$  に相当する。デザインパラメータ  $\phi_1, \phi_2, t$  を用いると、この場合は  $\phi_1 > \phi_2$  として、 $t = 0$  かつ  $\phi_2 = 0$  に相当する。前者のパラメータでは  $k, h$  の二自由度、後者のパラメータでは  $\phi_1$  の一自由度に見えるが、後述のように  $p$  が一意に定まらず自由度が追加される。 $t = 0$  のとき式 (3.8) の中で分母が 0 の項が存在する。正の実数  $k$  について  $\phi_2 = kt$  を満たしながら

$t \rightarrow +0$  の極限をとると  $\sin \phi_2/t \rightarrow k$  となるので、 $t = 0$  かつ  $\phi_2 = 0$  の状態を  $t \neq 0$  かつ  $\phi_2 = kt \neq 0$  の状態の極限と見なす。こうすることで

$$p = \frac{1}{2k \sin \phi_1} \sqrt{1 - \sin^2 \phi_1 + 2k \sin \phi_1} \quad (3.15)$$

となる。任意の  $0 < \phi_1 < \pi/2$  に対し  $k$  を変化させると、この  $p$  は任意の正の実数値をとる。

デザインパラメータ  $\phi_1$  を固定し  $p$  を変化させたとき、図 3.12 (a) の三角形は相似形を保つ。このとき (b) の長さ 1 の辺との長さの比が変化する。よって  $p$  を変化させると、縮退しないくさび形に含まれる角錐の、長方形底面の縦横比が変化する。

図 3.12 は一方のくさび形が縮退する双対タイリング折紙のうち、二種類の四面体条件をクリティカルに満たすものである。このパラメータは図 3.7 の赤線と黒線の交点であり、(3.13), (3.14) に  $t = 0$  を代入して、

$$\phi_2 = 0, \quad (3.16)$$

$$\sin \phi_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (3.17)$$

$\sin \phi_1$  は黄金比の逆数である。<sup>\*2</sup>四面体条件をクリティカルに満たすという条件から、式 (3.11) のプラスマイナス記号を上段を用いたものに代入して、

$$k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad p = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{(-1 + \sqrt{5})^2} \quad (3.18)$$

である。くさび形の台形側面に乗っている角錐側面の内角は  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$  と  $\pi/5$  の倍数であるが、曲がり角度は  $\phi_1 \simeq 38.17^\circ$  なので閉じた角錐を作ることはできない。

<sup>\*2</sup> 著者はこの双対タイリング折紙を黄金双対タイリング折紙と呼んでいる。

## 第4章

# 両平面双対タイリング折紙の剛体折り解析

この章では主に両平面双対タイリング折紙における剛体折り変形可能性の判定方法について議論する。連続的な折り変形において、折り目以外が歪まず、平面を保ち続けるものを剛体折りと言う。ある折紙が展開状態から折り状態まで剛体折りによって移りあえることを剛体折り可能と呼ぶこととする。

4.1 節では剛体折りの数学的モデルとそれによる数値シミュレーションの研究を紹介する。また特殊な場合の剛体折り可能な折紙の設計方法を紹介する。4.2 から 4.4 節では両平面双対タイリング折紙をフレームとモジュールというパーツに分離し、それぞれの剛体折りについて議論する。ここでフレームとモジュールの変形をそれぞれの境界に着目した配置空間内で表す。4.5 節ではフレームとモジュールの配置空間内での変形可能領域を比較し、展開状態から折り状態までを連結する共通領域の有無により両平面双対タイリング折紙の剛体折り可能性を判定する方法を示す。4.6 節では上記の結果を基に、剛体折り可能な両平面双対タイリング折紙を得やすい折り目パターンの設計方法を議論する。

### 4.1 剛体折りに関する先行研究

#### 4.1.1 剛体折りモデル

剛体折りの自由度解析や変形シミュレーションの基礎となるモデルとして、大きくトラスモデルと角度モデルの二つが用いられている。

トラスモデルは折り目や境界辺をピン接合された梁と見なし、三次元空間内で梁の長さを固定し、頂点の振る舞いを評価する。三角形の形状は辺の長さから一意に定まるが、四角形以上の面は辺の長さでは形状が定まらない。これを防ぐため、例えば四角形面には二つの対角線の長さを保つという条件を追加する\*1。五角形以上についても対角線を

---

\*1 同じ四角形の二つの対角線  $d_1$  と  $d_2$  に長さの拘束が与えられたとしても、 $d_1$  を折り目とする微小な折り変形において  $d_2$  の長さの変化は無視されうる。 $d_1$  を折り目とする微小な折り変形を防ぐためには、

拘束とするが、形状を定めるための対角線の選び方が複数考えられる。全体で  $V$  個の頂点と  $E$  本の辺から成るパターンに追加の  $E'$  本の対角線拘束が与えられたとする。このとき剛体折りの自由度 (Degree of freedom) は理論上  $\text{DOF} = 3V - (E + E') - 6$  となる。自由度が正のとき実際に剛体折りが可能であり、0 以下のときには理論上剛体折りでは変形しない。Schenk ら [30] や 館の Freeform origami [34] はトラスモデルにより剛体折り変形を扱っている。

角度モデル [5] は三次元空間内で面の形状を固定し、面の間折り目の折り角度を評価する。シート内部で折り目の端点が集まっている点を内部頂点と言う。ただし一つの内部頂点に集まる折り目が三本以下のとき、頂点周りで局所的に剛体折りできないため各内部頂点には折り目は四本以上集まっていることとする。 $n$  角形のシートに  $V_{\text{in}}$  個の内部頂点と  $E_{\text{in}}$  本の折り目から成るパターンが与えられたとする。内部頂点ごとに三つ拘束があるため、剛体折りの自由度は一般に  $\text{DOF} = E_{\text{in}} - 3V_{\text{in}}$  となる。特にシートが折り目により三角形分割されているとき、剛体折り自由度が  $n - 3$  であることが知られている [33, 32]。館の Rigid origami simulator [33, 32] は角度モデルにより剛体折り変形を扱っている。

#### 4.1.2 変形シミュレーションと剛体折り可能な折紙の設計

多くの場合、先述の折り目と頂点の数による剛体折りの自由度が正のとき剛体折り変形され、0 以下の時は変形しない。両平面双対タイリング折紙は繰り返しが多いとき理論上の自由度は負である。しかしミウラ折りは計算上の自由度が負であるにも関わらず、その対称性から一自由度で剛体折りされる。そのため折紙の剛体折り可能性は理論上の自由度計算では不十分であり、数値シミュレーションによって推定する方法が用いられている。しかし両平面双対タイリング折紙では一般に四面体領域の内部の折り目は自由であり、数値シミュレーションにより剛体折り可能なものを探すためにはそれぞれの折り目に対しシミュレーションしなければならない。剛体折り可能な双対タイリング折紙をデザインするためには、設計したパターンが剛体折り可能であることを簡便に判定することが求められる。

剛体折り可能な折紙の設計手法として、剛体折り可能であることが保証されたパターンの族を作り、その中でデザインするものがある。館 [32] はミウラ折りと折り目のトポロジーが同じパターンについて、平坦折り状態とその他平坦でない変形状態が一つ存在すれば剛体折り可能であることを示した。館の Freeform Origami はこれを利用し、ミウラ折りと折り目のトポロジーが等しい既存の剛体折りモデルの変形状態について、形状に変更を加えたとき平坦折り可能なように自動で修正することで剛体折り可能性を保証している。

また形状の一部から周りの形状が連鎖的に決定されるような折り目パターンにおいて

---

$d_1$  周りの折り角度  $\theta_1$  を与え、 $\theta_1 = 0$  という拘束を追加する必要がある。ただしこの追加拘束は後述の剛体折りの自由度には影響しない。

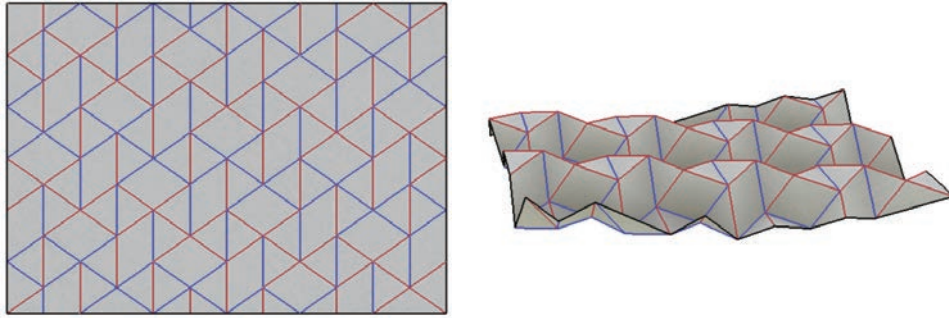


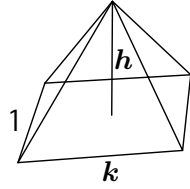
図 4.1 四面体領域がクリティカルな両平面双対タイリング折紙。Freeform origami [34] による剛体折りシミュレーション。左: 展開図。右: 変形途中。角錐底面が対角線を折り目として曲がっている。

は、剛体折りの挙動を解析することが可能である。4.1.1 節の通り、四角形境界のシートが折り目で三角形分割されているとき、剛体折り自由度は 1 となる。例えば四角形の頂点から内部の一点に折り目が伸びたパターンは一自由度で剛体折り可能であり、局所的に見ると折り目が四本集まった内部頂点周りでは多くの場合一自由度で剛体折り可能である。この段落の以下で紹介する例では折り目が四本集まる内部頂点が一列に並んでおり、ある内部頂点周りでの一自由度の剛体折り挙動が隣の内部頂点周りの一自由度剛体折り挙動を決定している。Demaine ら [10] は正方形を折り、外周を与えられた空間四辺形に合わせる折り目パターンを解いた。特に一つの折り目パターンで、異なる折り状態で二つの空間四辺形境界を満たすものを得ることができる。宮寫ら [24] は空間四辺形の変形を近似する非可展な剛体折りを提案し、穴の開いた折紙構造に当てはめることでわずかな部材の歪みのみで変形する筒や閉多面体を作成した。周りの構造の二つの折り状態について境界部分が一致し、その間の変形状態についても境界形状ができるだけ近いものを探索している。本章ではこれらの四辺形境界を持つ剛体折りのデザインを双対タイリング折紙の剛体折り可能性の判定に応用する。

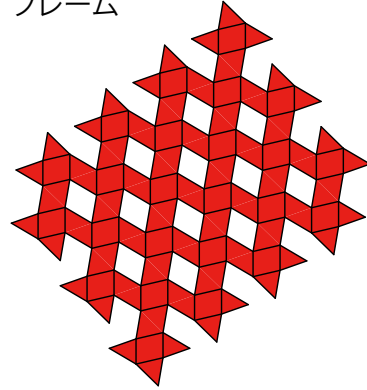
## 4.2 フレームとモジュール

両平面双対タイリング折紙の折り目パターンは、基準となる二回転対称な四角錐のパラメータ  $k, \theta, h$  (図 2.6 を参照) と四面体領域内部の折り目から定まる。そのうち四面体条件をクリティカルに満たす  $k, \theta, h$  については四面体領域内部の折り目は一本の対角線に一意に定まる。この場合の一例では、図 4.1 のように角錐底面が対角線で折られる必要がある。即ち、図 4.1 の例では双対タイリング折紙は剛体折り不可能、または折り目を追加することで剛体折り可能である。四面体条件をクリティカルに満たしていない  $k, \theta, h$  については四面体内部の折り目パターンは不定であり、折り目の本数や位置の異なるものが無数に考えられる。またそれぞれの四面体領域に異なる折り目パターンを与えることもできる。四面体領域内部の折り目パターンを定めるとシミュレーションにより

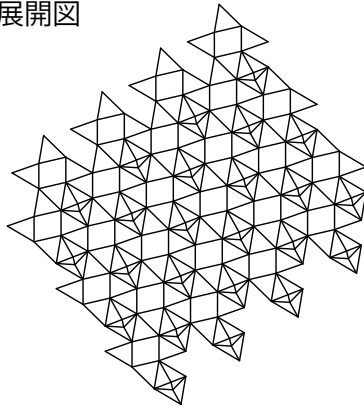
単位四角錐



フレーム



展開図



モジュール

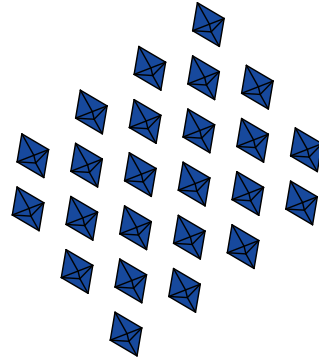


図 4.2 両平面双対タイリング折紙のフレームとモジュール

剛体折り可能性を判定できるが、そのためには無数の折りパターンに対する試行錯誤が必要になる。

四面体領域の様々な折り目パターンの中、全体が剛体折り可能なものを探すために、変形挙動の詳細を示し、剛体折りできないものについてその原因を明らかにすることを考える。図 4.2 のように両平面双対タイリング折紙の折り目パターンから四面体部分を取り除いた網目構造をフレーム、四面体領域をモジュールと呼ぶこととする。フレームの折り目パターンは  $k, \theta, h$  から定まる。モジュールは  $k, \theta, h$  から外周の四角形が定まるが、内部の折り目パターンは定まっていない。  $k, \theta, h$  から定まるフレームと、さらに折り目パターンを与えたモジュールについてそれぞれある剛体折りがあって、それぞれの変形におけるフレームとモジュールの境界部分の形状が常に一致しているならば全体が剛体折り可能である。

### 4.3 フレームの変形

両平面双対タイリング折紙のパラメータ  $k, \theta, h$  はトラス構造の形状を定める。トラスに含まれる角錐を展開し、2.2 節のように平行移動で並べたものが図 4.2 のフレームである。ここで角錐側面の接続部は展開状態と折り状態で折り角度 0 なので、途中状態で

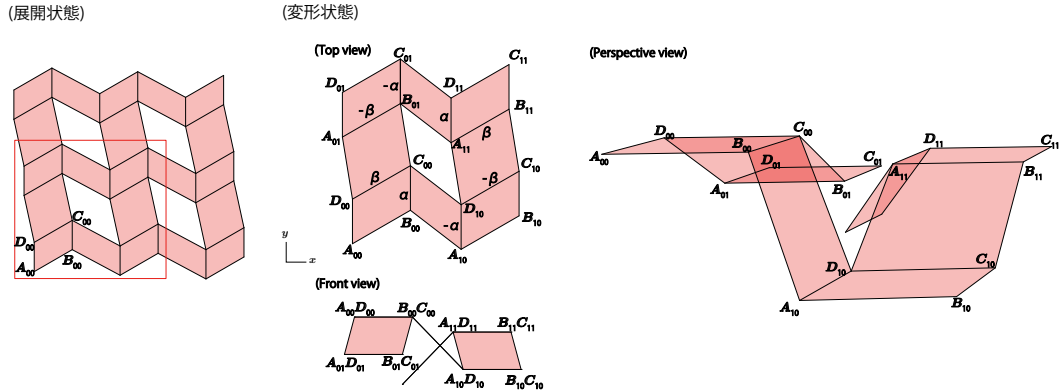


図 4.3 二つの折り角度  $\alpha, \beta$  によるフレームの折り変形。右は展開図の赤枠内のループを折ったもの。辺  $B_{01}C_{01}$  が切れてしまう。

も折り角度が 0 であると仮定し、折り目を除外している。

### 4.3.1 対角線の折り目を追加したフレームの剛体折り

この節では角錐底面の対角線に折り目を追加してフレームの二自由度剛体折りを構成する。折り目を追加しない場合は付録 A で議論する。付録 A の結論だけを述べると、折り目を追加しない場合は剛体折りのためには二種類の異なるモジュールが必要であり、一方のモジュールの剛体折り挙動からもう一方のモジュールの剛体折り挙動が決定される。しかし現在の研究ではモジュールの剛体折り挙動を完全にはコントロールできず、与えられた剛体折り挙動をするモジュールをデザインすることはできない。そのため、以降モジュールは一種類であることとする。

フレームの折り目にも対称性が高いものを仮定する。図 4.3 において、折り目を辺  $C_{00}B_{00}$  に平行なものと辺  $D_{00}C_{00}$  に平行なものの二つのグループに分ける。そして二つのグループにおける全ての折り角度の絶対値がそれぞれ  $\alpha, \beta$  であることとする。このとき角錐底面  $A_{00}B_{00}C_{00}D_{00}$ ,  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$ ,  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ ,  $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$  は常に平行である。次に直交座標系を、 $A_{00}$  を原点、ベクトル  $\overrightarrow{B_{00}C_{00}}$  方向が  $y$  座標の正の方向、ベクトル  $\overrightarrow{A_{00}B_{00}}$  と  $\overrightarrow{A_{00}D_{00}}$  の外積が高さ、即ち  $z$  座標の正の方向となるようにとる。折り角度が  $\alpha, \beta$  で図 4.3 のように表されるので、 $A_{10x} - B_{00x} = A_{11x} - B_{01x}$ ,  $A_{10y} - B_{00y} = A_{11y} - B_{01y}$  である。しかし  $\alpha$  と  $\beta$  を自由にとると、図 4.3 のように  $A_{10z} - B_{00z} \neq A_{11z} - B_{01z}$  となる。ループが閉じるためには、角錐底面  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  と  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$  の高さが等しくなるように  $\alpha$  と  $\beta$  の組を指定しなければならない。図 4.3 で角錐底面  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  と  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$  の高さは負であり、最小値はそれぞれ  $\alpha$  または  $\beta$  が  $90^\circ$  のときにとる。この最小値はそれぞれの角錐底面と  $A_{00}B_{00}C_{00}D_{00}$  をつなぐ平行四辺形の高さ、即ち角錐側面の三角形の高さのマイナスである。平行四辺形底面の角錐について、二種類ある側面の三角形の高さは角錐底面が菱形でないとき、即ち  $k \neq 1$  のとき異なる。 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  が  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$



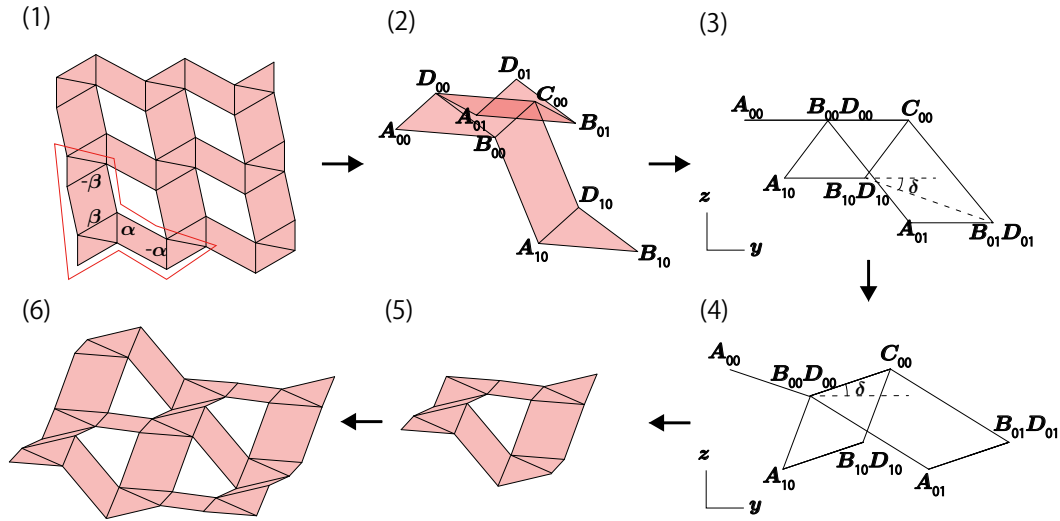


図 4.4 角錐底面に対角線の折り目を追加した場合の変形状態の構成手順。(1) 展開図。(2) 赤枠で囲まれたループの半分を折り角度  $\alpha, \beta$  で折る。(3) 対角線  $B_{00}D_{00}$  方向へ投影する。(4) 対角線  $B_{00}D_{00}$  で  $\delta$  回転させ  $B_{10}D_{10}$  と  $B_{01}D_{01}$  の高さを揃える。(5) ループのもう半分を接続することができる。(6) 折り状態。

より小さい最小値をとると仮定すると、 $\alpha = 90^\circ$  で  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  が最小値をとった状態では  $\beta$  がどのような値をとっても  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  と  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$  の高さを揃えることはできない。即ち底面が菱形でないとき、平行な折り目を同じ絶対値の折り角度で折る方法では折り状態まで剛体折りすることはできない。

底面が菱形でない平行四辺形であるような角錐によって両平面双対タイリング折紙を剛体折りするため、角錐底面に対角線の折り目を追加する。前段落のように折り目をその方向で二種類に分け、それぞれの折り角度の絶対値が  $\alpha, \beta$  であるような途中状態を考える。図 4.4 の (2) はループの半分を折り角度  $\alpha, \beta$  で折ったものである。これを対角線  $B_{00}D_{00}$  方向に投影すると図 4.4 の (3) のようになる。ループの半分を  $B_{00}D_{00}$  周りに回転させることで対角線  $B_{01}D_{01}$  と  $B_{10}D_{10}$  の高さを合わせることができる。新たに  $D_{00}$  を原点、ベクトル  $\overrightarrow{D_{00}B_{00}}$  方向を  $x$  軸の正の方向、(2) でベクトル  $\overrightarrow{A_{00}B_{00}}$  と  $\overrightarrow{A_{00}D_{00}}$  の外積を  $z$  軸の正の方向とした直交座標系を取る。(4) での回転角度  $\delta$  は  $x$  軸周りに  $\tan \delta = -(B_{01z} - B_{10z}) / (B_{01y} - B_{10y})$  で計算される。ただし、

- $B_{01z} > B_{10z}$  かつ  $B_{01y} < B_{10y}$  のとき  $0 < \delta < \pi/2$ 。
- $B_{01z} > B_{10z}$  かつ  $B_{01y} > B_{10y}$  のとき  $\pi/2 < \delta < \pi$ 。
- $B_{01z} < B_{10z}$  かつ  $B_{01y} > B_{10y}$  のとき  $-\pi < \delta < -\pi/2$ 。
- $B_{01z} < B_{10z}$  かつ  $B_{01y} < B_{10y}$  のとき  $-\pi/2 < \delta < 0$ 。
- $B_{01z} = B_{10z}$  かつ  $B_{01y} < B_{10y}$  のとき  $\delta = 0$ 。
- $B_{01z} > B_{10z}$  かつ  $B_{01y} = B_{10y}$  のとき  $\delta = \pi/2$ 。
- $B_{01z} = B_{10z}$  かつ  $B_{01y} > B_{10y}$  のとき  $\delta = \pi$ 。

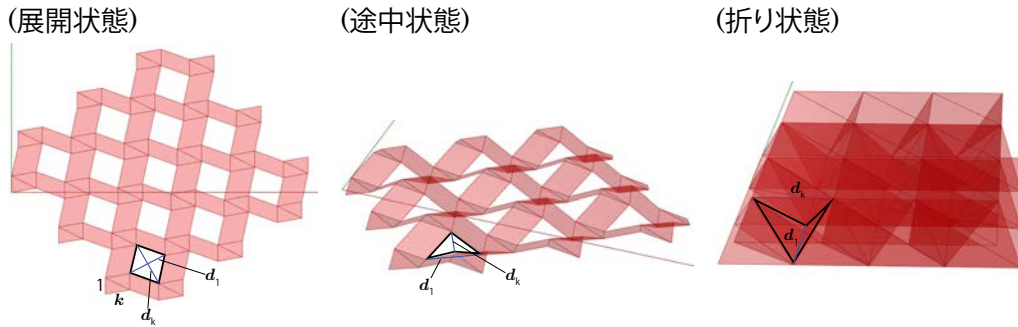


図 4.5 フレームの剛体折りと境界の空間四辺形形状

- $B_{01z} < B_{10z}$  かつ  $B_{01y} = B_{10y}$  のとき  $\delta = -\pi/2$ 。

とする。このときループのもう半分を  $z$  軸周りに  $180^\circ$  回転させたものが接続できる。 $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$  と  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  を見ると、それぞれ対角線  $B_{01}D_{01}$  と  $B_{10}D_{10}$  で折れている。ループを上下を反転させ重ねるなどの操作で図 4.4 (6) のようにフレーム全体の形状が得られる。まとめると、任意の  $\alpha, \beta$  に対し対角線の折り角度  $2\delta$  が存在して、フレームの剛体折り挙動を構成することができる。ただしこの変形において自己交差は考慮されていない。また  $B_{01z} = B_{10z}$  かつ  $B_{01y} > B_{10y}$  の周りで  $\delta$  が不連続な値をとるが、 $\delta = +\pi$  と  $\delta = -\pi$  での回転が等しいため、フレームの変形状態は連続である。

### 4.3.2 境界形状に注目したフレームの変形状態の表現

両平面双対タイリング折紙のパラメータ  $k, \theta, h$  を定めると、フレームの展開状態が得られる。このフレームにおいて角錐底面を同じ方向の対角線で折ることで、 $\alpha, \beta$  の二自由度の剛体折りが可能となる。図 4.5 について、空間四辺形の隣接しない頂点の間の距離は折り状態において角錐底辺である 1 または  $k$  となる。変形途中でのそれぞれの距離を  $d_1, d_k$  とする。境界の空間四辺形と隣接しない頂点を結ぶと四面体になる。空間四辺形の辺長は変化しないため、 $d_1, d_k$  と合わせて四面体の辺長が決定され、このとき四面体形状は鏡像を除き一意に決定される。よってフレームとモジュールの境界形状は  $d_1, d_k$  による配置空間で表すことができる。 $\alpha, \beta$  を展開状態から折り状態まで変化させたとき、 $d_1, d_k$  をプロットすると図 4.6 のようになる。グラフの濃い部分では  $d_1, d_k$  は等しいため境界形状は等しいが、図 4.7 のように  $\alpha, \beta$  の組は異なっている。

## 4.4 モジュールの変形

モジュールは展開状態で平行四辺形であり、4.1.1 節の議論により剛体折り可能ならば三角形分割されていて一自由度である。また境界は途中状態で空間四辺形であるため、隣接していない頂点間の距離  $d_1, d_k$  による配置空間によって剛体折り変形の各状態を表

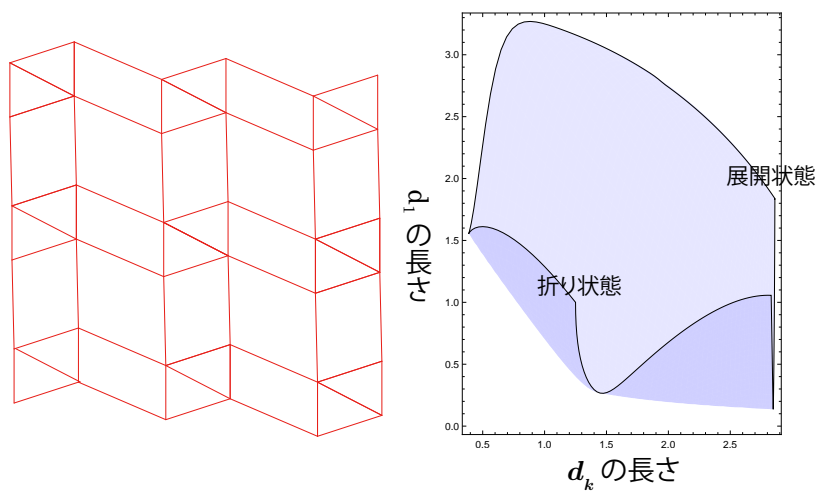


図 4.6  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$  の両平面双対タイリング折紙における境界形状の変形可能領域。左はフレームの展開図。

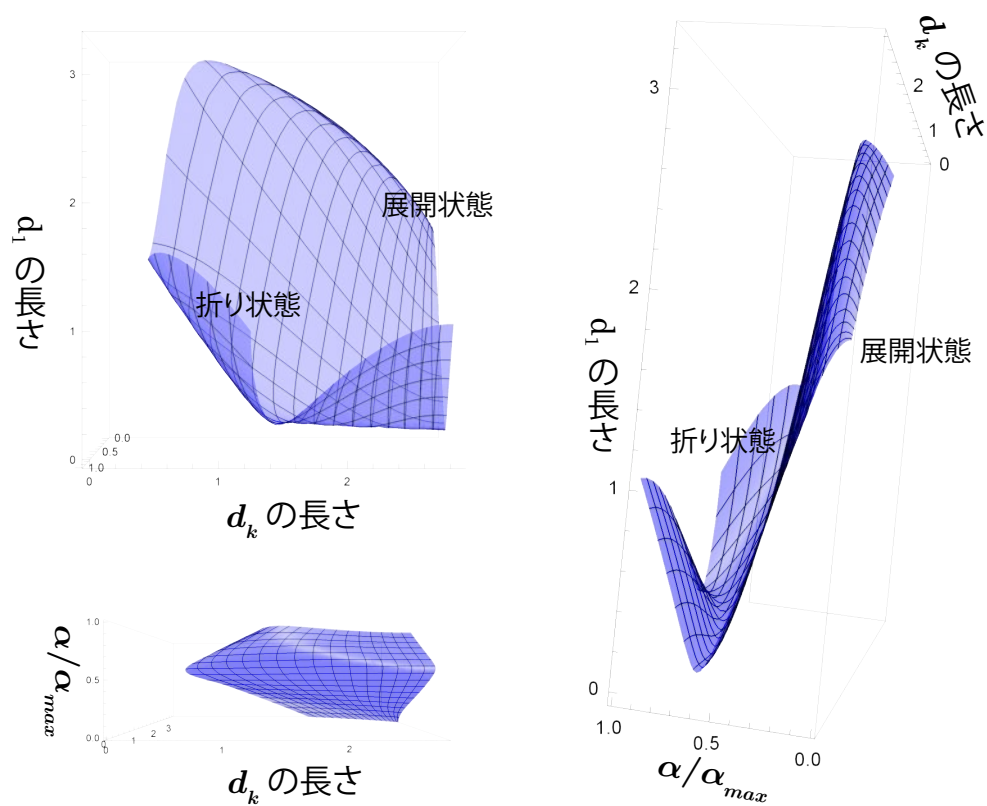


図 4.7 図 4.6 に折り角度  $\alpha/\alpha_{max}$  の軸を加えたもの。  $\alpha$  の軸は角錐を作るまで折る角度  $\alpha_{max}$  で割り 0 から 1 の範囲を動く。

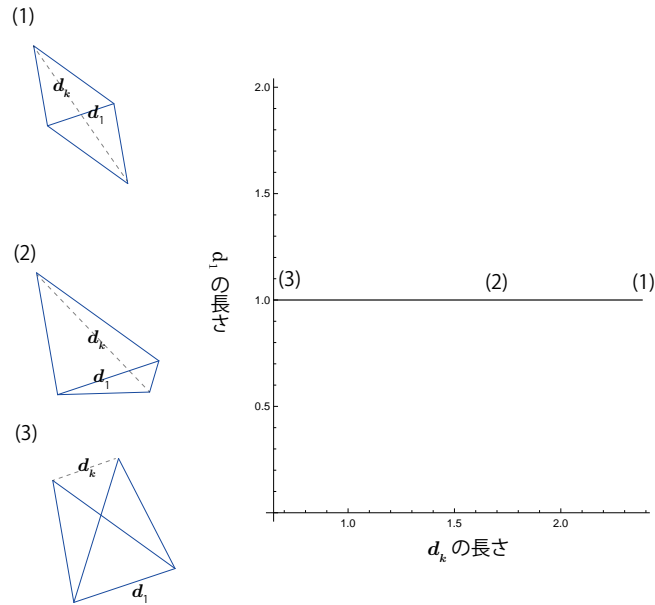


図 4.8 対角線で折られるモジュール。  $(k, \theta, h) = (1.3, \pi/3, 0.998153)$ 。折り目の対角線の長さは変化しない。(1) 展開図 (2) 途中状態 (3) 平坦に畳まれた状態

すことができる。

以降ではいくつかの例について剛体折りの挙動を解説する。

■**対角線折り** モジュールの四角形を対角線で折るときは剛体折りである。図 4.8 のように平行四辺形  $ABCD$  の対角線  $AC$  を折り目とすると、二点  $A, C$  の距離  $d_1$  と二点  $B, D$  の距離  $d_k$  をプロットしたとき  $d_1$  軸に平行な直線となる。

■**翼折り** 翼折り [17] を剛体折りするためには二段階に分けて折る必要がある。まず図 4.9 で  $d_1$  に対応する対角線で平坦に折る。その後残りの折り目で折ると  $d_1$  は小さくなり、 $d_k$  は大きくなる。翼折りの変形の変形可能領域は図 4.9 のように r 字を倒したような曲線を描く。

■**Pleated Hyperbolic Paraboloid** Pleated hyperbolic paraboloid [8] は正方形の紙で鞍型の曲面を表現する折り紙である。図 4.10 のように入れ子になった正方形の頂点をまず中央の正方形を除いて対角線で結び、次に三角形分割して折り目を作る。Demaine ら [8] は二種類の三角形分割について剛体折り挙動を調べている。二種類で中央の正方形の対角線での折り角度が取りうる範囲に違いがあるものの、三角形分割の方法には複数種類が考えられる。これを一般の凸四角形に適用すると、図 4.11 のように内部頂点を好きなだけ増やして四角形を一自由度で折ることができる。第 0 階を除き、内部頂点の位置を変化させることで途中状態での外周形状を変化させることができる。正方形の第 1 階については Demaine ら [10] らが、ある状態で与えられた外周形状に一致する折り目パターンを解析的に解いている。図 4.12, 4.13 は平行四辺形モジュールの第 2 階について、折

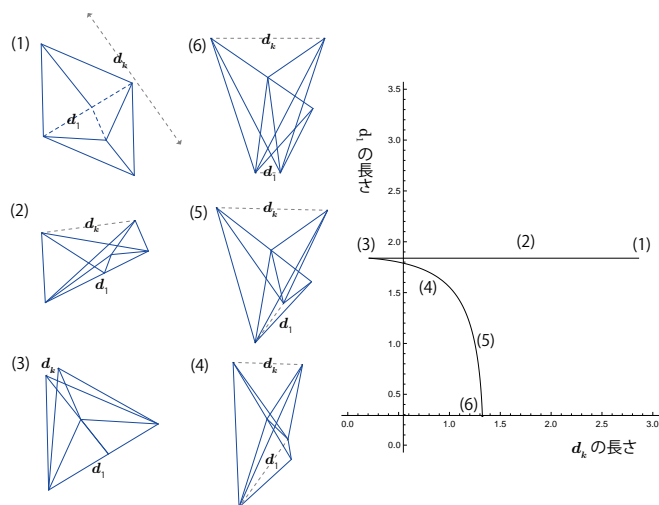


図 4.9 翼折りモジュール [17]。  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$ 。(1) 展開図 (2)  $d_1$  に対応する対角線で折った途中状態 (3) 対角線で平坦に畳まれた状態 (4) 全ての折り目を折りながら  $d_k$  を大きくするように開いた状態 (5) 両平面双対タイリング折紙の折り状態 (6) 全ての折り目を用い平坦に畳まれた状態

展開図

折り状態

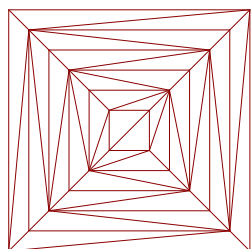


図 4.10 Pleated hyperbolic paraboloid [8]

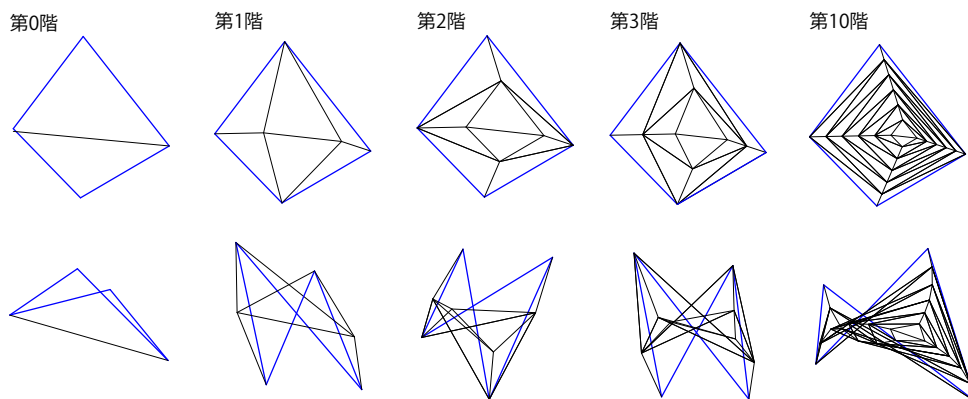


図 4.11 Pleated hyperbolic paraboloid を基にした一自由度の剛体折りモジュール。右に進むにつれ三角形面が増える。上段: 展開図。下段: 変形状態。

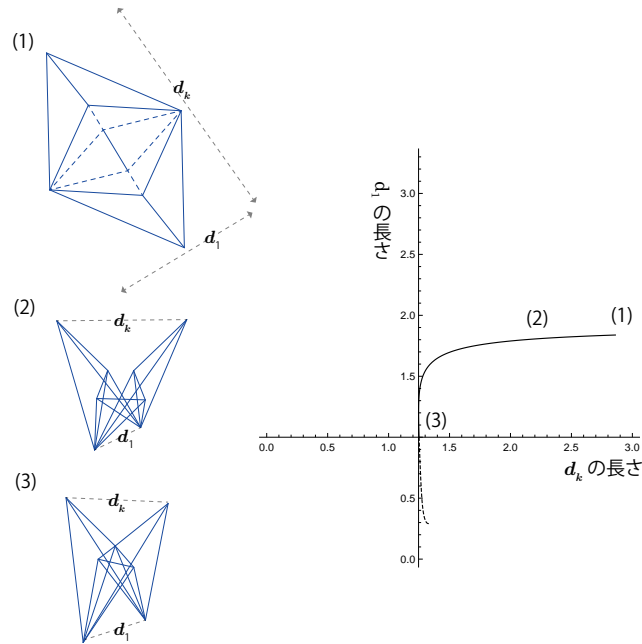


図 4.12 Pleated hyperbolic paraboloid を基にしたモジュール。 $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$ 。(1) 展開図 (2) 途中状態 (3) 折り状態

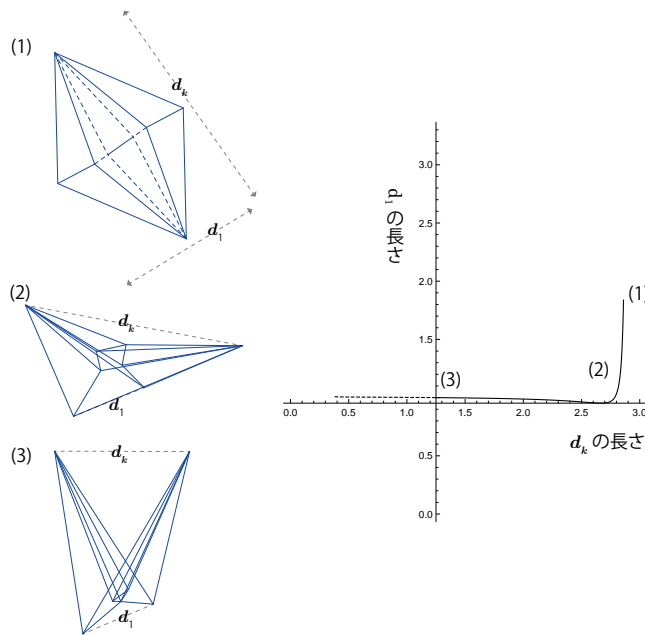


図 4.13 図 4.12 と異なる Pleated hyperbolic paraboloid を基にしたモジュール。 $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$ 。(1) 展開図 (2) 途中状態 (3) 折り状態

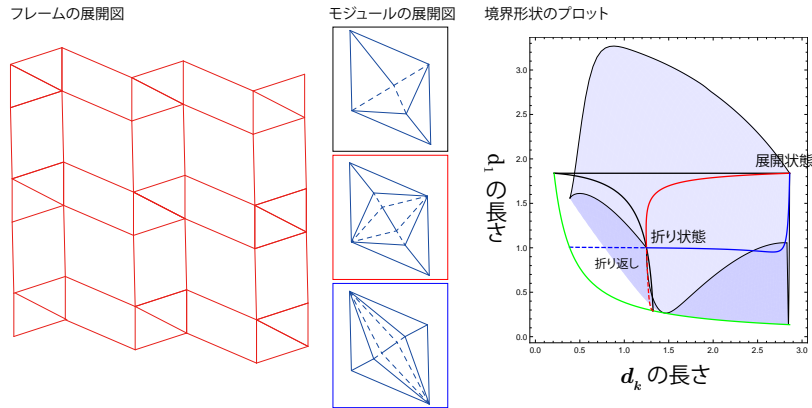


図 4.14  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$  の両平面双対タイリング折紙におけるフレームとモジュールの剛体変形の変形可能領域の比較。青い領域: フレームの変形可能領域。黒・赤・青の曲線: 各色の枠に囲まれた折り目を持つモジュールの変形可能領域。緑の曲線: 境界の空間四辺形が同一平面上に縮退した状態。

り状態で両平面双対タイリング折紙のトラス構造内で対応する空間四辺形部分に一致するように折り目パターンを数値的にとぎ、変形挙動の変形可能領域を表したものである。

## 4.5 両平面双対タイリング折紙の剛体折り判定

両平面双対タイリング折紙のフレームとモジュールが一体となって剛体折りされるためには、それぞれの境界部分の形状が一致することが必要である。フレームの二自由度の剛体折り挙動はパラメータ  $k, \theta, h$  から定まるが、モジュールの一自由度剛体折り挙動は内部の折り目パターンによって変化する。モジュールの挙動がフレームの挙動と整合的かどうかを判定することで、全体の剛体折り可能性が判定できる。図 4.14 左はパラメータ  $(k, \theta, h) = (1.5, 0.4\pi, 1.5)$  に対するフレームと、折り目を与えたモジュールである。 $d_1, d_k$  による二次元配置空間内でそれぞれの境界部分の状態の変形可能領域を重ねると図 4.14 右のようになる。両平面双対タイリング折紙が剛体折りできるためには、フレームとモジュールの変形可能領域の共通部分において展開状態から折り状態に至る経路が存在することが必要条件である。ここで十分条件でないのは、自己交差が起こりうるためである。

$d_1, d_k$  と  $\alpha/\alpha_{\max}$  による三次元の配置空間において、図 4.7 の通り、フレームの変形可能領域には  $d_1, d_k$  が等しい、即ち境界形状が同一であるが変形状態が異なる部分が存在する。これは投影図である図 4.14 において領域が折り返して重なったように表現される。重なった二枚の層を移りあうためには、二種類の形状が一致する部分を通らなければならない。二つの層が重なっている部分の外周をとると、各層の変形状態が一致する部分が存在する。この部分を折り返し部分と呼ぶこととする。図 4.14 の折り返し部分は、フレームの変形可能領域における折り重なった部分の外周で、黒線のない部分である。展開状態と折り状態のフレームは変形可能領域の異なる層に存在しているため、モジュー

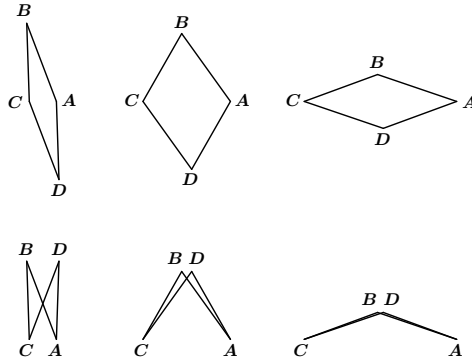


図 4.15 モジュールの境界である四辺形  $ABCD$  の平面内での変形。上段中央は  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$  の両平面双対タイリング折紙におけるモジュールの展開状態での境界。下段は上段をそれぞれ対角線  $AC$  で折り返したもの。上下段どちらの変形でも、右へ行く程  $A, C$  間の距離が大きくなり、 $B, D$  間の距離は小さくなる。

ルの変形可能領域は折り返し部分を通る必要がある。また図 4.14 においてモジュールの変形可能領域がフレームの変形可能領域の折り返し部分を横切っているとす。このときモジュールの変形可能領域は  $\alpha$  から独立しているため、モジュールが折り返し部分に到達した後モジュールを展開し変形可能領域を逆行すると、フレームを変形可能領域の異なる層に移すことができる。以上より、両平面双対タイリング折紙のトラス構造の基準となる四角錐と、モジュール内部の折り目が与えられたとき、 $d_1, d_k$  による配置空間上でモジュールの変形可能領域を展開状態から辿ったとき、フレームの変形可能領域から外れずに次のいずれかを満たすならば両平面双対タイリング折紙は自己交差を許して剛体折り可能である。

- フレームの変形可能領域の折り返し部分に接するように曲がり、その後にフレームの折り状態を満たす  $d_1, d_k$  を通る。
- フレームの折り状態を満たす  $d_1, d_k$  を通過し、その後にフレームの変形可能領域の折り返し部分を通る。

## 4.6 剛体折り可能となりやすい両平面双対タイリング折紙の設計手法

この節ではフレームの変形に整合するモジュール内部の折り目パターンを設計するための戦略を提案する。

モジュールの境界の変形可能領域は、フレームの展開状態、折り状態、折り返し部分を通る必要がある。 $k, \theta, h$  から展開図が定まるため、モジュールとフレームの展開状態での境界は一致している。よって求めるべきは、フレームの折り状態と折り返し部分を通るようなモジュールの折り目パターンである。



平坦折りとは折り状態において、紙の厚みを無視したとき全ての面が同一平面上にあるような折りのことである。両平面双対タイリング折紙の平行四辺形モジュールを平坦折りできたとすると、境界の四辺形も同一平面上に乗る。空間四辺形を構成する四節リンクについて、辺が同一平面上にある状態は図 4.15 のようになっている。上段中央は  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 1.5)$  の両平面双対タイリング折紙におけるモジュールの展開状態の境界となっている。また下段は上段のそれぞれの四辺形を対角線  $AC$  で折り返したものである。左右は頂点  $A$  と  $C$  の距離を変化させたものであり、上下段とも  $A, C$  間の距離が大きくなるにつれて  $B, D$  間の距離は小さくなる。空間四辺形について、辺  $CD$  と  $DA$  を頂点  $A, C$  を結ぶ線分周りに回転させることを考える。このとき  $A, C$  間の距離は一定であり、 $B, D$  間の距離は図 4.15 上段のときに最大、下段のときに最小となる。即ち、図 4.15 上段から一つ選んだ時、その四辺形を構成する四節リンクをどのように動かしても  $A, C$  間の距離と  $B, D$  間の距離を共にそれより大きくすることはできない。また図 4.15 下段から一つ選んだ時、その四辺形を構成する四節リンクをどのように動かしても  $A, C$  間の距離と  $B, D$  間の距離を共にそれより小さくすることはできない。

Demaine and Ku [9] の条件から、頂点  $A, C$  と  $B, D$  の距離が上段中央と比べて大きくない空間四辺形は、内部に紙のあるモジュールの境界として作るができる。これは図 4.15 の平坦な状態ではモジュールの展開状態である上段中央か、下段の中央と左の形状である。そのうち下段の四辺形形状をプロットすると図 4.14 の緑の曲線になる。フレームの境界について、緑の曲線よりも  $A, C$  と  $B, D$  の距離、即ち  $d_1, d_k$  は共に小さくはならないため、図 4.14 においてフレームの変形可能領域、特に折り返し部分は緑の曲線を越えることはない。対して平坦折り可能なモジュールを用いる場合、モジュールの変形可能領域は緑の曲線に到達する。このときモジュールの変形可能領域はフレームの変形可能領域の外周に到達するか、フレームの変形可能領域をはみ出る。これによりモジュールの変形可能領域がフレームの変形可能領域の折り返し部分を通ることが期待される。ただし平坦折り可能なモジュールを用いても全体が剛体折り可能とは限らない。例えば平坦折り可能な翼折りを用いても、図 4.14 の黒い曲線のように先に対角線で平坦に畳んだ際にフレームの変形可能領域から外れると予想される。その他、モジュールの変形可能領域で折り返し部分と折り状態をつなぐ経路が、フレームの変形可能領域が二重になっている領域から外れる場合が考えられる。

#### 4.6.1 対角線折りの場合

両平面双対タイリング折紙の四面体領域がクリティカルなとき、モジュール内部の折り目は対角線となる。このときモジュール境界の変形可能領域は展開状態から平坦折り状態までの、グラフのいずれかの軸に平行な線分となる。フレームについても展開状態と折り状態は、 $d_1$  または  $d_k$  が等しいため、フレームの折り状態はモジュールの変形可能領域の線分の上に乗っている。よって図 4.16 のように線分が折り返し部分を通っていれば全体が剛体折り可能である。

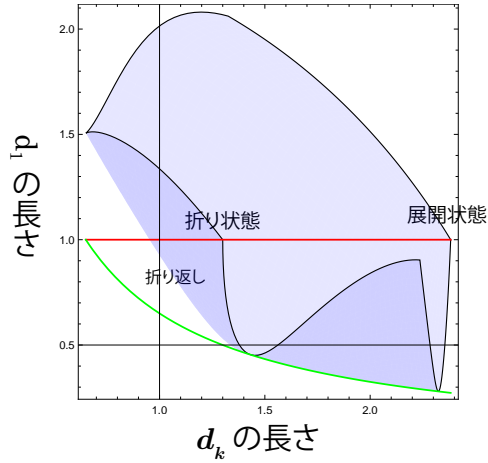


図 4.16 モジュール内の折り目が対角線のみになる両平面双対タイリング折紙。  
 $(k, \theta, h) = (1.3, \pi/3, 0.998153)$ 。青い領域: フレームの変形可能領域。赤い直線: モジュールの変形可能領域。緑の曲線: 境界の四辺形が平面内での変形のプロット。

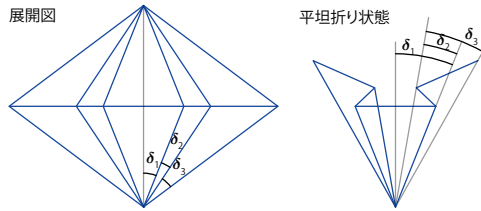


図 4.17 平坦折り可能な菱形モジュール。一部の折り目がどちらの対角線に乗っているかと、折り目の作る角度  $\delta$  によって折り目パターンが決定される。

#### 4.6.2 四面体領域が菱形の場合

モジュールの展開状態での境界が菱形の場合はモジュール内部の折り目の対称性が高くなる。両平面双対タイリング折紙においてモジュールの展開状態、即ち四面体領域が菱形となるのは、角錐の稜線の長さが全て等しい場合であり、これは角錐底面が長方形であることと同値である。

モジュールの展開状態での境界が菱形の場合、図 4.17 のように二つの対角線に関して線対称な折り目パターンを用いる方法が考えられる。モジュール内部の折り目は  $\delta_1, \delta_2$  で定まり、常に平坦折り可能である。

自己交差が起こらない十分条件として、モジュール自身とフレーム自身それぞれで自己交差が起こらず、モジュールとフレームの境界である四辺形が途中状態で作る四面体の内外にモジュールとフレームが分断されるという条件が考えられる。図 4.17 のモジュールに関してこの十分条件が満たされない場合として、展開図でモジュールの中心に近い二つの内部頂点が四面体の外に出る場合と、残る二つの内部頂点が衝突する場合がある。ここでモジュールを展開状態から平坦折り状態まで折った際、展開図でモジュールの中

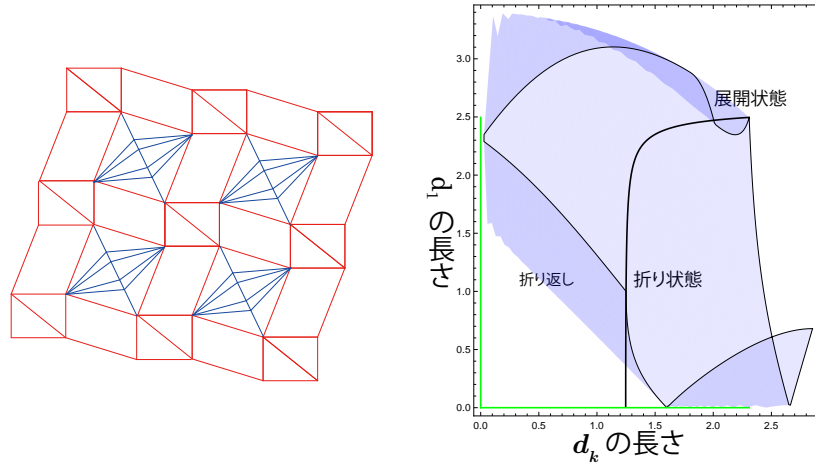


図 4.18 菱形モジュールを用いた剛体折り可能な両平面双対タイリング折紙。  
 $(k, \theta, h) = (1.25, \frac{\pi}{2}, 1.5)$ 。

心に近い二つの内部頂点が一度四面体の外に出たならばその後も四面体の外にあり続け、残りの二つの内部頂点が衝突したならばその後も自己交差が起これ続ける。そのため平坦折り状態でこれらの場合が起きていないならば、十分条件のモジュールに関わる部分が満たされていることが保証される。前者のモジュールが四面体の外にはみ出る場合は  $\delta_2 > \delta_3$ 、後者のモジュールの自己交差は  $\delta_2 > \delta_1$  のときに起こる。以上に注意しながらフレームの折り状態を通るように  $\delta_1, \delta_2$  を求める。図 4.18 はモジュールが菱形で剛体折り可能な両平面双対タイリング折紙の展開図と配置空間である。 $\delta_2 > \delta_3$  と  $\delta_2 > \delta_1$  を満たしており、Freeform origami [34] によるシミュレーションで目視で確認する限り自己交差が起きていない。

## 第 5 章

# まとめ

### 5.1 研究成果

本論文では表裏に四辺形グリッドによるタイリングを作る両平面双対タイリング折紙を柱面に拡張し、また両平面双対タイリング折紙については剛体折り可能性を判定する方法を議論した。

第 2 章では本研究で基本となる折紙テセレーションである双対タイリング折紙の構成と、四辺形グリッドを作る両平面双対タイリング折紙について議論し、以下の結果を得た。

- 一般の双対タイリング折紙を定義し、非交差条件、角錐条件、四面体条件の三つからなる存在条件を示した。
- 二回転対称な四角錐一種類を用いて、表裏面に平行四辺形グリッドを作る両平面双対タイリング折紙を定義した。
- 四角錐を表す三つのパラメータ  $k, \theta, h$  について、両平面双対タイリング折紙の存在条件が四面体条件である二つの不等式になることを示した。

第 3 章では両平面双対タイリング折紙を拡張して、表裏面が柱面であり四辺形グリッドを持つ柱面双対タイリング折紙について議論し、以下の結果を得た。

- 両平面双対タイリング折紙を平行四辺形グリッドの列に沿ってくさび形に分解し、頂角の異なるくさび形を接続することで柱面双対タイリング折紙を構成した。
- 接続可能なくさび形は最大で二種類であること、また接続する順番により様々な曲面を作ることができることを示した。
- くさび形のペアの形状を定める三つのパラメータ  $\phi_1, \phi_2, t$  を提案し、柱面双対タイリング折紙の存在条件とその解空間を明らかにした。
- パラメータ  $\phi_1, \phi_2, t$  から柱面双対タイリング折紙のトラス構造と折り目パターンを計算し、トラス構造の形状を確認しながら設計できるツールを作成した。

- 柱面双対タイリング折紙が以下の性質を持つようなパラメータ値を示し、それぞれの性質を持つデザインの例を示した。
  - － 曲率半径が大きな柱面を作るもの
  - － 閉じた角柱面を作るもの
  - － 一方のくさび形が平面に縮退するもの

第4章では両平面双対タイリング折紙の剛体折り可能性について議論し、以下の結果を得た。

- 両平面双対タイリング折紙の剛体折り可能性を簡単に判定するため、フレームとモジュールに分解することを提案し、対称性の仮定の下でフレームが二自由度で剛体折り可能であること、モジュールは一自由度で剛体折り可能であり変形状態を様々に変化させられることを示した。
- 境界形状の配置空間においてフレームとモジュールそれぞれの変形可能領域を比較し、両平面双対タイリング折紙が剛体折り可能である条件が、変形可能領域の共通領域が展開状態から折り状態まで連結なことであると示した。
- 剛体折り可能な両平面双対タイリング折紙を得やすい折り目パターン設計手法として平坦折り可能なモジュールを用いることを提案し、クリティカルなモジュールや菱形モジュールによる剛体折り可能な例を示した。

## 5.2 考察と今後の展望

本研究における提案手法の制約などに関する考察と今後の研究の展望を議論する。

■柱面の近似とくさび形の性質 一つの柱面双対タイリング折紙で利用可能なくさび形は二種類だけなので、接続順で様々な曲面を作ることができるが表裏面の曲がり角度や曲がる地点は離散的である。そのため与えられた柱面を近似するもののデザインは難しい。曲がり角度  $|\phi_1 - \phi_2|$  と角錐底面の幅  $w_1, w_2$  を小さくすることで近似を良くすることが考えられる。

$$w_1 = p \sin \phi_1, w_2 = p \sin \phi_2,$$

$$p = \frac{t}{2 \sin \phi_1 \sin \phi_2} \sqrt{1 + \frac{2}{t} \sin \phi_1 \sin \phi_2 - \sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2}$$

より、 $w_1, w_2$  を小さくするためには、頂角の半分  $\phi_1, \phi_2$  が 0 に近づけるか、もしくは  $p = 0$  即ち図 3.7 の緑の面に近づける必要がある。 $\phi_1, \phi_2$  を 0 に近づけると、くさび形が平面に縮退していく。よってくさび形の底面、即ち折紙コアパネルの四辺形グリッドの一片の面積あたりに必要なシートの面積が増大し、軽量高剛性の性質が失われる。また折り状態の剛性にも影響が考えられる。 $p = 0$  のときはくさび形は直線に縮退していき、シートを柱面状に曲げたものに近づく。柱面双対タイリング折紙における、柱面の近似具合、くさび形の底面積あたりに必要となるシート面積、折り状態の剛性など、検討すべき事項が残されている。

■**柱面以外の曲面形状** 柱面双対タイリング折紙の発展として、より多様な曲面形状を作るものが考えられる。折紙コアパネルへの応用を考えると、平坦なシートを表面材にするのであれば、柱面の他に錐面や接線曲面などの可展面を離散的に表した形状が考えられる。また表面材をプレス加工で作るか、溶接などで双対タイリング折紙の双対グラフの辺で隣接する角錐同士を接着することを考えると、二方向に曲率を持つ複曲面形状を作ることも考えられる。これらの曲面形状を作る双対タイリング折紙の研究は今後の課題である。

■**フレームの剛体折り自由度** 第4章では両平面双対タイリング折紙のフレームについて、モジュール内部の折り目パターンが全て合同であり、折り目がその方向によって  $\pm\alpha$  または  $\pm\beta$  の折り角度で折られるという対称性を仮定していた。それぞれの仮定を取り除くと第4章で示した二自由度の挙動と異なる動きをする可能性があり、実際付録Aでは境界の変形挙動、即ちモジュールの変形挙動が二種類現れるようなフレームの剛体折り挙動を示している。その他にもフレームの剛体折り挙動は存在可能と考えられるが、それらの構成方法は不明である。ただしフレームの途中状態の形状に二方向の並進対称性を仮定すると、館 [35] により、途中状態の形状は大域的に平面または円筒形に限定され、二自由度の剛体折り<sup>\*1</sup>となる。

■**剛体折りの変形仮定における自己交差** 本論文では両平面双対タイリング折紙の剛体折り変形について、自己交差を考慮していない。フレームの途中状態を決定する  $\alpha, \beta$  から頂点座標を計算し、自己交差を起こしているか判定することは可能である。しかし二次元のプロットに対し自己交差判定の精度を上げるのは難しいため、フレームの変形可能領域を描画する際に自己交差を加味することは現実的でない。またモジュールは一自由度剛体折り機構であるが、折り目パターンが無数に存在するため、統一的な自己交差判定手法が存在しない。フレーム自身、モジュール自身に限らず、フレームとモジュールの交差も含めた両平面双対タイリング折紙の自己交差判定は、自己交差を許して剛体折り可能である折り目パターンそれぞれに対し、一自由度剛体折り挙動を数値的シミュレーションによって描画し目視で判定しなければならないのが現状である。

■**スリット双対タイリング折紙** 両平面双対タイリング折紙のフレームの、剛体折り可能な切紙としての応用を議論する。二回転対称な四角錐を用いて両平面双対タイリング折紙を構成する際、四面体領域を取り除き角錐領域からなるフレームのみを考えるならば、存在条件は角錐条件のうち、図2.4のように頂点周りの内角の和が  $2\pi$  より小さいことのみである。この条件を両平面双対タイリング折紙のパラメータ  $k, \theta, h$  について図示すると、存在条件を満たす領域は図5.1の緑の曲面の間である。存在条件を満たすパラメータにおいてはフレームは穴の開いた網目状の構造をしているが、図5.1の緑の面上

<sup>\*1</sup> 例えば平坦な展開状態から大域的に平面な折り状態まで剛体折りする際、途中で一方向に曲がって大域的に円筒形状を作った後、折り状態に近づくにつれてまた大域的に平面の形状に戻るような変形が考えられる。

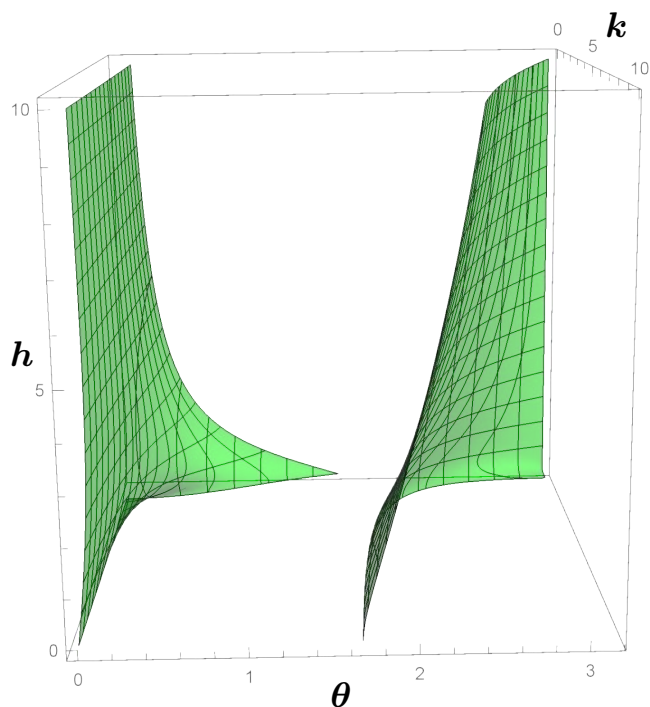


図 5.1 両平面双対タイリング折紙が角錐領域のある頂点周りで角錐領域の内角の和が  $2\pi$  となるパラメータ値。緑の曲面上で四面体領域が線分になり、緑の曲面に挟まれない空間では角錐領域同士が重なる。



図 5.2 スリット双対タイリング折紙。四面体領域が青い線分になる。

ではある頂点周りの内角の和が  $2\pi$ 、即ち四面体領域のある内角の大きさが  $0$  である。このとき四面体領域は図 5.2 のように線分に縮退し、面積  $0$  となる。このような両平面双対タイリング折紙のフレームをスリット双対タイリング折紙と呼ぶ。図 5.2 の青い線分に切れ込みを入れることで四面体領域を取り除いたと見なすと、少なくとも二自由度で剛体折り可能な切り折紙を、シートのロスなく作ることができる。スリット双対タイリング折紙は谷山ら [36] のように皮膚などの伸び縮みする面に貼り付ける応用が期待されている。

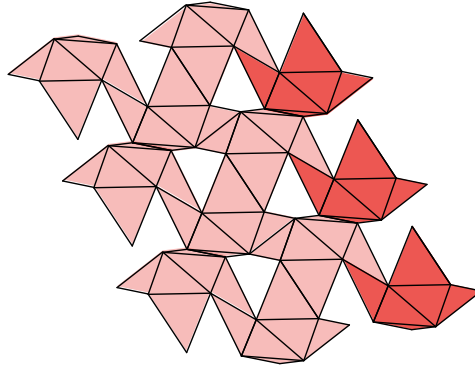


図 5.3 両平面双対タイリング折紙のフレームの途中状態。あるくさび形に含まれる角錐部分を濃く示している。

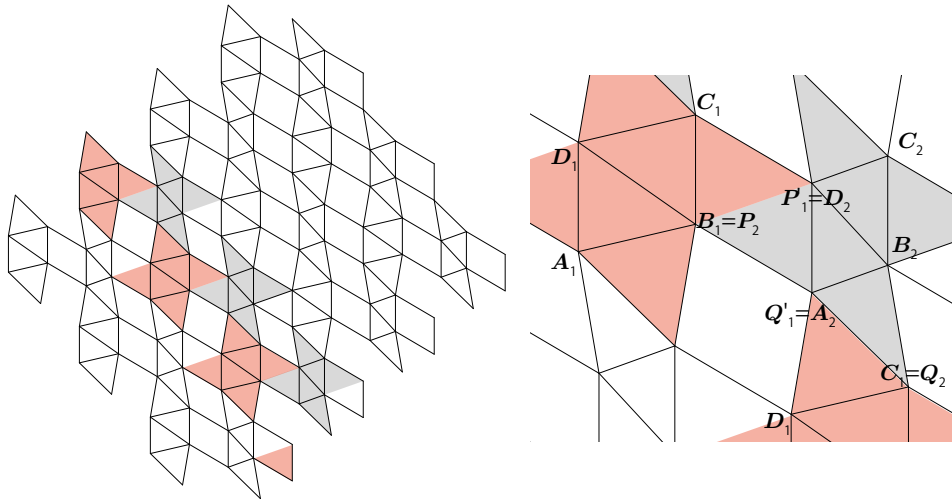


図 5.4 柱面双対タイリング折紙のフレームの展開図。

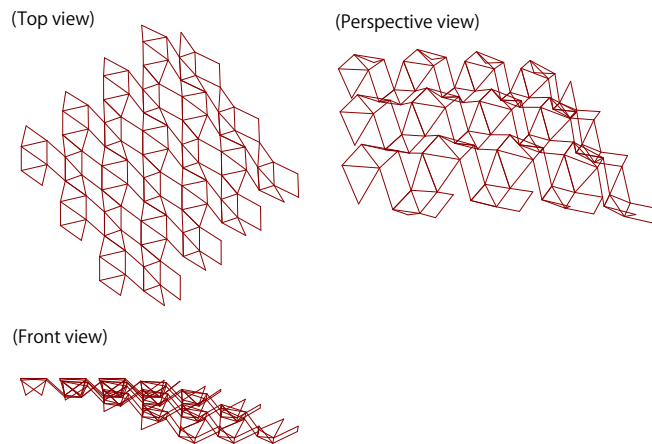


図 5.5 柱面双対タイリング折紙のフレームの剛体折り。



■柱面双対タイリング折紙におけるフレームの剛体折り可能性 4.3.1 節における両平面双対タイリング折紙フレームの剛体折り挙動は二自由度であった。このフレームの途中状態から、図 5.3 のように両平面双対タイリング折紙の一つのくさび形に含まれる角錐部分の折り状態を取り出す。すると角錐が折りたたまれ、平行移動で配置された形状になる。柱面双対タイリング折紙のそれぞれのくさび形に含まれる四面体部分、即ちモジュールがそれぞれ同一の変形をしていると仮定したとき、一つのくさび形に含まれる角錐部分の途中状態を上記のように二自由度で定めると、隣接するくさび形の角錐部分の途中状態は、角錐の辺の長さから作図される。例えば図 5.4 の展開状態で赤い角錐領域の三次元形状を定めたとき、黒い角錐領域について、頂点  $A_2, D_2, P_2, Q_2$  の位置は赤い角錐領域から定まり、頂点  $B_2$  の位置は辺  $A_2B_2, D_2B_2, Q_2B_2$  の長さから定まる。途中形状においても隣接するくさび形の角錐部分が同様に作図でき (図 5.5)、柱面双対タイリング折紙のフレームは二自由度で剛体折り可能である。

しかしながら、四面体領域が二種類あり、二種類のモジュールの変形が整合する必要があるため、剛体折り可能な柱面双対タイリング折紙を設計することは難しい。両平面双対タイリング折紙では一種類のモジュールの一次元の変形可能領域がフレームの二次元の変形可能領域に整合していれば良かったのに対し、今回の場合では一方のモジュールがフレームの変形を一自由度に制限するため、もう一方のモジュールの変形可能領域は、フレームの一次元の変形可能領域と一致しなければならない。四角形境界を持つモジュールについて、いくつかの境界形状を同時に満たす折り目パターンを設計は可能である [10, 24] が、連続的な経路に沿うモジュールの折り目パターンを設計する方法は明らかになっていない。

## 謝辞

本論文は著者が東京大学大学院総合文化研究科広域科学専攻広域システム科学系博士後期課程に在籍中の研究をまとめたものである。

本研究を進めるにあたり、山口泰教授（東京大学総合文化研究科広域科学専攻）には指導教員として親身にご指導頂いた。今後の方針に迷っていた際、山口泰先生との議論により研究を進めることができた。

山口和紀教授（東京大学総合文化研究科広域科学専攻）と森畑明昌准教授（東京大学総合文化研究科広域科学専攻）には、情報システム研究グループのゼミナールにおいて他分野の研究者へ向けた発表の心構えを指導頂いた。

金井崇准教授（東京大学総合文化研究科広域科学専攻）には山口泰研究室と合同のゼミナールにおいて長らく研究を見て頂き、貴重なご意見を頂いた。

館知宏准教授（東京大学総合文化研究科広域科学専攻）は企業や海外の研究者との研究に参加させていただくなど、手厚く指導頂いた。館先生の折紙への深い理解とサポートのおかげで本論文を形にすることができた。

各研究室の学生、卒業生の方々には、各ゼミナールにおいてどれも興味深い研究を教えてくださいました。折紙に限らずコンピュータグラフィクスやアルゴリズム、建築といった様々な分野の研究に触れた経験が博士の研究生活と今後のキャリアにおいてよい刺激となった。

本研究を遂行するにあたり東京大学博士課程研究遂行協力制度並びに広域システム科学系リサーチ・アシスタントによる支援を頂いた。以上の皆様に、ここに深謝の意を表す。

## 付録 A

# 角錐底面に折り目を追加しない場合のフレームの剛体折り

この付録では両平面双対タイリング折紙のフレームの角錐底面に折り目を追加しなかった場合、どのような剛体変形をするか議論する。

まず四面体領域の穴一つを囲む面 (図 A.1 で赤い枠で囲まれた部分) について剛体折り変形を考える。この部分は角錐底面  $ABCD$  四つが角錐側面二枚による平行四辺形につながった構造をしている。折り途中の図 A.2 において、 $B_{00}C_{00}$  と  $A_{10}D_{10}$ ,  $B_{01}C_{01}$  と  $A_{11}D_{11}$  は平行である。また  $C_{00}D_{00}$  と  $B_{01}A_{01}$ ,  $C_{10}D_{10}$  と  $B_{11}A_{11}$  も平行である。よって折り途中の角錐底面を平行移動すると、図 A.2 右下のように辺が一致する。即ち、剛体折り変形の途中において角錐底面の相対的な傾きは、合同な平行四辺形が四つ集まったパネル (図 A.2 右下) の剛体折りと対応する。これは直線  $B_{00}C_{00}$  に沿って折

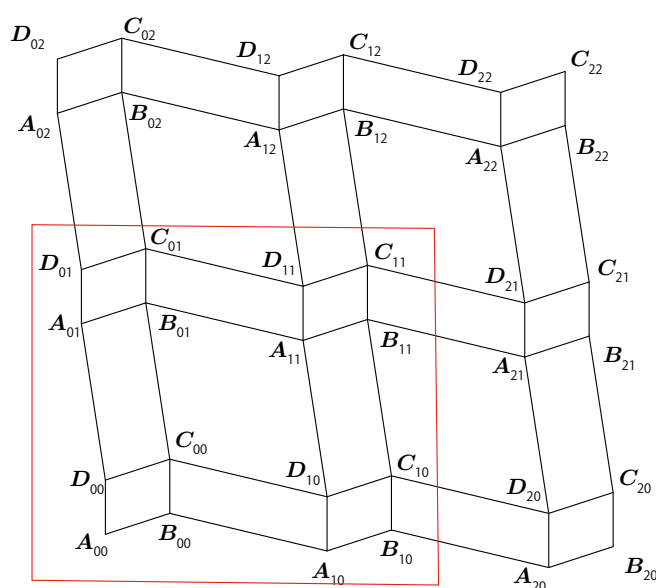
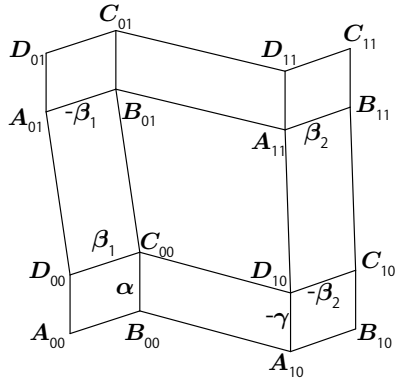
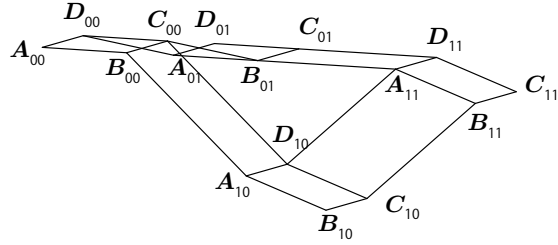


図 A.1 両平面双対タイリング折紙  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 2.843)$  のフレーム

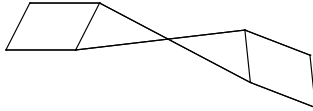
(Top view)



(Parallel view)



(Front view)



(角錐底面)

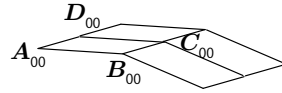


図 A.2 一つの穴の周りのフレームの折り状態。角錐底面を平行移動で集めると辺が一致する。

るか直線  $C_{00}D_{00}$  に沿って折るかのどちらかしかあり得ない。図 A.2 右下において直線  $B_{00}C_{00}$  に沿って折ることとして一般性を失わないので、角錐底面  $A_{00}B_{00}C_{00}D_{00}$  と  $A_{01}B_{01}C_{01}D_{01}$ , また  $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$  と  $A_{11}B_{11}C_{11}D_{11}$  は変形時常に平行とする。以上より辺  $C_{00}D_{00}$ ,  $B_{01}A_{01}$ ,  $C_{10}D_{10}$ ,  $B_{11}A_{11}$  の折り角度は実数  $\beta_1, \beta_2$  によってそれぞれ  $\beta_1, -\beta_1, -\beta_2, \beta_2$  と表される。ただし紙の表から見て山折りのとき折り角度は正、谷折りの時折り角度は負としている。

直交座標系を、 $A_{00}$  を原点、ベクトル  $\overrightarrow{A_{00}B_{00}}$  と  $\overrightarrow{A_{00}D_{00}}$  の外積を  $z$  軸の正の向き、ベクトル  $\overrightarrow{B_{00}C_{00}}$  方向が  $y$  軸の正の向きとなるようにとる。このとき展開状態と途中状態を比べると、角錐側面による平行四辺形  $B_{00}A_{10}D_{10}C_{00}$  と  $B_{01}A_{11}D_{11}C_{01}$  は  $y$  軸周りに回転している。この二つの平行四辺形は合同なので、 $A_{10y} - B_{00y} = A_{11y} - B_{01y}$  である。そのためには  $\beta_1 = \beta_2$  が必要である。以降  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  とする。

辺  $B_{00}C_{00}$ ,  $A_{10}D_{10}$  の折り角度を  $\alpha$  と  $-\gamma$  で表す。平行四辺形  $B_{01}A_{11}D_{11}C_{01}$  を取り除いて考えると、 $\alpha, \beta, \gamma$  を任意にとるとき、一般に二点  $A_{11}$  と  $B_{01}$  の距離は平行四辺形の辺  $A_{11}B_{01}$  の長さとは一致しない。今  $A_{11y} - B_{01y} = A_{01y} - B_{00y}$  であるから、 $\alpha_t, \beta_t$  を定めたとき  $\gamma_t$  によって  $A_{11x} - B_{01x}$  を動かすと、二点  $A_{11}$  と  $B_{01}$  の距離は平行四辺形  $B_{01}A_{11}D_{11}C_{01}$  の辺  $A_{11}B_{01}$  の長さとは一致する場合がある。このとき対称性から辺  $B_{01}C_{01}$  の折り角度は  $-\gamma_t$ , 辺  $A_{11}D_{11}$  の折り角度は  $\alpha_t$  である。

次にさらに  $y$  軸方向に進んだ角錐底面二つを考える。図 A.3 上側の穴の周りの変形状態は、下側の穴の周りにおいて  $\alpha, \gamma$  を  $-\gamma_t, -\alpha_t$  としたときに相当する。このとき妥当な  $\beta'_t$  が存在するならば図 A.4 のようにフレーム全体が歪まずに存在する。

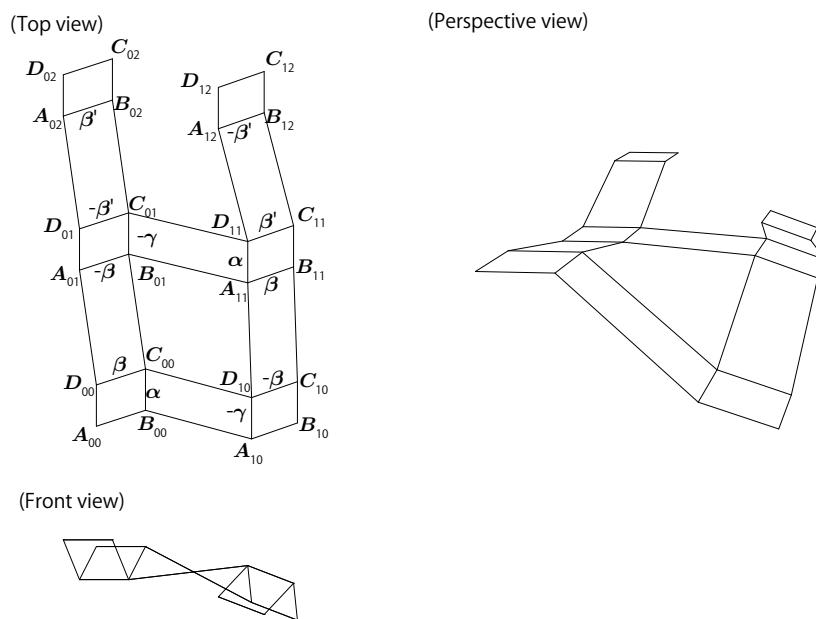


図 A.3 穴を二つ含むループの折り状態

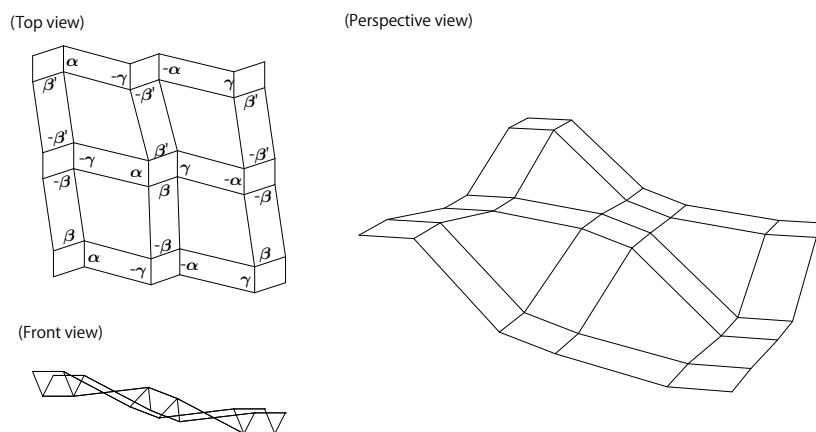


図 A.4 穴を四つ含むループの折り状態

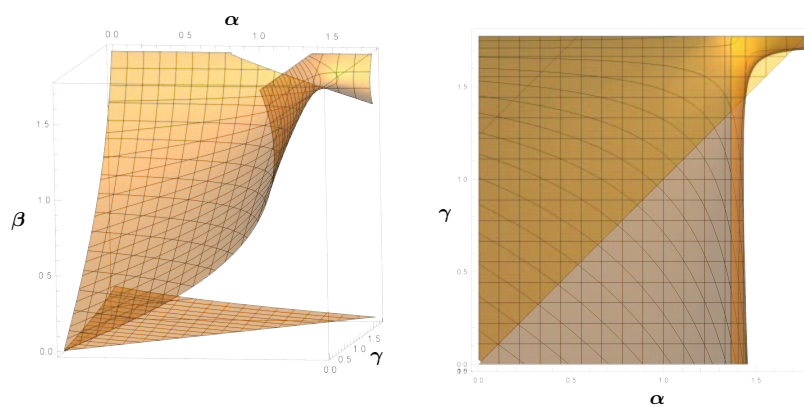


図 A.5  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 2.843)$  のときの一つの穴の周りのループが閉じるパラメータ

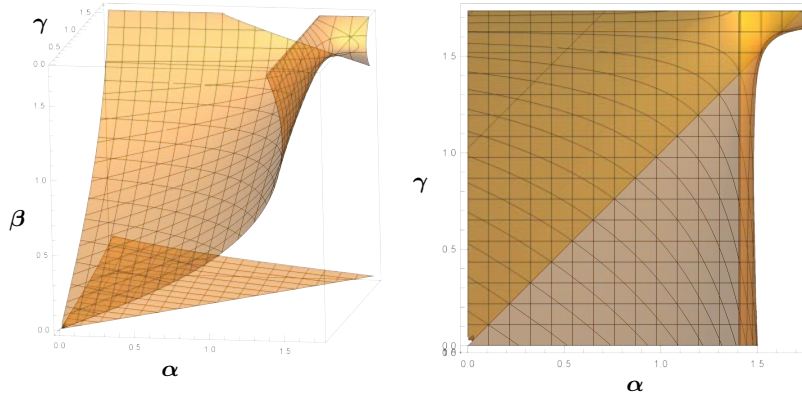


図 A.6  $(k, \theta, h) = (1, 0.4\pi, 2.843)$  のときの一つの穴の周りのループが閉じるパラメータ

図 A.5 は  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 2.843)$  のとき  $\alpha, \beta, \gamma$  が一つの穴の周りのループについて面が歪まない条件を示している。この曲面を  $\alpha\gamma$  平面に投影し、展開状態  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  から折り状態  $\alpha = \gamma = 1.77691, \beta = 1.73653$  までの経路が存在することが下側のループが剛体折りで折り状態に至る十分条件である。必要十分条件でない理由は、図 A.5 の定義域は  $\alpha, \beta, \gamma$  が全て非負であるが、いくつかの変数が途中で負となる剛体折りの経路もありうるからである。図 A.3 の状態で、上側のループでは  $\alpha, \beta, \gamma$  が全て負になっている。しかし山谷を逆転させることで全てのパラメータを正にすることができ、逆転の前後で形状は鏡像になっているためどちらかが面が歪まずに存在できているならば、山谷を入れ替えたパラメータについても面が歪んでいない。よってこの経路の  $\alpha$  と  $\gamma$  を入れ替えても対応する  $\beta$  が存在して展開状態から折り状態まで連続しているならば上側のループも剛体折りで折り状態に移動できる。言い換えると、図 A.5 の上側の曲面を  $\alpha\gamma$  平面に投影し直線  $\alpha = \gamma$  に沿って折り返したとき、重なった部分を通る経路があるならば図 A.3 の 8 の字のループひいてはフレーム全体が剛体折り可能である。しかし実際は、図 A.5 の  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$  付近の形状から、このパラメータ  $(k, \theta, h) = (1.25, 0.4\pi, 2.843)$  について、フレームは剛体折り不可能とわかる。

では剛体折り可能な  $(k, \theta, h)$  が存在するかが問題だが、剛体折り可能性の判定にはグラフを見る必要がある。しかしパラメータに対するグラフの形状は明らかになっていない。ただし角錐底面が菱形のとき、即ち  $k = 1$  のときは 4.3.1 節で説明した方法で折り状態まで剛体折り可能である。これは  $k = 1$  のとき図 A.6 のように平面  $\alpha = \gamma$  との共通部分を通り折り状態に到達できることを意味している。

また途中までの剛体折りについても、図 A.3 のように二つの穴の状態が異なる。フレームの経路を一つ定めたとき、 $\alpha \neq \beta$  である地点ではモジュールは二種類ある。一方のモジュールに折り目パターンを与えると全体の経路が定まり、もう一方のモジュールはその経路に沿って動く折り目パターンが必要である。モジュールの境界形状について、与えられた変形挙動を実現する折り目を求めることは困難であるため、角錐底面に折り目を加えない場合、両平面双対タイリング折紙を途中まででも剛体折りするようなモジュール

ルの折り目は現在発見されていない。

## 参考文献

- [1] Zachary R Abel, Erik D Demaine, Martin L Demaine, Hiro Ito, Jack Snoeyink, and Ryuhei Uehara. Bumpy pyramid folding. In *The 26th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG) 2014*, pp. 258–266, August 2014.
- [2] Muhammad Ali Ablat and Ala Qattawi. Finite element analysis of origami-based sheet metal folding process. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, Vol. 140, No. 3, April 2018.
- [3] Akito Adachi, Tomohiro Tachi, and Yasushi Yamaguchi. Dual tiling origami. *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 22, No. 2, pp. 269–281, 2018.
- [4] Architect Team Aedas. Al bahar towers responsive facade. ArchDaily by Karen Cilento, 2012.
- [5] Sarah-Marie Belcastro and Thomas Hull. A mathematical model for non-flat origami. In Thomas Hull, editor, *Origami<sup>3</sup>: Third International Meeting of Origami science, mathematics, and education*, pp. 39–51, 2002.
- [6] Alexander Graham Bell. Connection device for the frames of aerial vehicles and other structures., June 1907. US856838A.
- [7] Thomas R. Crain. A new scheme to describe twist-fold tessellations. In Koryo Miura, Toshikazu Kawasaki, Tomohiro Tachi, Ryuhei Uehara, Robert J. Lang, and Pasty Wang-Iverson, editors, *Origami<sup>6</sup>: proceedings of the sixth international meeting on origami science, mathematics, and education*, pp. 253–264, 2015.
- [8] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Vi Hart, Gregory N. Price, and Tomohiro Tachi. (non)existence of pleated folds: How paper folds between creases. *Graphs and Combinatorics*, Vol. 27, No. 3, pp. 377–397, March 2011.
- [9] Erik D. Demaine and Jason S. Ku. Filling a hole in a crease pattern: Isometric mapping from prescribed boundary folding. In Koryo Miura, Toshikazu Kawasaki, Tomohiro Tachi, Ryuhei Uehara, Robert J. Lang, and Pasty Wang-Iverson, editors, *Origami<sup>6</sup>: proceedings of the sixth international meeting on origami science, mathematics, and education*, pp. 177–188, 2015.
- [10] Erik D. Demaine and Jason S. Ku. Folded structures satisfying multiple condi-



- 
- tions. *Journal of Information Processing*, Vol. 25, pp. 601–609, 2017.
- [11] Levi H. Dudte, Etienne Vouga, Tomohiro Tachi, and L. Mahadevan. Programming curvature using origami tessellations. *Nature Material*, Vol. 15, pp. 583–588, 2016.
- [12] Richard Buckminster Fuller. Synergetic building construction, May 1961. US2986241A.
- [13] Amanda Ghassaei, Erik D. Demaine, and Neil Gershenfeld. Fat, interactive origami simulation using gpu computation. In Robert J. Lang, Mark Bolitho, and Zhong You, editors, *Origami<sup>7</sup>: the proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, pp. 1151–1166, 2018.
- [14] Marc Grzeschik, Yves Klett, and Peter Middendorf. Reality check - mechanical potential of tessellation-based foldcore materials. In Robert J. Lang, Mark Bolitho, and Zhong You, editors, *Origami<sup>7</sup>: the proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, pp. 1273–1284, 2018.
- [15] Zeyuan He and Simon D. Guest. Approximating a target surface with 1-dof rigid origami. In Robert J. Lang, Mark Bolitho, and Zhong You, editors, *Origami<sup>7</sup>: the proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, pp. 505–520, 2018.
- [16] Yucai Hu, Yexin Zhou, and Haiyi Liang. Constructing rigid-foldable generalized miura-ori tessellations for curved surfaces. *Journal of Mechanisms and Robotics*, pp. 1–17, October 2020.
- [17] Jin-ichi Itoh and Chie Nara. Continuous flattening of platonic polyhedra. In *International Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications*, pp. 108–121. Springer, 2010.
- [18] Yves Klett and Klaus Drechsler. Designing technical tessellations. In Pasty Wang-Iverson, Robert J. Lang, and Mark Yim, editors, *Origami<sup>5</sup>: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, pp. 305–322, 2011.
- [19] Yves Klett, Marc Grzeschik, and Peter Middendorf. Comparison of compressive properties of periodic non-flat tessellations. In Koryo Miura, Toshikazu Kawasaki, Tomohiro Tachi, Ryuhei Uehara, Robert J. Lang, and Pasty Wang-Iverson, editors, *Origami<sup>6</sup>: proceedings of the sixth international meeting on origami science, mathematics, and education*, pp. 371–384, 2015.
- [20] Robert J. Lang. Octet truss, opus 652. <https://langorigami.com/artwork/octet-truss-opus-652/>, 2014. accessed on October 30, 2020.
- [21] Koryo Miura. Zeta-core sandwich - its concept and realization. *ISAS re-*

- port/Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo*, Vol. 37, No. 6, pp. 137–164, May 1972.
- [22] Koryo Miura. New structural form of sandwich core. *Journal of Aircraft*, Vol. 12, pp. 437–441, 1975.
- [23] Koryo Miura. The science of miura-ori: A review. In Robert J. Lang, editor, *Origami<sup>4</sup>: Fourth International Meeting of Origami science, mathematics, and education*, pp. 87–100, 2009.
- [24] Yuki Miyajima and Tomohiro Tachi. Designing folding motion of origami using quadrilateral boundary modules. Session in Symmetry: Art and Science 11th Congress and Exhibition, November 2019.
- [25] Fabian Muhs, Yves Klett, and Peter Middendorf. Automated numerical process chain for the design of folded sandwich cores. In Robert J. Lang, Mark Bolitho, and Zhong You, editors, *Origami<sup>7</sup>: the proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, pp. 1043–1058, 2018.
- [26] Jun-Hee Na, Arthur A. Evans, Jinhye Bae, Maria C. Chiappelli, Christian D. Santangelo, Robert J. Lang, Thomas C. Hull, and Ryan C. Hayward. Programming reversibly self-folding origami with micropatterned photo-crosslinkable polymer trilayers. *Advanced Materials*, Vol. 27, No. 1, pp. 79–85, 2015.
- [27] Hussein Nassar, Arthur Lebé, and Laurent Monasse. Fitting surfaces with the miura tessellation. In Robert J. Lang, Mark Bolitho, and Zhong You, editors, *Origami<sup>7</sup>: the proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, pp. 811–826, 2018.
- [28] Edward G. Rapp. Sandwich-type structural element, December 1960. US2963128A.
- [29] Ronald D. Resch and H. Christiansen. Design and analysis of kinematic folded plate systems. In *Proceedings of IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structures*, September 1970.
- [30] Mark Schenk and Simon D. Guest. Origami folding: A structural engineering approach. In Pasty Wang-Iverson, Robert J. Lang, and Mark Yim, editors, *Origami<sup>5</sup>: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, pp. 291–304, 2011.
- [31] Kai Suto, Akito Adachi, Tomohiro Tachi, and Yasushi Yamaguchi. An edge-extrusion approach to generate extruded miura-ori and its double tiling origami patterns. In Robert J. Lang, Mark Bolitho, and Zhong You, editors, *Origami<sup>7</sup>: the proceedings from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, pp. 435–450, 2018.
- [32] Tomohiro Tachi. Generalization of rigid-foldable quadrilateral-mesh origami.

- 
- Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, Vol. 50, No. 3, pp. 173–179, December 2009.
- [33] Tomohiro Tachi. Simulation of rigid origami. In Robert J. Lang, editor, *Origami<sup>4</sup>: Fourth International Meeting of Origami science, mathematics, and education*, pp. 175–187, 2009.
- [34] Tomohiro Tachi. Freeform variations of origami. *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 14, No. 2, pp. 203–215, 2010.
- [35] Tomohiro Tachi. Rigid folding of periodic origami tessellations. In Koryo Miura, Toshikazu Kawasaki, Tomohiro Tachi, Ryuhei Uehara, Robert J. Lang, and Pasty Wang-Iverson, editors, *Origami<sup>6</sup>: proceedings of the sixth international meeting on origami science, mathematics, and education*, pp. 97–108, 2015.
- [36] Hiroki Taniyama and Eiji Iwase. Design of rigidity and breaking strain for a kirigami structure with non-uniform deformed regions. *Micromachines*, Vol. 10, No. 6, 395 2019.
- [37] Geoffrey Thün, Kathy Velikov, Colin Ripley, Lisa Sauv e, and Wes McGee. Soundspheres: Resonant chamber. *Leonard*, Vol. 45, No. 4, pp. 348–357, 2012.
- [38] ZhiJin Wang, HuaZhi Zhou, V.I. Khaliulin, and A.V. Shabalov. Six-ray folded configurations as the geometric basis of thin-walled elements in engineering structures. *Thin-Walled Structures*, Vol. 130, pp. 435–448, September 2018.
- [39] Zhou Xiang, Zang Shixi, Wang Hai, and You Zhong. Geometric design and mechanical properties of cylindrical foldcore sandwich structures. *Thin-Walled Structures*, Vol. 89, pp. 116–130, 2015.
- [40] Yoshimaru Yoshimura. On the mechanism of buckling of a circular cylindrical shell under axial compression. Technical Memorandum 1390, National Advisory Committee for Aeronautics, July 1955.
- [41] Zhong You and Kaori Kuribayashi. Expandable tubes with negative poisson’s ratio and their application in medicine. In Robert J. Lang, editor, *Origami<sup>4</sup>: Fourth International Meeting of Origami science, mathematics, and education*, pp. 117–128, 2009.
- [42] 藤本修三. 創造性を開発する 立体折り紙. 兵庫県学校厚生会, 1976.
- [43] 楊陽, 奈良知恵, 萩原一郎. 折紙構造による折り畳みヘルメット適用に関する検討. *日本シミュレーション学会論文誌*, Vol. 11, No. 1, pp. 1–13, 2019.