

博士論文

第二種超伝導体の孤立量子渦の フラックスフローの理論

須貝 駿貴

目次

第 1 章	緒論	1
1.1	渦糸状態の物理	1
1.1.1	第 I 種超伝導体と第 II 種超伝導体	1
1.1.2	磁束フロー	5
1.1.3	磁束に働く力	7
1.2	現状の整理	10
1.3	本論文の目的	12
1.4	本論文の構成	12
第 2 章	背景	15
2.1	虚部を含んだ TDGL 方程式	15
2.1.1	Solvability Condition	18
2.1.2	座標系とコア内の電磁場	21
2.1.3	Solvability Condition の評価	22
2.2	磁束フロー駆動力の起源	26
2.2.1	運動量密度の局所的なつりあい方程式	26
2.2.2	局所的な力のつり合いの方程式	28
2.2.3	力のつり合い方程式	28
2.3	本章のまとめ	30
第 3 章	TDGL 方程式の解析的計算	31
3.1	境界値問題としての TDGL 方程式	31
3.1.1	対象とする方程式系	31
3.1.2	部分波展開	34
3.1.3	スカラーポテンシャルの導出：式 (3.15) の解	35
3.1.4	TDGL 方程式 (3.16) の解	36
3.1.5	非斉次方程式 $\mathcal{L}_1 \mathbf{x}_{1,-} = \mathbf{g}$ の解を持つ条件	40
3.2	数値的計算のための手法	43
3.2.1	GL 方程式の級数解	43
3.2.2	斉次方程式 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ を解くための手法	44

3.2.3	$\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ の解	44
3.2.4	$m \neq 0$	46
3.2.5	$m = 0$	48
3.2.6	非斉次方程式の特解	49
3.2.7	非斉次項の展開係数	50
3.2.8	非斉次方程式の特解；再考	53
第 4 章	TDGL による数値計算	55
4.1	量子渦の形状	55
4.1.1	平衡状態の物理量	55
4.1.2	秩序変数	58
4.1.3	磁場、電流	63
4.1.4	バックフローのパラメータ依存性	71
4.2	量子渦の駆動力	79
4.2.1	運動量保存則と駆動力	79
4.2.2	駆動力の成分	80
4.2.3	駆動力の絶対値	85
4.2.4	局所的な力の計算	88
4.2.5	エネルギー保存則と散逸関数	91
第 5 章	議論	93
5.1	輸送電流下でピン留めされている孤立量子渦にかかる力	93
5.2	実験による検証法の提案	94
5.3	一般化された TDGL 方程式への拡張	96
第 6 章	結論	97
付録 A	局所的な力のつり合いの導出	99
付録 B	単位系の変換	101
B.1	Kato-Chung の単位系から Dorsey の単位系へ	101
B.2	Kato-Chung の単位系から Hu-Thompson の単位系へ	102
参考文献		105

第 1 章

緒論

この章では超伝導量子渦の物理について、概説したのち、本研究の目的について述べる。

1.1 渦糸状態の物理

1911 年に Kamerlingh Onnes によって発見された超伝導は、最初に見つかった電気抵抗がゼロになるという特徴的な現象の他にも、完全反磁性や、磁束が量子化されるなど、常伝導状態では存在しない様々な現象が発現し盛んに研究されてきた。本研究では超伝導状態に量子化磁束が侵入した状態である渦糸状態と、渦糸状態に電流を印加したフラックスフロー状態を対象とする。

最近候補物質の探索が進められているトポロジカル超伝導体では [1]、量子コンピュータの基礎と考えられている Majorana 準粒子がその量子渦に存在することや [2]、2018 年に見つかったひねりを加えた 2 重層グラフェン [3] ではその 2 次元性から Kosterlitz-Thouless 転移が重要な役割を果たすなど、超伝導体中の量子渦の物理は最近の新奇な超伝導研究とも結びつく話題である。

1.1.1 第 I 種超伝導体と第 II 種超伝導体

本論文の対象となる渦糸状態の理解のため、まず、超伝導体の二種の分類について述べる [4, 5]。

第 I 種超伝導体と呼ばれるものは臨界磁場 H_c に達すると超伝導状態が壊れて常伝導状態になるという性質をもつ (図 1.2a)。第 I 種超伝導体の多くは Hg、Sn、Al などの単体金属である。

これに対して、多くの合金や化合物超伝導体は第 II 種超伝導体と呼ばれ、下部臨界磁場 H_{c1} と上部臨界磁場 H_{c2} という 2 つの臨界磁場で特徴づけられる。磁場が H_{c1} 以下のときは Meissner 状態であるが、 H_{c1} を超えると超伝導状態を保ったまま磁場が試料内部に侵入する。最終的に超伝導状態が壊れて常伝導に転移するのが H_{c2} である。 H_{c1}

と H_{c2} の間の磁場領域は渦糸状態と呼ばれる状態を形成する。(図 1.2b) 渦糸状態の超伝導体では、量子化された磁束 (量子渦糸) が試料を貫いている。この磁束量子の大きさは $\phi_0 \equiv h/2e = 2.07 \times 10^{-15} \text{Wb}$ である。ここで h は Planck 定数、 e は電子のもつ電気量である。渦糸の中心 (渦芯) は部分的に超伝導が壊れた状態になっており、その周りを超伝導電流が循環している。渦芯の半径はコヒーレンス長と呼ばれる長さの程度である。コヒーレンス長は物質によって様々な長さだが、典型的な第1種超伝導体では 300 nm 程度 [4,5]、第2種超伝導体、中でも銅酸化物系の高温超伝導体では 1 ~ 3 nm 程度 [6] である。

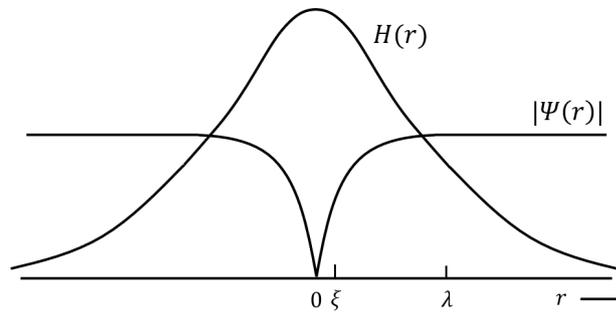


図 1.1: 単一の渦糸状態の模式図。秩序変数の振幅が 0 になっている点で磁場が局所的に侵入している。秩序変数はコヒーレンス長 ξ 程度で回復し、磁場は磁場侵入長 λ 程度で減衰していく。

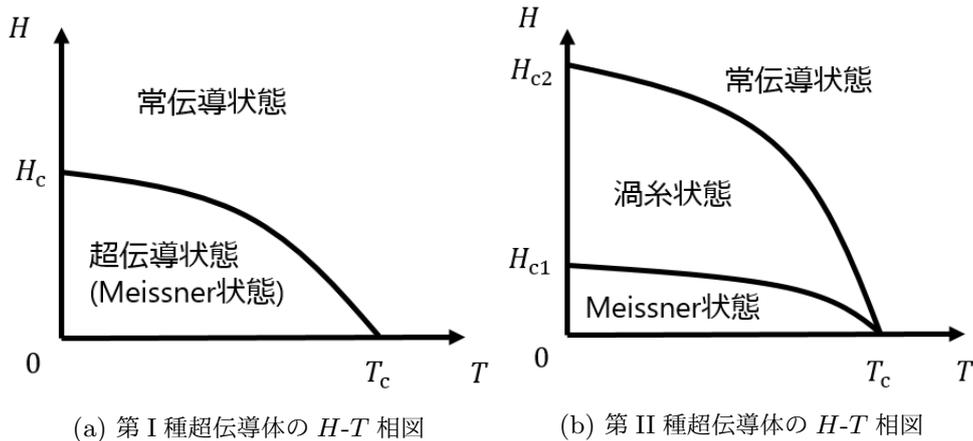


図 1.2: 超伝導体の分類

高温超伝導体の磁場温度相図

超伝導体の磁場-温度相図については、1980 年代の高温超伝導体発見 [7-10] 以降、さらに理解が進み、高温超伝導体の特徴を反映した磁場-温度相図が得られている [4,6]。図

1.3 に示すように、上部臨界磁場 H_{c2} は相転移線ではなく、クロスオーバー曲線になっている。高温超伝導体では平均場で期待される H_{c2} 線より高い温度から秩序変数の振幅が徐々に発達し、抵抗減少が始まる。さらに温度が下がると、磁束が切れ目のない 1 本の線としての様態を示すが、まだ動的にうねるなどしており、磁束液体としての性質を持つ。この段階では秩序変数の位相が時間的、空間的にゆらいでおり、相転移は生じていない。図中に示した磁束格子融解曲線相転移であり、これは 1 次の相転移である。その理由は秩序変数の振幅が有限になってから磁束格子が形成されるからである。ただし、格子が出現しても、ピン留め力が発達しなければ、抵抗はゼロにならない。

磁場強度がある程度以上になると、層をよぎっての量子化磁束の対応関係が消失し、各層ごとに独立した挙動を示し、磁束パンケーキとよばれる構造になると考えられるようになった。ここで見られる境界線は次元交差線や、2D-3D クロスオーバーラインとよばれ、温度依存性がほとんどない。

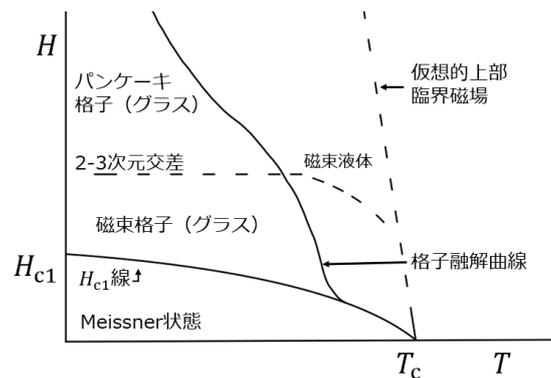


図 1.3: 高温超伝導体の模式的な磁場-温度 (H - T) 相図。c 軸方向に異方性の強い (2 次元性の強い) 系、具体的には $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCuO}_8$ を念頭に置いている。文献 [6] の図 5.1 を参考にした。

表面エネルギーによる超伝導体の分類

ある超伝導体が第 I 種であるか第 II 種であるかは、表面エネルギーの正負によって決まる [11, 12]。表面エネルギーは、磁束を排斥するときの正のエネルギーと、常伝導状態から超伝導状態に凝縮する際の負のエネルギーの兼ね合いで決まる。

ここで、超伝導体へ磁場が染み出す長さである磁場侵入長 λ を考えることにする。超伝導体は磁場を排斥する性質をもち、超伝導体表面から内部に向かって磁場が指数的に減衰する。その減衰の長さを磁場侵入長と呼び、London 方程式から導出できる [13]。その典型的な長さは 100 nm 程度である [4, 5]。

超伝導と常伝導の境界を考えたとき、磁場侵入長 λ がコヒーレンス長 ξ より小さいならば、超伝導内部には磁場がほとんど侵入せず、超伝導の秩序変数が小さい領域が長いため、磁場を排斥するエネルギーが凝縮エネルギーに比べて優位になり、表面エネルギーは

正となる。一方、 λ が ξ より長い場合には、磁場を排斥するエネルギーに比べ、凝縮エネルギーの方が優位になり、表面エネルギーは負となる。表面エネルギーは超伝導内部に磁束が侵入するときのエネルギーと考えられるので、前者が第 I 種、後者が第 II 種である。

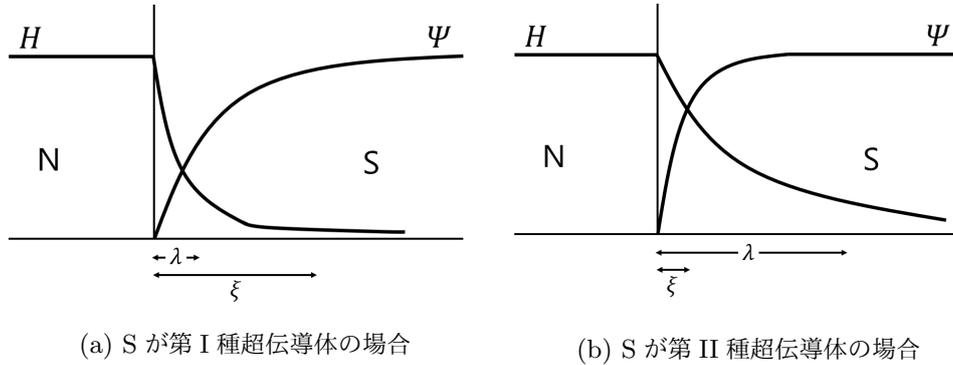


図 1.4: 常伝導-超伝導界面における秩序変数の変化と磁場の侵入。

この表面エネルギーの議論は Ginzburg-Landau 理論によって定量的になされたため、 λ と ξ の比 $\kappa = \lambda/\xi$ は Ginzburg-Landau (GL) パラメータと呼ばれている。 $\kappa = 1/\sqrt{2}$ を境に表面エネルギーの正負が分かれ、 $\kappa < 1/\sqrt{2}$ が第 I 種超伝導、 $\kappa > 1/\sqrt{2}$ が第 II 種超伝導である。

渦糸状態の実験的観測

第 II 種超伝導体に対して渦糸が格子を組むことを Abrikosov が GL 方程式による解析で予測した [14]。これは実験的にも確かめられた。(図 1.5)

渦糸を観測する方法・プローブとしては Bitter 法 [15]、走査型トンネル顕微鏡 (Scanning Tunneling Microscope = STM) [16]、Lorentz 顕微鏡 [17]、磁気光学イメージング法 (Magneto-Optical Imaging) [18]、SQUID 顕微鏡 (Superconducting QUantum Interference Device Microscope) [19] などがある。

Bitter 法は、もっとも古くから行われている手法である。渦糸状態の超伝導体表面付近の空間には渦糸格子を反映した局所磁場分布が形成される。そこに強磁性微粒子をふりかけると、局所磁場が強い渦糸中心部付近に選択的に付着する。それを取り出して走査電子顕微鏡 (SEM) などで観察する。Bitter 法では動的な情報を得ることはできず、空間分解能は微粒子のサイズと局所磁場分布のコントラストできまる。

走査型トンネル顕微鏡 (STM) では、局所電子状態、すなわち、超伝導のギャップスペクトルの局所測定を行う。つまり、超伝導ギャップの空間変化を観察する。この手法では渦糸のコア部分における準粒子スペクトルを高い空間分解能で測定できる。

Lorentz 顕微鏡は透過型電子顕微鏡 (TEM) において意図的に焦点をぼかして撮像する手法で、磁性体の磁区構造の観察などに用いられてきた。これは試料中の格子欠陥などミクロ構造と渦糸のピン留めとの関係を調べる強力な手段となり、また、大きな特徴とし

て、渦糸の運動を実時間で観察できるという点が挙げられる。

磁気光学イメージング法は強磁性体薄膜のファラデー回転を利用して局所磁場分布を視覚化する方法である。渦糸 1 本ずつを観察するほどの分解能はないが、局所磁束密度分布を実時間で観察する方法として利用される。

SQUID 顕微鏡は、磁束計である SQUID (Superconducting QUantum Interference Device) の空間分解能を高め、磁場の空間変化を測定する顕微鏡である。SQUID は超伝導リングを貫く磁束を Josephson 効果を用いて観測するプローブのことである。ここ数年で磁場分解能、空間分解能が向上しただけでなく [19, 20]、時間分解能も向上し渦糸の高速ダイナミクスの観測が報告されている [21]。

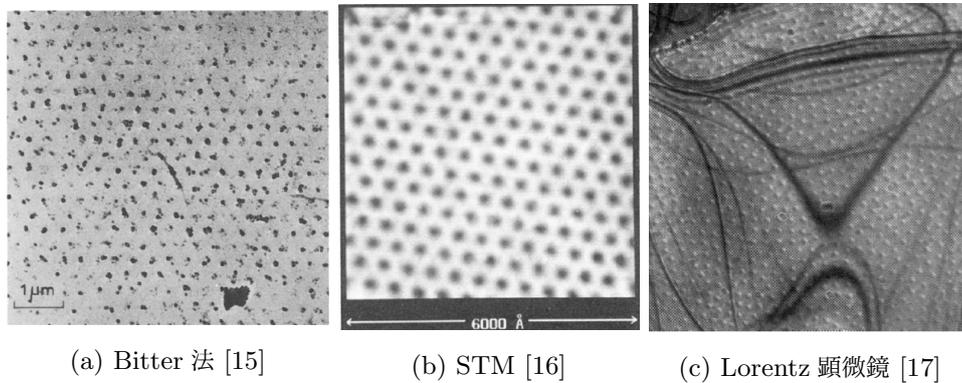


図 1.5: 実験で観測された渦糸格子

1.1.2 磁束フロー

渦糸の運動は渦糸の働く様々な力の釣り合いによって決まる。なかでも重要なのはピン留めと磁束フローである。

渦糸は部分的に超伝導が壊れた状態であるが、格子の欠陥などのせいですでに局所的に超伝導が壊れている場所に渦糸を置く配置は、そうでない場所に置く配置よりもエネルギー的に得である。すると、その空間的に不均一な部分に渦が留まることになる。これがピン留め (pinning) である。また、そのピン留めする力のことをピン留め力と呼ぶ。

一方で、ピン留めが無いか十分に弱い状況を考える。このとき、超伝導体に輸送電流を流すと、磁束フロー (flux flow) と呼ばれる現象が生じる [22, 23]。このとき、超伝導体内部に電場が発生し、有限の抵抗が生じる。この現象の重要性は輸送係数が物質のバルクの性質によって決定されることにある。磁束フロー抵抗を測定した実験が図 1.6 である。

Bardeen-Stephen は、渦糸の構造を、半径が ξ 程度の円柱の渦糸領域は完全な常伝導状態、その外側は完全な超伝導状態、と簡単にモデル化し、ローレンツ力と摩擦力のつり合いの式から磁束フロー抵抗を計算した [25]。結果として、

$$\frac{\rho_f}{\rho_n} = \frac{H}{H_{c2}} \quad (1.1)$$

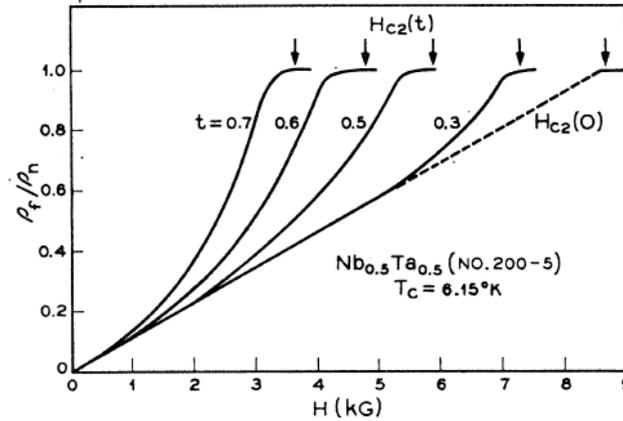


図 1.6: Kim *et al.* による NbTa に対する磁束フロー抵抗の測定 [24]。 ρ_f, ρ_n はそれぞれ磁束フロー抵抗率、常伝導状態での抵抗率である。また、 $t = T/T_c$ である。点線は $t = 0$ のときに期待される ρ_f/ρ_n の振る舞いである。

を導いた。このモデルは Kim らによる実験の $H \rightarrow 0$ や、あるいは実験値を絶対零度へ外挿した場合を説明した。

一方で Schmid はこの実験を Time-dependent Ginzburg Landau (TDGL) 方程式を用いた解析で説明した [26]。Schmid の理論は $t \approx 1$ という TDGL 方程式の適用条件のもとで、 H_{c2} 付近、すなわち、常伝導状態になる直前の抵抗率の比 $R = \rho_f/\rho_n$ の、磁場 H に対する傾き dR/dH を計算し、その結果は定量的にも一致した。その後 Gork'ov-Eliashberg によって、TDGL 方程式は磁性不純物を多く含むギャップレス超伝導体でのみ成立することが示された。Gork'ov-Eliashberg, Gor'kov-Kopnin, Caroli-Maki, Larkin-Ovchinnikov らによって TDGL 方程式、Usadel 方程式、準古典グリーン関数の運動方程式を用いてフラックスフロー伝導度が H_{c1} 近傍または H_{c2} 近傍で計算された [27-30]。より適用範囲の広い TDGL 方程式も Watts-Tobin-Krähenbühl-Kramer によって導出された。[31]

Hall 伝導度の微視的な計算に課題が残っているものの、グリーン関数の運動方程式または TDGL 方程式を用いたフロー状態の量子渦のフロー伝導度を線形応答の範囲内で求めるアルゴリズムは Gor'kov-Kopnin, Larkin-Ovchinnikov によって 70 年代にはすでに確立している。本研究の目的とも関連するのでここで概略だけ紹介する。

フロー伝導度を求める手順は

1. グリーン関数、秩序変数、電磁場などのフロー状態の物理量 $\mathcal{O}_1(\mathbf{r}, t), \mathcal{O}_2(\mathbf{r}, t), \dots$ を、量子渦の速度 \mathbf{v} 、平衡状態 $\mathcal{O}_i^{(0)}(\mathbf{r})$ の解とそれからの変形の効果 $\mathcal{O}_i^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(\mathbf{v})$ を用いて

$$\mathcal{O}_i(\mathbf{r}, t) = \mathcal{O}_i^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \mathcal{O}_i^{(1)}(\mathbf{r})$$

と表し、

2. $\mathcal{O}^{(1)}(\mathbf{r}) = (\mathcal{O}_1^{(1)}(\mathbf{r}), \mathcal{O}_2^{(1)}(\mathbf{r}), \dots)^t$ に対する線形非同次方程式

$$L[\mathcal{O}_1^{(1)}](\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

導く。ここで L は線形演算子、非同次項 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{O}_i^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ の線形結合を成分とするベクトルである。上記の線形非同次方程式は与えられた境界条件の下で解が存在するためには非同次項と境界条件の間にある関係式、すなわち解の存在条件が成立しなくてはならない。境界条件のうち、量子渦から離れた領域での境界条件は、輸送電流 \mathbf{j}_{tr} を含み、非同次項は量子渦の速度 \mathbf{v} を含むため、解の存在条件が \mathbf{j}_{tr} と \mathbf{v} の線形関係式が得られる。

3. 量子渦が有限密度存在する定常状態では超伝導体内部での磁場の平均値 \mathbf{B} と電場の平均値 \mathbf{E} の間に

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$$

が成り立つことが示されているので、これと \mathbf{j}_{tr} と \mathbf{v} の線形関係式から、 \mathbf{j}_{tr} と \mathbf{E} の線形関係式が導かれる。

ここで重要な点は、フロー伝導度を導くのに、線形非同次方程式 (1.2) そのものを解く必要がないという点である。 $\mathcal{O}_i(\mathbf{r})$ として、TDGL 方程式であれば、秩序変数とベクトルポテンシャルと、スカラーポテンシャルだけで済むが、グリーン関数の方程式の場合には Wigner 表示でのグリーン関数 $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}, \omega)$ がこれに加わり、相対運動量や相対周波数 ω の分だけ線形問題におけるベクトルの次元が増える。この点において (1.2) の解の存在条件から伝導度を導く計算法は優れている。

1.1.3 磁束に働く力

ピン留め状態に働く力

磁束に働く力の考察はピン留めが強い場合に始まった。輸送電流下で磁束に働く力として Lorentz 力の存在を初めに指摘したのは Gorter である [32]。Kim らはその力を用いて磁化曲線のヒステリシスの実験結果の解釈を与えた。Gorter の指摘に対して Josephson は物質中の電磁気学の議論を用いて、平衡状態にある渦糸状態の超伝導体内部ではピン留めがない場合には空間の各点で

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

が成り立ち、単位体積当たりのピン留め力である、ピン留め力密度 \mathbf{P} が存在するときには定常状態、すなわち、ピン留めによって実現する準安定状態においては超伝導体内部の各点で

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{P} = 0 \quad (1.4)$$

が成り立つことを示した [33]。ここで \mathbf{B} は空間的に粗視化した磁場 (magnetic induction) であり、 \mathbf{J} は、 \mathbf{B} について共役なベクトル場 \mathbf{H} を用いて、関係式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.5)$$

によって与えられるマクロな電流密度である。関係式 (1.4) の一つの解釈は一本の量子渦に働く力が

$$\mathbf{J} \times \phi_0 \quad (1.6)$$

で与えられるというものである。 ϕ_0 は大きさが $h/(2e)$ に等しく、向きが磁極線の方向を向くベクトルである。この解釈は一見自然なものに見えるが、Kim-Stephen は彼らの総説記事 [22] の中でこの解釈の正当性はそれほど自明なものではないとしている。 \mathbf{J} と \mathbf{B} はマクロな量であり、 \mathbf{J} がどのような量を「粗視化」したのか、その意味が明瞭ではないからである。Tinkham は彼の著書 [4] の中で \mathbf{J} は全電流を平均したものの $\nabla \times \mathbf{B}$ とは異なり、電流の「非平衡部分」(彼はそれ $(\nabla \times \mathbf{H})$ を \mathbf{J}_{ext} と書いている) であるとしている。粗視化したレベルで導出された Lorentz 力は磁化曲線の振る舞いなど実験結果を理解するのに貢献していたが上記のように物理的解釈に困難な点がある。

なお、Kim-Stephen は同じ総説 [22] の中で、一本の量子渦にかかる力をより厳密に計算する方法は、応力テンソルによるものであることを指摘している。

London 方程式を用いて 2 本直線状の量子渦の間に働く力を計算したのが Friedel-deGennes-Matricon である [34]。彼らは量子渦の効果を取り込んだ London 方程式

$$\mathbf{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \phi_0 \mathbf{e}_z \sum_{i=1,2} \delta_{2D}(\mathbf{r}_i) \quad (1.7)$$

の解

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_z \phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{\lambda} \right) + K_0 \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{\lambda} \right) \right) \quad (1.8)$$

をエネルギーの表式

$$E = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (\lambda^2 (\nabla \times \mathbf{h})^2 + \mathbf{h}^2) \quad (1.9)$$

に代入し、2つの量子渦間の相互作用が

$$E_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{\phi_0^2}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\lambda} \right) \quad (1.10)$$

で与えられることを示した。ここで \mathbf{r}_i は $i(=1,2)$ 番目の量子渦の 2次元座標での位置を表し、 K_0 は 0 次の第二種変形 Bessel 関数である。この関数は $K_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\ln(r)$ となり、上記相互作用は近距離で対数発散するが、この模型自体がコヒーレンス長 ξ 程度の短距離のカットオフを持つので、2つの量子渦は ξ 以上には近づかないとしている。ここで、2つの量子渦の間に働く力の大きさは

$$F = -\frac{dE_{\text{int}}(R)}{dR} = \frac{\phi_0^2}{2\pi\lambda^3} K_1 \left(\frac{R}{\lambda} \right) = J(R)\phi_0, \quad R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (1.11)$$

と書き表すことができる。ここで $J(R)$ は量子渦が距離 R だけ離れた地点に作る電流密度の大きさである。この表式を見ると量子渦に働く力は、その地点にほかの量子渦が作る電流密度によって磁気的な Lorentz 力を受けるように見えるので、Josephson のマクロな関係式をミクロに正当化していると思える。

フロー状態に働く力

磁束フローに関する研究が進む中で、渦糸の運動がどのような力でもたらされているかが議論になった。de Gennes-Matricon は超流動中の量子渦との類推から流体力学的な力である、マグナス力が存在すると考えた [35]。それに対して、Bardeen-Stephen は電流が定常的に流れている状態では電子電子散乱ではなく電子格子散乱が優位であることなどから、力の起源は Magnus 力ではなく電磁気的な力すなわち、Lorentz 力であると主張した [25]。また上述したとおり、Bardeen-Stephen による議論は実験と一致していた。

これを受けて Nozières-Vinen は、それまで得られていた実験を説明するにあたって、実用的には 2 つの理論に違いはないとしながらも、駆動力には Magnus 力が存在し、摩擦力の表式が変更されるべきだと主張した [36]。また、第 II 種超伝導極限 ($\lambda \gg \xi$) の下でストレスソルを用いて駆動力を計算し、Magnus 力の存在は電磁場の影響によらないことを示した。しかしながら、Bardeen-Stephen の理論も、Nozières-Vinen の理論も磁束フロー Hall 抵抗については実験と異なる結果を与えていた。

量子渦にかかる力は 1989 年に Iye らによって報告された銅酸化物高温超伝導体の磁束フロー Hall 抵抗の異常 [37] を巡って、1990 年代に再び議論の対象となった。Dorsey は TDGL 方程式の粘性係数を複素数に拡張したモデルを用いて第 II 種超伝導極限 ($\lambda \gg \xi$) における磁束フロー Hall 抵抗を計算した [38]。その結果は、駆動力には Magnus 力が存在することを示唆するものであった。また、TDGL 方程式の適用範囲外である $T \ll T_c$ での議論が尽くされていないことに疑問を持った Ao-Thouless は微視的理論である多体系の波動関数を用いて議論をすすめ、第 II 種超伝導極限 ($\lambda \gg \xi$) の下で Berry 位相から Magnus 力を導出した [39]。また、この論文で Magnus 力は電磁場の影響を受けずに、いつでも存在することを示し Nozières-Vinen の主張を支持した。

しかし、Sonin は Ao-Thouless の議論を、準粒子からくる Iordanskii 力と不純物からくる Kopnin-Kravtsov 力を考慮に入れていないとして批判し、これらも取り入れた有効 Magnus 力を計算した結果 Magnus 力は完全に 0 となることを示した [40]。

さらに Ao は Kopnin-Volovik との議論、論争 [41,42] の中で、Gor'kov-Kopnin, Larkin-Ovchinnikov が用いた TDGL 方程式や Green 関数法を用いたフロー伝導度の計算法とその結果に対して疑義を表明している。

1998 年 Chen らは Ao-Thouless の議論をきっかけに、Friedel-deGennes-Matricon によって得られた量子渦の間に働く力を再考した [43]。

London 方程式のエネルギー (1.9) は超伝導電流の運動エネルギー項と静磁場のエネルギーの和で与えられているので、量子渦の間に働く力も運動エネルギー由来の寄与と磁気的な Lorentz 力の合力であると結論した。

2003 年 Narayan は、量子渦に働く力 (1.6) を磁束が電流から受ける力とみれば、それは (磁場から電流が受ける力としての) 通常の Lorentz 力の反作用であるから、負符号が付かないかについて考察し、超伝導体の特殊性を、2 つの渦糸が同じ凝縮体 (超伝導体) にあるときに存在する電流電流相互作用項に帰着させている。

2007 年 Chen らは一次元 Josephson 接合系で輸送電流の下で運動する Josephson 量子渦にかかる力を数値計算し、向きは $\mathbf{J} \times \phi_0$ に一致するが、大きさは補正されることを報告した。

Babaev が彼の共著書 [44] の中で指摘しているように、Friedel らが London 方程式を用いて計算した量子渦間のエネルギー (1.10) を GL 方程式を用いて計算すると

$$E_{\text{int}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = C(\kappa)^2 \frac{\phi_0^2}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\lambda} \right) \quad (1.12)$$

で与えられる。 $C(\kappa)$ は定数である。これから、London 方程式の場合と同様に、量子渦間に働く力の大きさを求めると

$$F = C(\kappa)J(R)\phi_0, \quad R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (1.13)$$

となる。余計な定数 $C(\kappa)$ がかかることは二つの量子渦間に働く力が純粋な磁気的な Lorentz 力ではないことを示唆している。

2016 年には Kato-Chung が TDGL 方程式の渦芯から十分遠方の漸近解から渦を囲む領域に流れ込む運動量をストレステンソルの表面積分として計算し、孤立渦にかかる駆動力は Lorentz 力と流体力の合力であると結論した [45]。Kato-Chung による駆動力の起源の定式化は本論文でも用いるため、第 2 章でより詳しく解説する。

1.2 現状の整理

このように、Bardeen-Stephen、Nozières-Vinen 以来、50 年にわたって磁束に働く駆動力の起源に関する論争は続いていたが、いまだ解決していない。この節ではこれまでの現状を整理し、論点を集約する。

1. 粗視化した場合の力と、一本の量子渦にかかる力の関係
2. ピン留めされている量子渦にかかる力とフロー状態にある量子渦にかかる力の関係
3. Bardeen-Stephen, Nozieres-Vinen の主張の検討
4. Larkin-Ovchinnikov, Gorkov-Kopnin の計算法と渦にかかる力の起源の関係
5. Sonin, Ao-Thouless の論争、駆動力の定義
6. Ao によって疑義が示された TDGL 方程式やグリーン関数法による伝導度の計算法の妥当性
7. Chen, Narayan の議論に欠けているもの
8. Kato-Chung の結果と議論に欠けているもの

上記論点に対する我々の立場を明らかにする。

1. マクロとミクロを結ぶことは重要であるが、我々は孤立した一本の量子渦にかかる力に絞って研究を行う。理論計算もまさに孤立量子渦にかかる力に関する上、

一本の量子渦の測定も可能にありつつあるため、理論実験両面において孤立量子渦に関する問題を目指すことに意義があると考えたためである。

2. ピン留めされた量子渦とフロー状態の量子渦にかかる力を同じ枠組みで扱い、2の論点に応えることを目的とする。
3. Bardeen-Stephen は Kim らの実験結果の絶対零度への外挿値を、因子 $1/2$ だけのずれを除けば現象論的モデルを用いて説明できた。一方、Bardeen-Stephen と定量的に近い結果は微視的な基礎を持つ Usadel 方程式による計算でも再現できている (Gorkov-Kopnin)。Bardeen-Stephen 理論は先駆的であり物理的描像が明快である一方、微視的理論から導出されていない理論の妥当性を考察することは難しいため本研究では Bardeen-Stephen 理論に対して直接考察することはしない。Nozieres-Vinen 模型も同じ理由で直接考察はしないが、超伝導量子渦にかかる駆動力をストレステンソルを用いて計算し、流体力の存在を示した最初の研究であることは重要な成果である。微視的理論から導かれる模型において同様な力が働くかどうか本研究において重要な論点である。
4. フロー伝導度を計算する Gorkov-Kopnin-Larkin-Ovchinnikov のアルゴリズムではフロー状態を記述する線形非同次方程式を解かずに伝導度が求められるため、かえって駆動力の起源を知ることができない。さらに解の存在条件が

$$\mathbf{J} \times \boldsymbol{\phi}_0 + \mathbf{F}_{\text{env}} = 0$$

として、渦にかかる力のつりあい関係式として得られる上に、彼らが論文、総説、専門書で $\mathbf{J} \times \boldsymbol{\phi}_0$ を繰り返し Lorentz 力と呼ぶために、駆動力は磁気的な Lorentz 力であると受け止めることが多いと思われる。一方でこのアルゴリズムを用いたほとんどの研究が $\lambda/\xi \gg 1$ の状況を扱い、輸送電流が量子渦から離れるにしたがって空間的な一様流に漸近する状況を考えている。本研究では彼らのアルゴリズムが適用されたもっとも単純で、かつ、微視的に導出された模型である TDGL 方程式を有限の $\kappa = \lambda/\xi$ で、フロー状態の線形非同次方程式を解き、フロー状態の量子渦にかかる力の起源を調べる。

5. この論争は渦にかかる駆動力とそれと釣り合う力 \mathbf{F}_{env} を明確に定義することで、駆動力の議論とは無関係であることがわかる。古典流体の場合と同じく、本研究では渦を囲む領域に流れ込む単位時間当たりの運動量を駆動力とし、渦を囲む領域内で単位時間当たりに失われる運動量を environmental force \mathbf{F}_{env} と呼ぶ。本研究で扱うのは、駆動力の性質であり、Sonin と Ao-Thouless が議論しているのは \mathbf{F}_{env} のうち、量子渦の速度に垂直に働く力についてである。
6. Ao によってグリーン関数法で輸送現象を扱うこと、またその縮約で得られる TDGL 方程式で扱うことへの疑義が提起された。グリーン関数法で輸送現象を扱うこと自体は超伝導ゆらぎの理論やアンダーソン局在で十分にその有効性が確かめられている。本研究では TDGL 方程式やグリーン関数法で輸送現象を扱うことは有効であるという立場をとる。

7. Chen や Narayan は上記 2 と 4 の問いに答えていない。
8. フロー状態の線形非同次方程式を解いていない。またフロー状態の量子渦にかかる力の起源に関する実験的検証法が提案されていない。

以上に整理した通り、我々は磁束フロー状態に働く駆動力の問題を、微視的に導出されている方程式を用いて駆動力と散逸力をそれぞれ定義し解決すること、加えて、磁束に力がかかる現象としてピン留め状態の力に注目し、それによって渦に掛かる力の実験的な検証法を提案することを目指す

1.3 本論文の目的

本論文の目的は以下の 2 つである。

1. TDGL 方程式の単一磁束フロー解について、磁場侵入長を有限としたまま境界条件を指数的に減衰する輸送電流に接続するように定め、全領域に渡って解を求める。
2. ピン留め状態とフロー状態を統一的に扱い、実験的検証法を提案する。

とくに方程式の境界条件を、超伝導体の外部から内部に向かって指数減衰する輸送電流とするのが本論の大きな特徴である。これまでの TDGL 方程式では輸送電流は系の中で空間的に一様であるという前提のもとで電場、磁場などの物理量を導出していた。[38]。しかし、これは渦芯近傍での漸近形の導出までにとどまっている。渦芯と遠方のバルク領域を接続する中間領域について解が求まれば、渦周辺の磁場や電流、エネルギー散逸といった物理量を正確に記述できるようになる。最近、磁束フローに関していくつかの実験的・理論的進展が見られた [46–49]。そこで、輸送係数を計算する手法が確立された TDGL 方程式でダイナミクスに関する理解を深めておくことは、特に実験結果との結びつきを議論する際に有意義である。また、今後、TDGL 方程式が適用できないような、“clean” な系 (磁束コア内の平均自由行程が長い系) や、スピン流による渦糸の輸送現象といった問題を考える際にも、ここで得られた知見が基礎となる。

1.4 本論文の構成

第 2 章では本論を読み進めていくにあたって必要な先行研究の計算をまとめる。フラックスフロー伝導度を TDGL 方程式が解を持つ条件から解析した Dorsey [38] の議論は本論においても重要な議論である。Kato-Chung による磁束フロー状態での駆動力の定式化は本論でも用いられているため、この章で詳説する。

第 3 章では、TDGL 方程式を解くにあたり、これまでの空間的に一様な輸送電流に接続するという境界条件から、London 方程式に従って外側から内部に向かって指数的に減衰する輸送電流に接続するという境界条件へと設定し直し、計算する。その条件のもと

で TDGL 方程式の漸近解を求めるとともに、 $r \sim 0$ での級数解を計算し、数値計算へとつなげる。

第 4 章ではフロー状態の数値計算の結果を示す。特に渦芯のごく近傍でも遠方でもない中間領域で TDGL 方程式を解いた結果として、Lorentz 力や散逸関数の局所的な図を示す。散逸領域での渦糸にかかる駆動力の起源について議論する。

第 5 章でピン留め状態における駆動力について議論し、ピン留め状態を通じた実験的な駆動力の検証法について述べる他、TDGL 方程式の結果をどこまで一般化できるかを述べる。

最後に、第 6 章で本論文で得られた結果とその意義について述べる。

第 2 章

背景

本章では、本研究をすすめるにあたって必要な先行研究の定式化を解説する。

2.1 虚部を含んだ TDGL 方程式

本節では、平衡状態の GL 方程式を用いた孤立量子渦の性質と、本論を読み進めていく上で特に重要な先行研究である、Dorsey(1992) について解説する。Dorsey の論文は、フラックスフロー Hall 効果を説明するために緩和係数 γ を複素数にしていること、解の存在条件 (solvability condition) を導出し、その式が電流と渦糸速度 v を結びつけ、駆動力を導出することに大きな役割を果たしている。

まずはじめに、巨視的な超伝導秩序変数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ についての運動方程式を書き下ろすと、

$$\hbar \left(\partial_t + i \frac{\tilde{\mu}}{\hbar} \right) \psi = -\Gamma \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi^*} \quad (2.1)$$

となる。ここで、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m} \left| \left(\nabla - i \frac{e^*}{\hbar} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + a(T) |\psi|^2 + \frac{b}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] \quad (2.2)$$

と書かれている。上の式で、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルで、 $\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{A}$ を満たす。 m は Cooper 対の有効質量で、 $e^* = 2e$ は Cooper 対の有効電荷である。 e^* は正に取る。 $a(T) = a_0(T/T_c - 1)$ であり、 $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$ は無次元の複素緩和率である。 $\Gamma_1 > 0$ ならば、この方程式は平衡状態の GL 方程式へと緩和していく。

総化学ポテンシャル $\tilde{\mu}$ は

$$\tilde{\mu} = \mu + e^* \Phi + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta n_s} \quad (2.3)$$

と書かれている。 μ は化学ポテンシャル、 Φ は電気的なスカラーポテンシャル、 $n_s = |\psi|^2$ は超流動密度であり、 $\delta \mathcal{H} / \delta n_s$ は超流動密度の運動エネルギーを表している。 $(\delta \mathcal{H} / \delta n_s) \psi \sim \delta \mathcal{H} / \delta \psi^*$ とおけば、式 (2.1) は

$$\hbar \left(\partial_t + i \frac{\mu}{\hbar} + i \frac{e^*}{\hbar} \Phi \right) \psi = -(\Gamma + i) \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi^*} \quad (2.4)$$

と書き直せる。無次元の秩序変数の緩和時間を

$$\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\Gamma_1 - i(1 + \Gamma_2)}{\Gamma_1^2 + (1 + \Gamma_2)^2} \quad (2.5)$$

と定義すると、方程式はさらに、

$$\hbar\gamma \left(\partial_t + i\frac{e^*}{\hbar}\tilde{\Phi} \right) \psi = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - i\frac{e^*}{\hbar}\mathbf{A} \right)^2 \psi + |a|\psi - b|\psi|^2\psi \quad (2.6)$$

と書くことができる。 $\tilde{\Phi} = \Phi + \mu/e^*$ である。 $\tilde{\Phi}$ と Φ の違いは一般には小さく [26]、以降はこの違いを無視することにする。

さらにベクトルポテンシャルについての運動方程式が必要だが、これは Ampère の法則である。すなわち、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 4\pi(\mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s) \quad (2.7)$$

である。これは連続の式 $\nabla \cdot (\mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s) = 0$ を満たす。超伝導電流、常伝導電流はそれぞれ

$$\mathbf{J}_s = \frac{\hbar e^*}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{(e^*)^2}{m}|\psi|^2\mathbf{A} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{J}_n = \sigma^{(n)} \cdot \mathbf{E} = \sigma^{(n)} \cdot (-\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A}) \quad (2.9)$$

と書ける。ここで、 $\sigma^{(n)}$ は常伝導状態の伝導度テンソルで、

$$\sigma^{(n)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(n)} & \sigma_{xy}^{(n)} \\ \sigma_{yx}^{(n)} & \sigma_{yy}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

である。

ここから、式 (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) を無次元化して計算を簡単にする。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \lambda\mathbf{r}', & t &= (\hbar/|a|)t', & \psi &= (|a|/b)^{1/2}\psi', \\ \mathbf{A} &= \sqrt{2}H_c\lambda\mathbf{A}', & \Phi &= (|a|/e^*)\Phi' \\ \sigma &= (2m/\hbar)(1/4\pi\kappa^2)\sigma' \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで磁場侵入長は $\lambda = [mb/4\pi(e^*)^2|a|]^{1/2}$ 、コヒーレンス長は $\xi = \hbar/(2m|a|)^{1/2}$ 、熱力学的な臨界磁場は $H_c^2 = 4\pi|a|^2/b$ である。Ginzburg-Landau パラメータ (GL パラメータ) は $\kappa = \lambda/\xi$ と表される。これらを用いて無次元化したものが、

$$(\gamma_1 + i\gamma_2)(\partial_t + i\Phi)\psi = \left(\frac{\nabla}{\kappa} - i\mathbf{A} \right)^2 \psi + \psi - |\psi|^2\psi \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s \quad (2.13)$$

$$\mathbf{J}_n = \sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa}\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A} \right) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{2i\kappa}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A} \quad (2.15)$$

である。簡単のため、無次元単位系でのプライム記号「'」は落とすことにする。ここからは式 (2.12) から (2.15) の方程式系を扱う。 $\sigma^{(n)}$ はテンソルであり、直後の「 \cdot 」はテンソル積を表している。ここで、秩序変数を振幅 f と位相 χ を用いて

$$\psi(r, t) = f(r, t)e^{i\chi(r, t)} \quad (2.16)$$

と書くことにする。また、この位相 χ を用いてベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを以下のようにゲージ不変な形に書き換える。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \frac{\nabla\chi}{\kappa} \quad (2.17)$$

$$P = \Phi + \partial_t\chi. \quad (2.18)$$

以後はとくに断りがなければベクトルポテンシャルというときには \mathbf{Q} 、スカラーポテンシャルというときには P を指す。この表式で、電磁場はそれぞれ

$$\mathbf{h} = \nabla \times \mathbf{Q}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\kappa}\nabla P - \partial_t\mathbf{Q} \quad (2.20)$$

と表せる。

扱う方程式系を f, χ, \mathbf{Q}, P を用いて書き直していく。TDGL 方程式 (2.12) を実部と虚部に分解すると

$$\gamma_1\partial_t f - \gamma_2 P f = \frac{1}{\kappa^2}\nabla^2 f - Q^2 f + f - f^3 \quad (2.21)$$

$$\gamma_2\partial_t f + \gamma_1 P f + \frac{1}{\kappa}f\nabla \cdot \mathbf{Q} + \frac{2}{\kappa}\mathbf{Q} \cdot \nabla f = 0 \quad (2.22)$$

である。Ampère 則 (2.13) は (2.14)、(2.15) と合わせて、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} = \sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa}\nabla P - \partial_t\mathbf{Q} \right) - f^2\mathbf{Q} \quad (2.23)$$

と書くことができる。(2.15) はとくに、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \frac{1}{2i\kappa}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2\mathbf{A} \\ &= f^2\frac{\nabla\chi}{\kappa} - f^2\mathbf{A} \\ &= -f^2\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.24)$$

である。さらに、(2.22) を変形しておく。全体に f を掛けると、

$$\gamma_2 f\partial_t f + \gamma_1 P f^2 + \frac{1}{\kappa}\nabla \cdot (f^2\mathbf{Q}) = 0. \quad (2.25)$$

さらに、系内に電流の湧き出しが無いこと、すなわち、 $\nabla \cdot (\mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s) = 0$ より、

$$\nabla \cdot (\sigma^{(n)} \cdot \mathbf{E}) + \nabla \cdot (-f^2\mathbf{Q}) = 0. \quad (2.26)$$

したがって、(2.25) と組み合わせて、

$$\gamma_2 f \partial_t f + \gamma_1 P f^2 + \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot \left[\sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \nabla P - \partial_t \mathbf{Q} \right) \right] = 0. \quad (2.27)$$

ここまでの式で $\gamma_2 = 0, \sigma_{xy}^{(n)} = 0$ とおけば、この方程式は Schmid [26] や Hu-Thompson [50]、Gor'Kov-Kopnin [28] の表式に一致する。

2.1.1 Solvability Condition

ここからの計算では、渦糸は一様に流れる。したがって、秩序変数やベクトルポテンシャル、化学ポテンシャルといった量は $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$ の関数で表されたとする。 \mathbf{v} は渦糸が流れる速度である。そして、以下ではこの \mathbf{v} について方程式を展開する。0 次の項は平衡状態の GL 方程式となり、1 次については非斉次な微分方程式を解くという問題になる。

調べたいのはこの \mathbf{v} について 1 次の方程式であるが、この非斉次微分方程式が解を持つための条件、すなわち Solvability Condition を考えることから Hall 角などの物理量を導出していく。

\mathbf{v} の 1 次までの展開

方程式系は (2.21)、(2.23)、(2.27) である。 $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$ の関数であることを用いて、TDGL 方程式の時間微分を $\partial_t \rightarrow -\mathbf{v} \cdot \nabla$ と置き換える。

$$-\gamma_1 \mathbf{v} \cdot \nabla f - \gamma_2 P f = \frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f - Q^2 f + f - f^3 \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} = \sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \nabla P + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} \right) - f^2 \mathbf{Q} \quad (2.29)$$

$$-\gamma_2 f \mathbf{v} \cdot \nabla f + \gamma_1 P f^2 + \frac{1}{\kappa} \nabla \cdot \left[\sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \nabla P + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} \right) \right] = 0. \quad (2.30)$$

ここで、 $P = \Phi - \mathbf{v} \cdot \nabla \chi$ である。

次に渦糸速度 \mathbf{v} についてのべきに展開していく。 $f = f_0 + f_1, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1$ と書き、 f_1, \mathbf{Q}_1 は $\mathcal{O}(\mathbf{v})$ である。また、電場は平衡状態にはないことから、 P も $\mathcal{O}(\mathbf{v})$ である。(2.28) と (2.29) について、 \mathbf{v} の 0 次項は以下のように平衡状態の GL 方程式となる。

$$\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f_0 - Q_0^2 f_0 + f_0 - f_0^3 = 0, \quad (2.31)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_0 = -f_0^2 \mathbf{Q}_0 \quad (2.32)$$

2 式目の右辺は平衡状態の超伝導電流に一致する。

$$\mathbf{J}_0 = -f_0^2 \mathbf{Q}_0. \quad (2.33)$$

次に、 $\mathcal{O}(\mathbf{v})$ の方程式を考える。 $f_v := \mathbf{v} \cdot \nabla f_0, \mathbf{Q}_v := (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q}_0$ と定義し、方程式を

書くと、

$$-\gamma_1 f_v - \gamma_2 f_0 P = \frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f_1 - Q_0^2 f_1 - 2f_0 \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 + f_1 - 3f_0^2 f_1 \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_1 = \sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \nabla P + \mathbf{Q}_v \right) - f_0^2 \mathbf{Q}_1 - 2f_0 f_1 \mathbf{Q}_0 \quad (2.35)$$

$$-\gamma_2 f_0 f_v + \gamma_1 f_0^2 P - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \cdot \left(\sigma^{(n)} \cdot \nabla P \right) + \frac{1}{\kappa} \left(\sigma^{(n)} \cdot \mathbf{Q}_v \right) = 0 \quad (2.36)$$

となる。また、 $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_{1s} + \mathbf{J}_{1n}$ で、

$$\mathbf{J}_{1s} = -f_0^2 \mathbf{Q}_1 - 2f_0 f_1 \mathbf{Q}_0, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{J}_{1n} = \sigma^{(n)} \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \nabla P + \mathbf{Q}_v \right) \quad (2.38)$$

である。渦中心から遠方では $\mathbf{J}_{1n} \rightarrow 0$ となり、 \mathbf{J}_{1s} は輸送流 \mathbf{J}_t に一致する。この方程式系は、(2.36) が f_0, \mathbf{Q}_0 を用いて P を求める方程式、(2.34) と (2.35) が f_0, \mathbf{Q}_0 および P を用いて f_1, \mathbf{Q}_1 を求める連立方程式となっている。次の小節では、(2.34) と (2.35) が f_1, \mathbf{Q}_1 についての線形の微分方程式で、下付き添字 v を含む項やスカラーポテンシャル P を含む項を非斉次項と見ることができることに着目する。

Solvability Condition の導出

次に方程式が解を持つ条件 (Solvability Condition) の考え方をを用いて新たに式を導出する。すなわち、線形の非斉次微分方程式において、方程式が解を持つ条件を考え、それを今回の問題にも適用する。

Dorsey の論文内で解を持つ条件が何なのか、なぜ必要なのかが書かれていなかったため、我々の理解のために一般の線形方程式 $M\mathbf{x} = \mathbf{g}$ を例に出して考える。ここで M はエルミート行列であり、 \mathbf{x}, \mathbf{g} はそれぞれベクトルである。もし M が、「 $M\mathbf{x}_{\text{zero}} = 0, \mathbf{x}_{\text{zero}} \neq 0$ である解 \mathbf{x}_{zero} を持つ」ならば、「 $M\mathbf{x} = \mathbf{g}$ が解を持つ条件は $\mathbf{x}_{\text{zero}}^\dagger \cdot \mathbf{g} = 0$ 」である。これは、 $M\mathbf{x} = \mathbf{g}$ の解を \mathbf{x}_s とおいたとき、

$$\mathbf{x}_{\text{zero}}^\dagger \cdot \mathbf{g} = \mathbf{x}_{\text{zero}}^\dagger M \mathbf{x}_s = (\mathbf{x}_s^\dagger M \mathbf{x}_{\text{zero}})^\dagger = (\mathbf{x}_s^\dagger \cdot 0)^\dagger = 0 \quad (2.39)$$

となることから確かめられる。このように、線形の非斉次方程式は必ずしも解を持つというわけではなく、解を持つためには非斉次項に対して条件が課せられる。

この性質を今回考えている方程式に適用する。方程式 (2.34) と (2.35) は f_1, \mathbf{Q}_1 を解とする線形方程式である。もしこの方程式が上記の \mathbf{x}_{zero} と同じく、 $f_{1\text{zero}}, \mathbf{Q}_{1\text{zero}}$ と呼べるような解を持つならば、この方程式が解を持つ条件は、それらの解と非斉次項の内積が 0 になるというものである。以後は $f_{1\text{zero}}, \mathbf{Q}_{1\text{zero}}$ のことをゼロモード解と呼ぶ。そして、そのようなゼロモード解は構成することができ、存在する。ゼロモード解を得る手法は Gor'kov-Kopnin に従う [28]。

平衡状態の GL 方程式とその解は並進に対して不変である。すなわち、 $f_0(\mathbf{r}), \mathbf{Q}_0(\mathbf{r})$ が解であるとき、 $f_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}), \mathbf{Q}_0(\mathbf{r} + \mathbf{d})$ もまた解である。ここで \mathbf{d} は任意の並進ベクトル

ルである。もし \mathbf{d} が無限小の並進であるなら、 $f_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = f_0(\mathbf{r}) + \mathbf{d} \cdot \nabla f_0(\mathbf{r}) + \dots$ と展開することができる。 \mathbf{d} だけ並進させた GL 方程式を書き下すと、

$$\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - Q_0^2(\mathbf{r} + \mathbf{d}) f_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}) + f_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - f_0^3(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = 0, \quad (2.40)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = -f_0^2(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \mathbf{Q}_0(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \quad (2.41)$$

となる。 $f_d := \mathbf{d} \cdot \nabla f_0$, $\mathbf{Q}_d := (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{Q}_0$ と定義して、上式を展開し、(2.31) と (2.32) を用いて整理すると、

$$\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f_d - Q_0^2 f_d - 2f_0 \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_d + f_d - 3f_0^2 f_d = 0 \quad (2.42)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_d + f_0^2 \mathbf{Q}_d - 2f_0 f_d \mathbf{Q}_0 = 0 \quad (2.43)$$

を得る。これは (2.34), (2.35) の f_1, \mathbf{Q}_1 について線形な項を取り出した方程式、言い換えれば非斉次項を落とした式となっている。また、 f_d, \mathbf{Q}_d はその方程式の解である。したがって、探していたゼロモード解はまさにこの f_d, \mathbf{Q}_d である。

ゼロモード解と非斉次項との内積が 0 になることが導出したい Solvability Condition である。

(2.34) に f_d をかけたものを平面積分する。

$$\int d^2r \left(-2f_0 f_d \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 + \gamma_1 f_v f_d + \gamma_2 f_0 f_d P + \frac{1}{\kappa^2} f_d \nabla^2 f_1 - Q_0^2 f_1 f_d + f_1 f_d - 3f_0^2 f_1 f_d \right) = 0. \quad (2.44)$$

(2.42) に f_1 をかけたものを平面積分し、上式に代入する。そのとき、 $f_1 \nabla^2 f_d$ を 2 回部分積分し、表面項を消去すると、

$$\int d^2r (2f_0 f_1 \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_d - 2f_0 f_d \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 + \gamma_1 f_v f_d + \gamma_2 f_0 f_d P) = 0. \quad (2.45)$$

を得る。さらにこれを式変形して以下を得る。

$$\int d^2r (\mathbf{J}_d \cdot \mathbf{Q}_1 - \mathbf{J}_{1s} \cdot \mathbf{Q}_d) = - \int d^2r (\gamma_1 f_v f_d + \gamma_2 f_0 f_d P). \quad (2.46)$$

ここで、左辺の変形については、

$$\mathbf{J}_d := (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{J}_0 = -2f_0 f_d \mathbf{Q}_0 - f_0^2 \mathbf{Q}_d \quad (2.47)$$

と定義したうえで、(2.37) と (2.47) より

$$\begin{aligned} 2f_0 f_1 \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_d - 2f_0 f_d \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 &= (-\mathbf{J}_{1s} - f_0^2 \mathbf{Q}_1) \cdot \mathbf{Q}_d + (\mathbf{J}_d + f_0^2 \mathbf{Q}_d) \cdot \mathbf{Q}_1 \\ &= \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{Q}_1 - \mathbf{J}_{1s} \cdot \mathbf{Q}_d. \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで、Dorsey は問題を簡単にするために κ が大きな極限、すなわち第 2 種超伝導極限を取っている。その下では、 $\mathbf{Q}_d \approx -\nabla \chi_d / \kappa$, $\mathbf{Q}_1 \approx -\nabla \chi_1 / \kappa$ としてよい。これは、

$\kappa = \lambda/\xi$ が大きいもとでは、 ξ を少し離ればほぼ f は一定となり、ベクトルポテンシャルも $\nabla\chi \sim 1/r$ の項が有効になるという近似である。これを (2.46) に適用すると左辺は

$$\begin{aligned} \int d^2r (\mathbf{J}_d \cdot \mathbf{Q}_1 - \mathbf{J}_{1s} \cdot \mathbf{Q}_d) &= \int d^2r \left(\mathbf{J}_d \cdot \frac{\nabla\chi_1}{\kappa} - \mathbf{J}_{1s} \cdot \frac{\nabla\chi_d}{\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \int d^2r [\nabla \cdot (\mathbf{J}_{1s}\chi_d) - \nabla \cdot (\mathbf{J}_d\chi_1)] - \frac{1}{\kappa} \int d^2r \chi_d \nabla \cdot \mathbf{J}_{1s}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

ここで $\nabla \cdot \mathbf{J}_d = 0$ であることを使った。上式の右辺 1 項目は表面積分に書き換えられ、2 項目については $\nabla \cdot \mathbf{J}_{1s} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{1n}$ であることを使うと、(2.36) と合わせて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \int d^2r \chi_d \nabla \cdot \mathbf{J}_{1s} &= -\frac{1}{\kappa} \int d^2r \chi_d \nabla \cdot \mathbf{J}_{1n} \\ &= \int d^2r \chi_d (\gamma_1 f_0^2 P - \gamma_2 f_0 f_v) \end{aligned} \quad (2.50)$$

と変形できる。これらを組み合わせると、(2.46) は

$$\frac{1}{\kappa} \int d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{J}_{1s}\chi_d - \mathbf{J}_d\chi_1) = - \int d^2r (\gamma_1 f_v f_d - \gamma_1 \chi_d f_0^2 P + \gamma_2 P f_0 f_d + \gamma_2 \chi_d f_0 f_v) \quad (2.51)$$

とかける。これが求めたかった TDGL 方程式の Solvability Condition の式である。この式は確かに渦糸速度 v の 1 次の式になっている。この方程式は TDGL 方程式が解を持つことの必要条件である。以下ではこの方程式を評価していく。

2.1.2 座標系とコア内の電磁場

座標系は図 2.1 の通りに変換した極座標系を用いる。これは Dorsey の論文の Fig.1 [38] に示されている通りの座標系である。印加されている輸送電流 \mathbf{J}_t は x 軸方向、磁場は z 方向である。vortex は $-y$ 方向から角度 θ_H ずれた方向に動く。ともなって、平均を取った電場 $\langle \mathbf{E} \rangle$ は x 軸から θ_H だけ傾いた向きに発生していることになる。変位ベクトル \mathbf{d} は x 軸と角度 ϕ をなしている。この極座標表示のもとでは、 \mathbf{J}_t, \mathbf{v} そして \mathbf{d} はそれぞれ

$$\mathbf{J}_t = J_t [\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta], \quad (2.52)$$

$$\mathbf{v} = -v [\sin(\theta - \theta_H) \mathbf{e}_r + \cos(\theta - \theta_H) \mathbf{e}_\theta], \quad (2.53)$$

$$\mathbf{d} = d [\cos(\theta - \phi) \mathbf{e}_r - \sin(\theta - \phi) \mathbf{e}_\theta] \quad (2.54)$$

となり、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = -vd \sin(\phi - \theta)$ および $(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{d} = -vd \cos(\phi - \theta_H)$ が従う。

極座標系のもとで秩序変数、ベクトルポテンシャル、及びスカラーポテンシャルをより簡単な形へ書き換えていく。平衡状態での秩序変数はその対称性から $f_0(r)$ に、ベクトルポテンシャルは $\mathbf{Q}_0(r) = Q_0(r) \mathbf{e}_\theta$ と書ける。このとき、(2.31),(2.32) を

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_0}{dr} \right) - Q_0^2 f_0 + -f_0^3 = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d(rQ_0)}{dr} - f_0^2 Q_0 = 0 \quad (2.56)$$

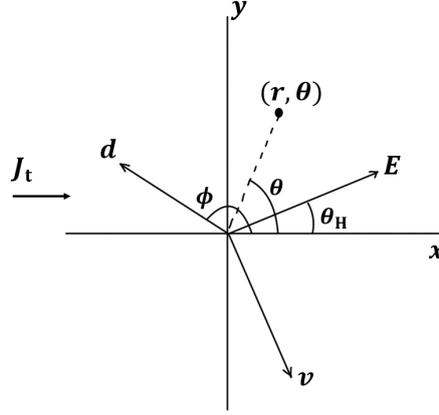


図 2.1: (r, θ) 座標系の定義。合わせて輸送電流 \mathbf{J}_t , 渦糸速度 \mathbf{v} , 平均をとった電場 \mathbf{E} , Hall 角 θ_H , 任意の平行移動ベクトル \mathbf{d} の関係も図示した。磁場は省略している。

と書き下すことができる。 $r \rightarrow 0$ で $Q_0(r) \sim -1/(\kappa r)$ である。

ゲージ不変なスカラーポテンシャルの方程式はやや複雑であるが、常伝導 Hall 伝導度の空間微分を無視することで単純化することができる。これは（特に渦糸中心の近くでは）小さい。したがって、 $\nabla \cdot (\sigma^{(n)} \cdot \nabla P) = \sigma_{xx}^{(n)} \nabla^2 P$ と書ける。図 2.1 の座標系と、 $\mathbf{h}_0 = \nabla \times \mathbf{Q}_0$ を用いれば、式 (2.36) は

$$\frac{\sigma_{xx}^{(n)}}{\kappa^2} \nabla^2 P - \gamma_1 f_0^2 P = \left(\gamma_2 f_0 \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{\sigma_{xy}^{(n)}}{\kappa} \frac{\partial h_0}{\partial r} \right) v \sin(\theta - \theta_H). \quad (2.57)$$

となる。

この式と平衡状態の GL 方程式解 $Q_0(r)$ の漸近形より、

$$Q_0(r) \approx -\frac{1}{\kappa r} + \frac{1}{2} h_0(0) r, \quad (2.58)$$

$$p_1(r) \approx \frac{1}{r} - p_1^{(1)} r, \quad (2.59)$$

$$p_2(r) \approx -p_2^{(1)} r. \quad (2.60)$$

これを用いると、vortex 中心での電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0) &= \left[-\frac{1}{\kappa} \nabla P + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q}_0 \right]_{r=0} \\ &= -\frac{p_2^{(1)}}{\kappa} \mathbf{v} - \left(\frac{p_1^{(1)}}{\kappa} + \frac{1}{2} h_0(0) \right) \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (2.61)$$

である。

2.1.3 Solvability Condition の評価

式 (2.51) の評価を進め、この式から得られることごとを取り出す。最終的には、Hall 角 θ_H の表式が得られる。

まず、左辺について、表面積分が境界での輸送電流 \mathbf{J}_t で表されることを示す。渦から離れたところでは $\mathbf{J}_{1s}(r = \infty, \theta) = \mathbf{J}_t$ である。 $\mathbf{J}_d \cdot \mathbf{e}_r$ については

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d &= (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{J}_0 = \left(d \cos(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial r} - d \sin(\theta - \phi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \mathbf{J}_0 \\ &= d \cos(\theta - \phi) \frac{\partial}{\partial r} (-f_0^2 Q_0) \mathbf{e}_\theta + d \sin(\theta - \phi) \frac{1}{r} (-f_0^2 Q_0) \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.62)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{e}_r &= d \sin(\theta - \phi) \frac{1}{r} (-f_0^2 Q_0) \\ &\rightarrow \frac{d}{\kappa r^2} \sin(\theta - \phi) \end{aligned} \quad (2.63)$$

となる。ここで、 $\xi \ll r \ll \lambda$ のとき、 $f_0 \rightarrow 1$, $Q_0 \sim -1/\kappa r$ となることを用いた。これらを式 (2.51) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \int d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{J}_{1s} \chi_d - \mathbf{J}_d \chi_1] &= \frac{1}{\kappa} \int_0^{2\pi} [\mathbf{J}_t (\mathbf{d} \cdot \nabla \theta) - \mathbf{J}_d \kappa J_t r \cos \theta] \cdot \mathbf{e}_r r d\theta \\ &= -\frac{2}{\kappa} J_t d \int_0^{2\pi} \sin(\theta - \phi) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\kappa} J_t d \sin \phi \\ &= -\frac{2\pi}{\kappa} (\mathbf{J}_t \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.64)$$

この項は輸送電流による渦への駆動力を表している。これは右辺の散逸力とつりあっている。

式 (2.51) の右辺について、1 つ目の項は、

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \int d^2 r f_v f_d \quad (2.65) \\ &= \gamma_1 \int d^2 r (\mathbf{v} \cdot \nabla f_0 \mathbf{d} \cdot \nabla f_0) \\ &= \gamma_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r dr d\theta \left(-v d \sin(\theta - \theta_H) \cos(\theta - \phi) \left(\frac{df_0}{dr} \right)^2 \right) \\ &= -\pi v d \sin(\phi - \theta_H) \gamma_1 \int_0^\infty (f_0')^2 r dr \\ &= \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} \gamma_1 \int_0^\infty (f_0')^2 r dr \end{aligned} \quad (2.66)$$

となる。\$df_0/dr = f_0'\$ と表している。2項目は、

$$\gamma_1 \int d^2r \chi_d f_0^2 P \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{-d \sin(\theta - \phi)}{r} f_0^2 v (p_1 \cos(\theta - \theta_H) + p_2 \sin(\theta - \theta_H)) \right\} r dr d\theta \\ &= -d\gamma_1 v \pi \sin(\theta_H - \phi) \int_0^\infty f_0^2 p_1 dr - d\gamma_1 v \pi \cos(\theta_H - \phi) \int_0^\infty f_0^2 p_2 dr \\ &= -\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} \gamma_1 \int_0^\infty f_0^2 p_1 dr + \pi (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{d} \gamma_1 \int_0^\infty f_0^2 p_2 dr \end{aligned} \quad (2.68)$$

3項目は、

$$\gamma_2 \int d^2r P f_0 f_d \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_2 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty v (p_1 \cos(\theta - \theta_H) + p_2 \sin(\theta - \theta_H)) f_0 f_0' d \cos(\theta - \phi) r dr d\theta \\ &= -\pi (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{d} \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' p_1 r dr - \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' p_2 r dr, \end{aligned} \quad (2.70)$$

4項目は

$$\gamma_2 \int d^2r \chi_d f_0 f_v \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_2 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{-d \sin(\theta - \phi)}{r} \right) f_0 (-v \sin(\theta - \theta_H)) f_0' r dr d\theta \\ &= \gamma_2 \pi (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \cdot \frac{\mathbf{d}}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' dr, \end{aligned} \quad (2.72)$$

とまとめられる。これらの右辺の項を \$\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\$ と \$(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{d}\$ に分類し、変位ベクトル \$\mathbf{d}\$ が任意に取られることに注意すれば、渦の運動に関する以下の式を得る。

$$\mathbf{J}_t \times \mathbf{e}_z = \frac{\alpha_1 \kappa}{2} \mathbf{v} + \frac{\alpha_2 \kappa}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z. \quad (2.73)$$

ここで、定数 \$\alpha_1, \alpha_2\$ は以下のように与えられる。

$$\alpha_1 = \gamma_1 \int_0^\infty (f_0')^2 r dr + \gamma_1 \int_0^\infty f_0^2 p_1 dr - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' p_2 r dr \quad (2.74)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' p_1 r dr - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' dr - \gamma_1 \int_0^\infty f_0^2 p_2 dr. \quad (2.75)$$

\$\alpha_1, \alpha_2\$ について別の表式を得るため変形する。式の一部を別の書き方にすると、

$$\gamma_1 \int_0^\infty f_0^2 p_1 dr = \frac{\sigma_{xx}^n}{\kappa^2} \int_0^\infty \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d(rp_1)}{dr} dr = \frac{2\sigma_{xx}^n}{\kappa^2} p_1^{(1)} \quad (2.76)$$

この式変形については、\$r \to \infty\$ では \$p_1\$ の発散は抑えられていてほぼ0であるので、

$r \rightarrow 0$ の部分で近似計算を行った結果である。同じく

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_0^\infty f_0^2 p_2 dr &= \frac{\sigma_{xx}^n}{\kappa^2} \int_0^\infty \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d(rp_2)}{dr} dr - \gamma_2 \int_0^\infty f_0 \frac{df_0}{dr} dr + \frac{\sigma_{xy}^{(n)}}{\kappa} \int_0^\infty \frac{dh_0}{dr} dr \\ &= \frac{2\sigma_{xx}^n}{\kappa^2} p_2^{(1)} - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' dr + \frac{1}{\kappa} \sigma_{xy}^{(n)} (h_0(\infty) - h_0(0)) \\ &= \frac{2\sigma_{xx}^n}{\kappa^2} p_2^{(1)} - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' dr - \frac{1}{\kappa} \sigma_{xy}^{(n)} h_0(0) \end{aligned} \quad (2.77)$$

ここで、 $\sigma_{xy}^{(n)}(0)$ は磁場が渦糸コア内の磁場に等しいときの常伝導 Hall 伝導度である。この 2 式より、

$$\alpha_1 = \gamma_1 \int_0^\infty (f_0^2)' 2r dr + \frac{2\sigma_{xx}^{(n)}}{\kappa^2} p_1^{(1)} - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' p_2 r dr \quad (2.78)$$

$$\alpha_2 = -\frac{2\sigma_{xx}^{(n)}}{\kappa^2} p_2^{(1)} + \frac{1}{\kappa} \sigma_{xy}^{(n)} h_0(0) - \frac{\gamma_2}{2} \int_0^\infty (f_0^2)' p_1 r dr \quad (2.79)$$

を得る。(2.78) の最後の積分の項は $\mathcal{O}(\gamma_2^2, \gamma_2 \sigma_{xy}^{(n)})$ と、一般に極めて小さいので以降の式からは落とすこととする。今の単位系では、超流動成分の速度 \mathbf{v}_s は

$$\mathbf{J}_s = \frac{\kappa}{2} f^2 \mathbf{v}_s \quad (2.80)$$

のように、書けている。境界付近、すなわち $f_0 = 1$ の領域では $\mathbf{v}_{s1} = 2\mathbf{J}_t/\kappa$ と書けるので、(2.73) は以下のように書ける。

$$\mathbf{v}_{s1} \times \mathbf{e}_z = \alpha_1 \mathbf{v} + \alpha_2 (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z). \quad (2.81)$$

(2.73) から (2.81) までが Dorsey 論文の主たる結果である。

伝導度を計算するべく、Faraday の法則 $\langle \mathbf{E} \rangle = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を用いる。両辺に左から $\times(-\mathbf{B}/B)$ を演算すれば、

$$\mathbf{J}_t = \frac{\alpha_1 \kappa}{2B} \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{\alpha_2 \kappa}{2B} \langle \mathbf{E} \rangle \times \mathbf{e}_z \quad (2.82)$$

を得る。したがって、縦伝導度として

$$\sigma_{xx} = \frac{\alpha_1 \kappa}{2B}, \quad (2.83)$$

横伝導度、すなわち Hall 伝導度として

$$\sigma_{xy} = \frac{\alpha_2 \kappa}{2B} \quad (2.84)$$

を得る。これらより、Hall 角は以下のように表される。

$$\tan \theta_H = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (2.85)$$

以上の式より、Hall 角は H_{c1} 付近において磁場に依存しないことがわかる。

2.2 磁束フロー駆動力の起源

本節では Kato-Chung による先行研究 [45] をとりあげ、磁束フロー現象で渦糸を駆動する力の起源が流体力学的な力；Magnus 力なのか、磁気的な力；Lorentz 力なのかを明らかにする議論を、本論文で扱う単位系で見直す。

Kato-Chung の議論では、まず、局所的な運動量のつり合いの式を TDGL 方程式から導出し、その過程で Maxwell の応力テンソル、運動量流束密度テンソルを導入する。これらのテンソルのある範囲内での積分が、その範囲にかかる電磁学的な力、流体力学的な力と考えられるため、駆動力の起源が明らかになるとというのがこの論文の主な結果である。この議論により、単一磁束の場合に計算をすると、渦にかかる駆動力は電磁学的な力と流体力学的な力の合力となっていることがわかる。

2.2.1 運動量密度の局所的なつりあい方程式

Kato-Chung は TDGL 方程式を用いて運動量密度の釣り合い方程式を示した。

出発点となる TDGL 方程式は秩序変数 ψ 、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、スカラーポテンシャル Φ を用いて

$$\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie^* \Phi(\mathbf{r}, t)}{\hbar} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = \xi^2 \left(\nabla - \frac{ie^* \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\hbar} \right)^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t) - |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.86)$$

と書き表される。ここで、 e^* は Cooper 対の電荷、 \hbar は Planck 定数を 2π で割ったもの (Dirac 定数) である。 γ は複素緩和時間を表しており、 $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ である。 γ_1 の微視的な表現は [27] に、 γ_2 の微視的な表現は [51, 52] にて与えられている。

本論文では前節の Dorsey(1992) の論文と同様に、方程式の単位系として Abrikosov unit を用いる。そのため、上で示した方程式 (2.86) についても、物理量の無次元化を行い、以後の議論を進めることとする。Kato-Chung の単位系での物理量には添字 K を、無次元化した物理量には Dorsey の論文に倣っていることを示す添字 D をつけると、2つの単位系は以下の係数で変換できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_K &= \lambda \mathbf{r}_D, & t_K &= (\lambda/c)t_D, & \psi_K &= \psi_D, \\ \mathbf{A}_K &= (\hbar/e^* \xi) \mathbf{A}_D, & \Phi_K &= (\hbar c/e^* \lambda) \Phi_D \\ \sigma_K &= (1/\mu_0 \lambda c) \sigma_D \end{aligned} \quad (2.87)$$

したがって、扱う TDGL 方程式は

$$\left(\frac{1}{\kappa} \nabla - i\mathbf{A} \right)^2 \psi + \psi - |\psi|^2 \psi - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \psi = 0 \quad (2.88)$$

と変換される。ここで、以下の簡単のため、添字 D を書き表さないことにした。

この方程式は秩序変数を絶対値と位相部分に分けて

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) e^{i\chi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.89)$$

と書く。\$f, \chi\$ は実数の関数である。ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルをゲージ変換して

$$P = \Phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \frac{\nabla}{\kappa} \chi \quad (2.91)$$

と表すことにすると、方程式は

$$\left(\frac{1}{\kappa} \nabla - i\mathbf{Q} \right)^2 f + f - f^3 - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + iP \right) f = 0 \quad (2.92)$$

と書ける。

(2.92) の実部を取ると、

$$\frac{\nabla^2}{\kappa^2} f - \mathbf{Q}^2 f + f - f^3 = \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial t} - \gamma_2 P f \quad (2.93)$$

が得られる。一方、虚部を取り、両辺に \$f\$ をかけると、

$$\frac{\nabla}{\kappa} \cdot (f^2 \mathbf{Q}) = -\gamma_1 P f^2 - \gamma_2 f \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.94)$$

が得られる。ここで、超伝導電流 \$\mathbf{j}_s\$ について、

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{2i\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \mathbf{A} |\psi|^2 = -f^2 \mathbf{Q} \quad (2.95)$$

であることを用いると (2.94) は

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = \gamma_1 \kappa P f^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\gamma_2 \kappa f^2}{2} \right) \quad (2.96)$$

と書ける。

$$\rho_s = -\frac{\gamma_2 \kappa f^2}{2} \quad (2.97)$$

と定義すると、さらに、

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \gamma_1 \kappa P f^2 \quad (2.98)$$

と変形できる。これは超流体についての連続の式 (電荷保存則) とみなすことができ、\$\gamma_1 \kappa P f^2\$ は常流体成分への緩和率を表している。そのことを

$$\left(\frac{d\rho_s}{dt} \right)_{\text{conv}} = \gamma_1 \kappa P f^2 \quad (2.99)$$

と書くことにする。

2.2.2 局所的な力のつり合いの方程式

局所的な力のつり合いの方程式が TDGL 方程式から得られる。

$$\partial_\nu \mathcal{P}_{\mu\nu} + \partial_t(-\rho_s Q_\mu) = (\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{j}_s \times \mathbf{H})_\mu + \gamma_1 \partial_\mu f \partial_t f + \left(-\frac{d\rho_s}{dt}\right)_{\text{conv}} Q_\mu \quad (2.100)$$

である。(2.100) の導出は補遺に譲る。ここで

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = -j_{s\nu} Q_\mu + \frac{\partial_\mu f}{\kappa} \frac{\partial_\nu f}{\kappa} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\text{sn}} \quad (2.101)$$

$$\mathcal{F}_{\text{sn}} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{\nabla}{\kappa} f \right|^2 + Q^2 f^2 - f^2 + \frac{f^4}{2} \right\} + \frac{1}{\kappa} \rho_s P \quad (2.102)$$

(2.100) において、左辺の $-\rho_s Q_\mu$ は超流体の運動量密度であり、 $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ は超流体の運動量流束密度テンソルである。右辺第1項は超伝導電流にかかる Lorentz 力である。第2項は Tinkham mechanism と呼ばれる散逸力をあらわし、第3項は常流体が超流体への変換の際にうける力を表している。(2.101) を見ると、 $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ は対流項、量子圧力項、そして、Bernoulli 項から構成されている。(2.102) は超伝導状態と常伝導状態のエネルギー差、いわゆる超伝導凝縮エネルギーを表している。

2.2.3 力のつり合い方程式

(2.100) からこれまでに得られていた孤立渦にかかる力のつり合い方程式が再導出される。ここで簡単のために $\gamma_2 = 0$ とする。 γ_2 は超伝導電荷密度に関係する量であることが (2.97) からわかる。したがって、この仮定は電荷密度の偏りがなく、あるいは、Hall 効果がないことを表している。

磁氣的 Lorentz 力 $\mathbf{j}_s \times \mathbf{H}$ を以下のように書く。

$$\begin{aligned} (\mathbf{j}_s \times \mathbf{H})_\mu &= (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_\mu - (\mathbf{j}_n \times \mathbf{H})_\mu \\ &= \partial_\nu T_{\mu\nu} - (\mathbf{j}_n \times \mathbf{H})_\mu \end{aligned} \quad (2.103)$$

$T_{\mu\nu}$ は Maxwell の応力テンソルである。(2.100) と (2.103) より、

$$\mathbf{F}_{\text{drv}} + \mathbf{F}_{\text{env}} = 0 \quad (2.104)$$

という、よく知られた力のつり合い方程式が再導出される。ここで

$$(\mathbf{F}_{\text{drv}})_\mu \equiv \int_S \partial_\nu (-\mathcal{P}_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) dS \quad (2.105)$$

$$(\mathbf{F}_{\text{env}})_\mu \equiv \int_S \{ \gamma_1 \partial_\mu f \partial_t f - \kappa \gamma_1 f^2 P Q_\mu - (\mathbf{j}_n \times \mathbf{H})_\mu \} dS \quad (2.106)$$

と書いた。 \mathbf{F}_{drv} が渦に加わる駆動力、 \mathbf{F}_{env} が渦が環境から受ける散逸力であり、それらがつり合っていることを表している。

駆動力は電磁気力と流体力の合力で表されており、その和は

$$\mathbf{F}_{\text{drv}} = \mathbf{j}_{\text{tr}}(0) \times \phi_0 \quad (2.107)$$

となっている。 $\mathbf{j}_{\text{tr}}(0)$ は渦中心での輸送電流、 ϕ_0 は量子化磁束で、 z 方向を向いている。合力が一定であることをもって、この力は渦にかかっている力としてみなされる。合力が $\mathbf{j}_{\text{tr}}(0) \times \phi_0$ となることは様々な教科書にも書かれているが、ここでさらに、この力が $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ と $T_{\mu\nu}$ のどちらに由来しているかを調べることで、駆動力の起源を明らかにすることができる。

駆動力の起源を議論するに当たって、積分範囲が重要になる。積分範囲 S は渦による散逸がない十分遠方で閉じた経路の内側である。すなわち、積分範囲の半径を R としたとき、 $\xi \ll R$ であると言い換えられる。この積分半径 R を変えると渦の駆動力の起源が変わるということを示したのが図 2.2 である。

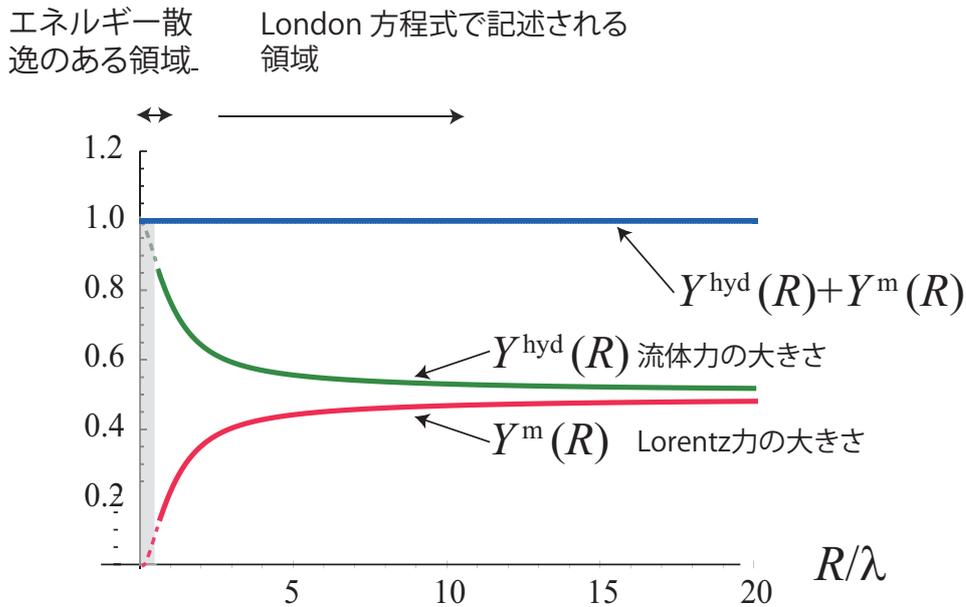


図 2.2: 孤立渦の駆動力 [53]。流体力学的な力の割合 $Y^{\text{hyd}}(R)$ と電磁気学的な力の割合 $Y^{\text{m}}(R)$ の積分半径による変化を表している。積分半径 R/λ が磁場侵入長より十分に小さい時、駆動力は流体力学的な力が支配的になる。積分半径を大きくしていくと、電磁気学的な力の割合が増していき、大きな積分半径を取ったときには流体力と電磁力の割合が同程度になる。ただし、それらの和はいつでも一定で、よってこれらの合力を渦にかかる力と呼ぶことができる。

2.3 本章のまとめ

本章では、本研究の次章以降の内容を理解するために必要な先行研究の計算、定式化を示した。ここで改めて、本章で示した先行研究の成果と問題点を整理しておく。

Dorsey は Solvability Condition をそれまでの先行研究よりわかりやすい形で示し、TDGL 方程式の緩和係数を複素数にまで拡張した。これにより、特にフラックスフロー伝導度について、その Hall 効果成分までを扱うことが可能となった。一方で、文中に登場した κ が大きな極限を取る操作、及びそれに付随する、 $\mathbf{Q}_d \approx -\nabla\chi_d/\kappa, \mathbf{Q}_1 \approx -\nabla\chi_1/\kappa$ という近似のために、この論文の結果では駆動力の起源について答えることができなくなっている。

Kato-Chung は、Dorsey の複素 TDGL 方程式を出発点に、局所的な運動量密度のつりあい式を導出することにより、Hall 効果まで含めて駆動力の起源を説明できる定式化を行った。一方で、依然として方程式は解いておらず、渦芯より遠方での漸近解を用いた議論しかしていないため、散逸領域での駆動力の起源が議論できていない。

次章以降の本論にて、それを解決するべく、 κ が有限な TDGL 方程式の解法を示していく。

第3章

TDGL 方程式の解析的計算

本章の目的は、超伝導孤立渦に対して、そのフラックスフローを、境界条件を定めた TDGL 方程式の問題として解くことである。境界条件として磁場侵入長を有限とした場合を考えることで、輸送電流が空間的に一様といった極限的ではない解を得ることを目指す。

3.1 境界値問題としての TDGL 方程式

この節では境界値問題としての TDGL 方程式を解き、フラックスフロー解を得ることを目指す。また、解の存在条件を考慮することにより、渦糸速度と輸送電流の関係を導出する。

3.1.1 対象とする方程式系

本論文では Dorsey(1992) [38] の無次元化された TDGL 方程式系を用いて計算を進めていく。TDGL 方程式と Maxwell 方程式を合わせた方程式系は以下の 3 つよりなる。

$$\gamma_1 \partial_t f = \left(\frac{\nabla^2}{\kappa^2} - Q^2 + 1 \right) f - f^3 \quad (3.1)$$

$$\frac{\nabla}{\kappa} \cdot (f^2 \mathbf{Q}) = -\gamma_1 P f^2 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} = \sigma_n \left(-\frac{1}{\kappa} \nabla P - \partial_t \mathbf{Q} \right) - f^2 \mathbf{Q} \quad (3.3)$$

$f(\mathbf{r}, t)$ は秩序変数の絶対値を表している。秩序変数の位相部分は $\chi(\mathbf{r}, t)$ である。 $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \chi / \kappa$ と $P(\mathbf{r}, t) = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$ は、それぞれ、ゲージ変換不変なベクトルポテンシャルと、ゲージ変換不変なスカラーポテンシャルである。ここで、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャル、 ϕ はスカラーポテンシャルを表している。GL パラメータ $\kappa = \lambda / \xi$ は磁場侵入長 λ とコヒーレンス長 ξ の比であり、物質により異なる量である。 $\gamma_1 (> 0)$ は秩序変数の緩和時間に関する係数 σ_n は常伝導状態の伝導度であり、これらも

また、物質により決まる量である。Dorsey の方程式系ではフラックスフローホール効果を扱うために緩和係数 γ_2 と、常伝導状態のホール伝導度 σ_H が定義されていたが、今回は系の単純化のため、フラックスフローホール効果は扱わず、 $\gamma_2 = \sigma_H = 0$ とする。外部から印加されている磁場は z 軸正方向に平行で、外部からの輸送電流は x 軸正方向に平行である。また、この系では渦糸速度 \mathbf{v} は y 軸負方向に向いている。今回扱う系は z 軸方向に一様であるとし、以下では二次元極座標系を用いる。直交座標系との単位ベクトルの変換は以下のようになる。

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y \quad (3.4)$$

外部から電場が印加されていない平衡状態のとき、 $\mathbf{r} = 0$ に渦糸が存在し、その解を $f_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{Q}_0(\mathbf{r})$ とする。そのとき、 $f_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{Q}_0(\mathbf{r})$ は以下の時間依存しない Ginzburg-Landau 方程式 (GL 方程式) を満たす。

$$\left(\frac{\nabla^2}{\kappa^2} - Q_0^2 + 1 \right) f_0 - f_0^3 = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\nabla}{\kappa} \cdot (f_0^2 \mathbf{Q}_0) = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_0 = -f_0^2 \mathbf{Q}_0 \quad (3.7)$$

このとき、 f_0 の境界条件は、以下の通りである。

$$f_0(\mathbf{r} = 0) = 0, \quad f_0(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad (3.8)$$

f_0 は円筒対称な形をしているため、引数は角度 θ によらない。 $f_0(r)$ の $r = 0$ 付近での振る舞いは r の 1 次比例することが、漸近計算の結果からわかる。ここではその係数を c_1 と書く。すなわち、 $f_0(r) \sim c_1 r$ である。

一方、 \mathbf{Q}_0 の境界条件は、

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{r} \rightarrow 0) \rightarrow -\frac{\mathbf{e}_\theta}{\kappa r}, \quad \mathbf{Q}_0(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

と書ける。これは \mathbf{A}_0 の境界条件

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r} \rightarrow 0) = 0, \quad \mathbf{A}_0(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{1}{\kappa r} \quad (3.10)$$

とも書き換えられる。 \mathbf{Q}_0 もその円筒対称性、及び磁場との関係から、 $Q_0(r)\mathbf{e}_\theta$ という形になり、漸近形は

$$Q_0(r \rightarrow 0) \rightarrow -\frac{1}{\kappa r}, \quad Q_0(r \gg 1) \rightarrow -U_\infty K_1(r) \quad (3.11)$$

と書ける。 $K_1(r)$ は第 2 種変形 Bessel 関数である。ここで、 U_∞ は上記の関係を満たす定数である。 \mathbf{j}_0 は平衡状態の電流密度であり、 $\mathbf{j}_0(r) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}_0$ と表すことができる。平衡状態では磁場の周りの渦電流を表している。

本論文では TDGL 方程式の解を、平衡状態の解の速度 \mathbf{v} での並行移動とそこからの変調という形で求める。

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + f^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (3.13)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(1)}(\mathbf{r}), \quad (3.14)$$

$f^{(1)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r})$ および $P^{(1)}(\mathbf{r})$ はそれぞれ $\mathcal{O}(\mathbf{v})$ である。

平衡状態の解 f_0 は GL 方程式ですでに得られているので、ここからは $f^{(1)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r})$, $P^{(1)}(\mathbf{r})$ を求めることを目指す。これら \mathbf{v} の 1 次項についての方程式は以下の 3 本に変形できる。まず $P^{(1)}$ について、

$$\left(-\frac{\sigma_n \nabla^2}{\kappa^2} + \gamma_1 f_0^2 \right) P^{(1)} = 0 \quad (3.15)$$

のようになる。 f_0 は既知なので、 $P^{(1)}$ はそれ単体で斉次微分方程式の解となる。 $f^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$ については以下の連立方程式となる。

$$L\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\gamma_1 \mathbf{v} \cdot \nabla f_0 \\ -\sigma_n \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

ここで、

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\nabla^2}{\kappa^2} - Q_0^2 + 1 - 3f_0^2 & -2f_0 \mathbf{Q}_0 \\ -2f_0 \mathbf{Q}_0 & -\text{rotrot} - f_0^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} f^{(1)}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

である。 \mathbf{v} についての線形化方程式になるよう計算している。この方程式の境界条件は、磁場 $\mathbf{h}^{(1)} = \nabla \times \mathbf{Q}^{(1)}$ 、電流密度 $\mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{h}^{(1)}$ 、電場 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = -\frac{\nabla P^{(1)}}{\kappa} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{Q}_0$ という陽に観測できる物理量を用いて以下のように表すことができる。

$$|f^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow 0)| < \infty, \quad f^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0, \quad (3.18)$$

$$|\mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow 0)| < \infty, \quad \mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = (j_+ e^y + j_- e^{-y}) \mathbf{e}_x \equiv \mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r}) \quad (3.19)$$

$$|\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow 0)| < \infty, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.20)$$

各物理量が原点で発散せず、遠方ではバルクの超伝導の性質になるため変調の効果がなくなることを意味している。また、ここで $\mathbf{j}^{(1)}$ が指数関数に接続するという境界条件があるが、これが磁場侵入長を有限と考えている効果である。従来の解法では、電流密度は一定値になるという条件の下、計算が行われていたが、本論文では、超伝導体の内部では London 方程式の帰結、すなわち、電流と磁場は超伝導体の内部では境界から中心に向かって指数減衰していくことを考慮している。

この $\mathbf{j}^{(1)}$ の境界条件 (3.19) は磁場 $\mathbf{h}^{(1)}$ を用いて

$$|\mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow 0)| < \infty \quad \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = (j_+ e^y - j_- e^{-y}) \mathbf{e}_z \quad (3.21)$$

のようにも書かれる。遠方での磁場は輸送電流由来の磁場であるので輸送電流と同じく指数関数の形をしている。より正確に言えば、 $r \gg 1$ においては

$$h^{(1)}(\mathbf{r}) = j_+ e^y - j_- e^{-y} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+} K_m(r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-} K_m(r) \sin m\theta \quad (3.22)$$

となる。ここで、 $K_m(r)$ は m 次の第2種変形 Bessel 関数である。ここで登場する K_m に比例する項は外部から印加する電流以外の影響、例えば、渦糸が存在することにより生じるバックフローの効果などを反映した項である。

3.1.2 部分波展開

式 (3.15) で $P^{(1)}$ に作用する演算子、及び、式 (3.17) での L が軸対称であるので、式 (3.15) と (3.16) は z 軸回りの角運動量ごとに分解してそれぞれの部分ごとに解くことができる。よって、 $f^{(1)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r})$, $P^{(1)}(\mathbf{r})$ を

$$f^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{m+}^{(1)}(r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{m-}^{(1)}(r) \sin(m\theta) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}) = & \mathbf{e}_r \left(\sum_{m=0}^{\infty} q_{m+}^{(r)}(r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{m-}^{(r)}(r) \sin(m\theta) \right) \\ & + \mathbf{e}_\theta \left(\sum_{m=0}^{\infty} q_{m+}^{(\theta)}(r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{m-}^{(\theta)}(r) \sin(m\theta) \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$P^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{m+}(r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{m-}(r) \sin(m\theta). \quad (3.25)$$

と角運動量 m について展開する。さらに、のちのために、磁場の漸近形 (3.22) を遠方のバルクの領域 ($r \gg 1$) においても展開しておく。

$$\begin{aligned} h^{(1)}(\mathbf{r}) = & j_+ e^y - j_- e^{-y} + \sum_m (c_{m+} K_m(r) \cos m\theta + c_{m-} K_m(r) \sin m\theta), \\ = & (j_+ - j_-) \left(I_0(r) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell I_{2\ell}(r) \cos 2\ell\theta \right) \\ & + 2(j_+ + j_-) \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell I_{2\ell+1}(r) \sin((2\ell+1)\theta) \\ & + \sum_m (c_{m+} K_m(r) \cos m\theta + c_{m-} K_m(r) \sin m\theta), \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで以下の指数関数の展開公式を使った。

$$e^y = I_0(r) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell I_{2\ell}(r) \cos 2\ell\theta + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell I_{2\ell+1}(r) \sin((2\ell+1)\theta). \quad (3.27)$$

これに応じて、電流密度

$$\mathbf{j}^{(1)}(\mathbf{r}) = j^{(1,r)}(r, \theta) \mathbf{e}_r + j^{(1,\theta)}(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \quad (3.28)$$

のバルク領域 ($r \gg 1$) での漸近形の展開を以下のように得る。

$$\begin{aligned}
j^{(1,r)}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial h^{(1)}(r, \theta)}{\partial \theta} = -4(j_+ - j_-) \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell (-1)^\ell \frac{I_{2\ell}(r)}{r} \sin 2\ell\theta \\
&\quad + 2(j_+ + j_-) \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) (-1)^\ell \frac{I_{2\ell+1}(r)}{r} \cos((2\ell + 1)\theta) \\
&\quad + \sum_m \left(-mc_{m+} \frac{K_m(r)}{r} \sin m\theta + mc_{m-} \frac{K_m(r)}{r} \cos m\theta \right), \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j^{(1,\theta)}(r, \theta) &= -\frac{\partial h^{(1)}(r, \theta)}{\partial r} = -(j_+ - j_-) \left(I'_0(r) + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell I'_{2\ell}(r) \cos 2\ell\theta \right) \\
&\quad - 2(j_+ + j_-) \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell I'_{2\ell+1}(r) \sin((2\ell + 1)\theta) \\
&\quad - \sum_m (c_{m+} K'_m(r) \cos m\theta + c_{m-} K'_m(r) \sin m\theta) \tag{3.30}
\end{aligned}$$

ゲージ不変なベクトルポテンシャル $\mathbf{Q}^{(1)}$ のバルク領域 $r \gg 1$ での部分波展開は、この領域では秩序変数が 1 とみなせるので $\mathbf{Q}^{(1)} = -\mathbf{j}^{(1)}$ であることから、式 (3.28), (3.29), (3.30) より直ちに得られる。

3.1.3 スカラーポテンシャルの導出：式 (3.15) の解

式 (3.15) は部分波展開により、

$$\left(-\zeta^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) + f_0^2(r) \right) p_{m\sigma}(r) = 0, \quad \sigma = \pm \tag{3.31}$$

と変形できる。ここで

$$\zeta = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\sigma_n}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

である。式 (3.31) の基本的な漸近解は以下のような形になる。

$$\begin{aligned}
r \sim 0, \quad p_{m\sigma}(r) &\sim r^m, \quad r^{-m} \\
r \gg 1, \quad p_{m\sigma}(r) &\sim e^{-r/\zeta}, \quad e^{r/\zeta}.
\end{aligned}$$

一般に、 $r \sim 0$ で r^m に比例する解は $Ae^{-r/\zeta} + Be^{r/\zeta}$ という形で、 B がゼロでない漸近形を持つ。したがって、原点付近で正の冪をもち、すべての r について有限の値である解というのは存在しない。 $(m, \sigma) \neq (1, +)$ について、 $P^{(1)}$ の特異性がそのまま電場 $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}$ の特異性を導いてしまうので $p_{m,\sigma} = 0$ である。しかし、 $(m, \sigma) = (1, +)$ については、 $P^{(1)}$ の $r = 0$ 付近での特異性はベクトルポテンシャルの時間微分

$$\mathbf{v} \cdot \nabla Q_0 \sim -v \left(\frac{\sin \theta \mathbf{e}_\theta}{\kappa r^2} + \frac{\cos \theta \mathbf{e}_r}{\kappa r^2} \right)$$

と打ち消し合うため、結果として ε は正則になる。よって、 $P^{(1)}(r, \theta) = v\tilde{p}(r) \cos \theta$ という解を得ることができ、また、 $\tilde{p}(r)$ は以下の方程式の解である。

$$\left(-\zeta^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right) + f_0^2(r)\right) \tilde{p} = 0 \quad (3.33)$$

\tilde{p} は以下を満たす。

$$r \rightarrow 0, \quad \tilde{p}(r) \rightarrow \frac{1}{r}, \quad r \gg 1, \quad \tilde{p}(r) \propto e^{-r/\zeta}. \quad (3.34)$$

また、電場は以下によって与えられる。

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = v\mathbf{e}_r \varepsilon^{(r)}(r) \cos \theta + v\mathbf{e}_\theta \varepsilon^{(\theta)}(r) \sin \theta \quad (3.35)$$

ここで、

$$\varepsilon^{(r)}(r) = -\frac{\tilde{p}'(r)}{\kappa} + \frac{Q_0(r)}{r}, \quad \varepsilon^{(\theta)}(r) = \frac{\tilde{p}(r)}{\kappa r} - Q_0'(r). \quad (3.36)$$

である。

3.1.4 TDGL 方程式 (3.16) の解

動径方向のみの方程式への変形 (1次元問題化)

部分波展開を式 (3.16) に適用すると、 $f_{m\sigma}^{(1)}$, $q_{m\sigma}^{(\theta)}(r)$, そして $q_{m\sigma}^{(r)}(r)$ についての方程式が得られる。方程式は以下の形になる。

$$\mathcal{L}_1 \mathbf{x}_{1,-} = \mathbf{g} \quad (m, \sigma) = (1, -) \quad (3.37a)$$

$$\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m,\sigma} = 0, \quad \text{otherwise} \quad (3.37b)$$

記号はそれぞれ

$$\mathbf{x}_{m,\sigma}(r) = \begin{pmatrix} f_{m\sigma}^{(1)}(r) \\ q_{m\sigma}^{(\theta)}(r) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_m = \begin{pmatrix} H_m^{(f)} & -2f_0(r)Q_0(r) \\ -2f_0(r)Q_0(r) & H_m^{(q)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} v\gamma_1 f_0'(r) \\ v\sigma_n \tilde{\varepsilon}(r) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

を表し、ハミルトニアン、 $\tilde{\varepsilon}$ の詳細は以下の通りである。

$$H_m^{(f)} = \frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \right] + (1 - 3f_0^2(r) - Q_0(r)^2) \quad (3.39)$$

$$H_m^{(q)} = \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 f_0(r)^2}{m^2 + r^2 f_0(r)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \right) - f_0(r)^2 \quad (3.40)$$

$$\tilde{\varepsilon}(r) \equiv -\frac{d}{dr} \left(\frac{r\varepsilon^{(r)}(r)}{1 + r^2 f_0^2(r)} \right) - \varepsilon^{(\theta)}(r) \quad (3.41)$$

渦糸速度が $-y$ 方向であるので、 $\mathbf{v} \cdot \nabla f_0 = -v \frac{\partial f_0(r)}{\partial y} = -v \sin \theta f_0'(r)$ であることを使った。 $q_{m\sigma}^{(r)}(r)$ は

$$q_{m,\sigma}^{(r)}(r) = -\frac{m\sigma r}{m^2 + r^2 f_0(r)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) q_{m,-\sigma}^{(\theta)}, \quad (m, \sigma) \neq (1, +)$$

$$q_{1+}^{(r)}(r) = -\frac{r}{1 + r^2 f_0^2(r)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) q_{1-}^{(\theta)}(r) + \frac{v\sigma_n r^2 \varepsilon^{(r)}(r)}{1 + r^2 f_0^2(r)}, \quad (3.42)$$

という方程式により、 $q^{(\theta)}$ から得られる。磁場については q の rotation

$$h_{m\sigma}^{(1)}(r) = \frac{dq_{m\sigma}^{(\theta)}}{dr} + \frac{q_{m\sigma}^{(\theta)}}{r} - \frac{\sigma m q_{m,-\sigma}^{(r)}}{r}, \quad (3.43)$$

と、部分波展開の式

$$\mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \left(\sum_{m=0}^{\infty} h_{m+}^{(1)}(r) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} h_{m-}^{(1)}(r) \sin(m\theta) \right)$$

より得られる。磁場の展開係数は以下の通りである。

$$h_{1-}^{(1)}(r) = \frac{r^2 f_0^2(r)}{1 + r^2 f_0^2(r)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) q_{1-}^{(\theta)}(r) + \frac{v\sigma_n r \varepsilon^{(r)}(r)}{1 + r^2 f_0^2(r)} \quad (3.44)$$

$$h_{m\sigma}^{(1)}(r) = \frac{r^2 f_0(r)^2}{m^2 + r^2 f_0(r)^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) q_{m\sigma}^{(\theta)}(r), \quad (m, \sigma) \neq (1, -) \quad (3.45)$$

解 $\mathbf{x}_{m\sigma}$ の境界条件は

$$|f_{m\sigma}^{(1)}(r \rightarrow 0)| < \infty, \quad (3.46)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 f_0(r)^2}{m^2 + r^2 f_0(r)^2} \left(\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) q_{m\sigma}^{(\theta)} \right) \right)_{r \rightarrow 0} < \infty \quad (3.47)$$

$$f_{m\sigma}^{(1)}(r \gg 1) \rightarrow 0 \quad (3.48)$$

$$q_{m\sigma}^{(\theta)}(r \gg 1) \rightarrow I'_m(r) \times \begin{cases} 2(-1)^\ell (j_+ - j_-), & (m, \sigma) = (2\ell, +), \quad \ell = 1, 2, \dots \\ 2(-1)^\ell (j_+ + j_-), & (m, \sigma) = (2\ell + 1, -), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.49)$$

式 (3.47) は、(3.19), (3.44), (3.45) から従う。また、 $r \sim 0$ で $f_0(r) \propto r$ であることより、式 (3.47) は以下に変形できる。

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{d(rq_{m\sigma}^{(\theta)})}{dr} \right)_{r \rightarrow 0} < \infty, \quad m \neq 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rq_{0\sigma}^{(\theta)})}{dr} \right)_{r \rightarrow 0} < \infty. \quad (3.51)$$

式 (3.49) は渦より遠方のバルク領域で、 $\mathbf{Q}^{(1)} = -\mathbf{j}^{(1)}$ であることと、式 (3.30) より従う。特に、式 (3.49) の境界条件で空間変化する電流を考慮している。磁場侵入長を有限とした解法では重要な条件である。

斉次方程式 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ の解

はじめに、斉次方程式 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ の線形独立な解の組を考える。 $r = 0$ の近傍で $f_0(r) \sim c_1 r$ であり、 $A_0(r) \sim a_1 r$ である。これより、 $r \sim 0$ で

$$f_0(r)Q_0(r) = -\frac{f_0(r)}{\kappa r} + f_0(r)A_0(r) \sim -\frac{c_1}{\kappa} + O(r^2), \quad (3.52)$$

$$Q_0(r)^2 = \frac{1}{\kappa^2 r^2} - \frac{2A_0(r)}{\kappa r} + A_0(r)^2 \sim \frac{1}{\kappa^2 r^2} - \frac{2a_1}{\kappa} + O(r^2), \quad (3.53)$$

と展開できる。また、演算子 \mathcal{L}_m は

$$\mathcal{L}_m \sim \tilde{\mathcal{L}}_m^{(c)} \quad (3.54)$$

と書き直せる。ここで、

$$\tilde{\mathcal{L}}_m^{(c)} \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{1+m^2}{r^2} \right] & \frac{2c_1}{\kappa} \\ \frac{2c_1}{\kappa} & c_1^2 \left(\frac{1}{m^2} \left(\frac{d}{dr} \left(r^4 \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \right) \right) - r^2 \right) \end{pmatrix}, & m \neq 0 \\ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \right] & \frac{2c_1}{\kappa} \\ \frac{2c_1}{\kappa} & \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \right) \end{pmatrix}. & m = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

である。これより $m \neq 0$ の $\tilde{\mathcal{L}}_m^{(c)} \mathbf{x} = 0$ を満たす解として、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2c_1 \kappa r^\lambda \\ (m^2 + 1 - \lambda^2) r^{\lambda-2} \end{pmatrix}, \quad \text{with } \lambda = \pm(m-1), \pm(m+1) \quad (3.56)$$

を得る。 $m \neq 0$ のとき、 $r = 0$ で有限となる解は2つのみであり、それを $\mathbf{x}_{m\sigma}^{(I)}(r)$ と $\mathbf{x}_{m\sigma}^{(II)}(r)$ とする。それらは以下のような漸近形を持つ。

$$r \rightarrow 0, \quad \mathbf{x}_{m\sigma}^{(I)}(r \rightarrow 0) \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \kappa r^{m-1} \\ m r^{m-3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{m\sigma}^{(II)}(r \rightarrow 0) \rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \kappa r^{m+1} \\ -m r^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

$m = 1$ については、式 (3.56) は $\lambda = 0, \pm 2$ の3つしか解が無いように思えるが、残りの一つは

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \kappa \ln r \\ r^{-2} \ln r \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

が得られることが Frobenius の方法より導かれる。しかし、この解も $r \rightarrow 0$ で発散する解であるため、解として不適である。

$(m, \sigma) \neq (1, -)$ の解

ここまでで考慮した境界値問題の解は

$$\mathbf{x}_{m\sigma} = C_{m\sigma}^{(I)} \mathbf{x}_{m\sigma}^{(I)}(r) + C_{m\sigma}^{(II)} \mathbf{x}_{m\sigma}^{(II)}(r) \quad (3.59)$$

と書ける。このとき、 $r \gg 1$ では、 $f_0(r) \rightarrow 1$ であり、 $Q_0(r) \sim -U_\infty K_1(r)$ である。したがって演算子の非対角項は十分小さいので、 f/q がそれほど大きくないなら、

$$\mathcal{L}_m \sim \tilde{\mathcal{L}}_m^{(b)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2}{dr^2} - 2 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{m^2 + r^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \right) - 1 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

となる。したがって、遠方での斉次方程式 $\tilde{\mathcal{L}}_m^{(b)} \mathbf{x} = 0$ の漸近解の組は

$$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}\kappa r} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}\kappa r} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ I'_m(r) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ K'_m(r) \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

の4つとなる。2つ目と4つ目の解は $r \rightarrow \infty$ でゼロに収束する解である。

f の漸近形再考

ここで、 $f^{(1)}$ の漸近解を、 $q^{(1)}$ が発散的な解を持つことをもとに考え直す。 $q^{(1)}$ の発散的な解とは、輸送電流の境界条件に接続していることから導かれる $I'_m(r)$ に比例する解のことである。この $q^{(1)}$ が発散的であるならば、もともと考えていた方程式

$$H_f^{(m)} f(r) - 2f_0(r)Q_0(r)q^{(1)}(r) = 0 \quad (3.62)$$

$$-2f_0(r)Q_0(r)f^{(1)}(r) + H_q^{(m)} q^{(1)}(r) = 0 \quad (3.63)$$

の第2式1項目は $f^{(1)}$ が $r \gg 1$ で発散していないので無視できる。すなわち、第2式は $H_q^{(m)} q^{(1)}(r) = 0$ と考えてよく、これは式 (3.60) で考えたとおり、 $I'_m(r)$ となる発散的な解を得る。一方で、第1式の2項目は $q^{(1)}$ があるために無視することができなくなり、

$$2f_0 Q_0 q^{(1)} \sim -2U_\infty K_1(r) I'_m(r) \sim -\frac{U_\infty}{\pi r} \quad (3.64)$$

なる式で考える必要がある。ここで、

$$K_1(r) \sim \frac{e^{-r}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad I_m(r) \sim \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}}, \quad I'_m(r) = I_{m-1}(r) - \frac{m I_m(r)}{r} \sim \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.65)$$

であることを使った。したがって式 (3.62) は

$$\left(\frac{1}{\kappa^2} \frac{d^2}{dr^2} - 2 \right) f^{(1)} \sim -\frac{U_\infty}{\pi r} \quad (3.66)$$

と変形でき、これより、

$$f^{(1)} \sim \frac{U_\infty}{2\pi r} \quad (3.67)$$

となる。したがって、この方程式の $r \gg 1$ の漸近形は

$$\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ q^{(1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{U_\infty}{2\pi r} \\ I'_m(r) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

と書ける。

したがって、 $r \gg 1$ で式 (3.59) は、以下の形の漸近解を持つことになる。

$$C_{m\sigma}^{(\text{I})} \mathbf{x}_{m\sigma}^{(\text{I})}(r) + C_{m\sigma}^{(\text{II})} \mathbf{x}_{m\sigma}^{(\text{II})}(r) \sim \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\sqrt{2}\kappa r} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}\kappa r} + \beta_3 U_\infty (2\pi r)^{-1} \\ \beta_3 I'_m(r) + \beta_4 K'_m(r) \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

秩序変数 f_1 は発散する解を持たないので $\beta_1 = 0$ である。また、遠方で輸送電流に接続する境界条件より、

$$\beta_3 = \begin{cases} 2(-1)^\ell (j_+ - j_-), & (m, \sigma) = (2\ell, +), \quad \ell = 1, 2, \dots \\ 2(-1)^\ell (j_+ + j_-), & (m, \sigma) = (2\ell + 1, -), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.70)$$

となる。実際の計算上は、 $e^{-2\kappa r}$ と $K'_m(r)$ に比例する項が式 (3.68) に示す解よりも早く収束することから、それらの項を β_2, β_4 によらずゼロとみなすことができる。したがって、

$$C_{m\sigma}^{(\text{I})} \mathbf{x}_{m\sigma}^{(\text{I})}(r) + C_{m\sigma}^{(\text{II})} \mathbf{x}_{m\sigma}^{(\text{II})}(r) \sim \begin{pmatrix} \beta_3 U_\infty (2\pi r)^{-1} \\ \beta_3 I'_m(r) \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

を考えればよく、 β_3 は式 (3.70) により決まっているので $C_{m\sigma}^{(I)}$ と $C_{m\sigma}^{(II)}$ が計算でき、 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ の解を得ることができる。

3.1.5 非斉次方程式 $\mathcal{L}_1 \mathbf{x}_{1,-} = \mathbf{g}$ の解を持つ条件

線形の非斉次方程式は必ずしも解を持つわけではない。今回考えている $m = 1$ の場合について、その解を持つ条件は渦糸速度 \mathbf{v} と輸送電流 \mathbf{j}_t を結びつける。これに似た議論は Gor'kov-Kopnin [28], Dorsey [38] の論文中でもされており、その手法を用いる。

まずは例を考える。エルミート行列 A に対して $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ なる $\exists \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ を考える。この \mathbf{x}_0 を「ゼロモード解」と呼ぶことにする。非斉次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{g}$ を考えるとき、ゼロモード解 \mathbf{x}_0 と非斉次項 \mathbf{g} の間には直交関係が成立することが以下のように示せる。

$$\mathbf{x}_0^\dagger \cdot \mathbf{g} = \mathbf{x}_0^\dagger A\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_0^\dagger \underbrace{A\mathbf{x}_0} \right)^* = 0 \quad (3.72)$$

以上より、「エルミート行列 A について、ゼロモード解が存在するとき、非斉次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{g}$ は $\mathbf{x}_0^\dagger \cdot \mathbf{g} = 0$ のときにのみ解を持つ」ことが示される。このように、その演算子を用いた斉次方程式がゼロモード解をもつ場合、非斉次項とゼロモード解の間に関係が成立することが非斉次方程式が解を持つ必要条件である。そして、そのときに成立している関係が解を持つ必要条件 (Solvability Condition) である。上の例；エルミート行列の場合には直交関係が解を持つ条件である。

同様にして、今考えている TDGL 方程式の $m = 1$ の解にこれを適用し、解を持つ条件を考える。 \mathcal{L}_1 はエルミートではないので、必ずしも直交関係が成立するわけではない。

まず、 $\mathcal{L}_1 \mathbf{x} = 0$ を満たすゼロモード解に、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f'_0(r) \\ Q'_0(r) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{w}. \quad (3.73)$$

があることがわかる。このゼロモード解の導出は Gor'kov-Kopnin [28], および、Dorsey [38] の、displacement method を用いた。時間依存しない GL 方程式、すなわち平衡状態の解は微小な距離ずらしても GL 方程式を満たすことからこの解が得られる。 $\mathcal{L}_1 \mathbf{x}_{1,-} = \mathbf{g}$ であるので、両辺にゼロモード解を乗じて、

$$\int_0^{r_c} (\mathbf{w}^\top \mathcal{L}_1 \mathbf{x}) r dr = \int_0^{r_c} (\mathbf{w}^\top \mathbf{g}) r dr \quad (3.74)$$

となる。ここで、 $r_c (\gg 1)$ はカットオフの長さである。部分積分により、左辺は

$$\int_0^{r_c} (\mathbf{w}^\top \mathcal{L}_1 \mathbf{x}) r dr = \int_0^{r_c} \left(\mathbf{x}^\top \underbrace{\mathcal{L}_1 \mathbf{w}}_{=0} \right) r dr + \text{B. T.} = \text{B. T.} \quad (3.75)$$

となり、

$$\begin{aligned} \text{B.T.} = & \frac{1}{\kappa^2} \left[r \left(f_0' \frac{df_{1,-}^{(1)}}{dr} - f_{1,-}^{(1)} \frac{df_0'}{dr} \right) \right]_{r=r_c} \\ & + \left[\left(\frac{r^3 f_0(r)^2}{1 + r^2 f_0(r)^2} \right) \left(Q_0' \frac{dq_{1,-}^{(\theta)}}{dr} - q_{1,-}^{(\theta)} \frac{dQ_0'}{dr} \right) \right]_{r=r_c}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

である。B.T. は “boundary terms” に由来している。境界条件より、それぞれ、

$$f_0'(r \rightarrow 0) < \infty, \quad f_0'(r \gg 1) \rightarrow 0, \quad (3.77)$$

$$Q_0'(r \rightarrow 0) \rightarrow \frac{1}{\kappa r^2}, \quad Q_0'(r \gg 1) \rightarrow -U_\infty K_1'(r), \quad (3.78)$$

$$f_{1,-}^{(1)}(r \rightarrow 0) < \infty, \quad f_{1,-}^{(1)}(r \gg 1) \rightarrow 0 \quad (3.79)$$

$$r^2 q_{1,-}^{(\theta)}(r \rightarrow 0) < \infty, \quad q_{1,-}^{(\theta)}(r \gg 1) \rightarrow 2(j_+ + j_-)I_1'(r) \quad (3.80)$$

であるので、以下を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{r_c \rightarrow \infty} \text{B.T.} &= 2(j_+ + j_-)U_\infty \lim_{r_c \rightarrow \infty} \left(\frac{r_c^3 (I_1'(r_c)K_1''(r_c) - K_1'(r_c)I_1''(r_c))}{1 + r_c^2} \right) \\ &= 2(j_+ + j_-)U_\infty \end{aligned} \quad (3.81)$$

ここで、

$$\frac{r^3 (I_1' K_1'' - K_1' I_1'')}{1 + r^2} = 1. \quad (3.82)$$

なる関係を使った。したがって、この方程式が解を持つ条件は以下のように得られる。

$$2(j_+ + j_-)U_\infty = \int_0^\infty (\mathbf{w}^T \mathbf{g}) r dr = v \int_0^\infty \{ \gamma_1 (f_0'(r))^2 + \sigma_n Q_0'(r) \tilde{\varepsilon}(r) \} r dr. \quad (3.83)$$

輸送電流の定義 (3.19) によれば、

$$j_+ + j_- = |\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r} = 0)|. \quad (3.84)$$

であることがわかるので、(3.83) をさらに、

$$|\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r} = 0)| = \frac{v}{2U_\infty} \int_0^\infty \{ \gamma_1 (f_0'(r))^2 + \sigma_n Q_0'(r) \tilde{\varepsilon}(r) \} r dr. \quad (3.85)$$

と書き換えることができる。これは渦糸速度と輸送電流の間の線形応答の関係式である。このように、TDGL 方程式における可解条件はフラックフローを記述する内部の物理量と、外部から印加された輸送電流を結びつけるという点で重要である。

$\mathcal{L}_1 \mathbf{x}_{1,-} = \mathbf{g}$ の解

上記の斉次方程式の解に、非斉次方程式の特解を加えたものを合わせて係数を決定することにより得る。前の節より、 $m = 1$ のとき、斉次方程式の 2 つある基本解のうち、片方は

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f'_0(r) \\ Q'_0(r) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{w}. \quad (3.86)$$

である。この解はもともと、平衡状態の解を微小な距離だけ平行移動しても GL 方程式を満たすことから作られた解である。ゆえにこの解は解の原点をずらす効果しかない。したがって、 $m = 1$ の解を求めるときには

$$\mathbf{x}_{1,-} = C_{1,-}^{(1)} \mathbf{x}_{1,-}^{(1)}(r) + \mathbf{x}_{\text{sp}} \quad (3.87)$$

によって係数を決定すればよく、係数 $C_{1,-}^{(1)}$ は、他の m のときと同じくベクトルポテンシャル $q^{(1)}$ が輸送電流に接続することから決まる。

3.2 数値的計算のための手法

TDGL 方程式を数値的に解く際、この方程式は $r \rightarrow \infty$ で発散するため、 $r \sim 0$ から r が大きい領域に向かって Runge-Kutta 法によって微分方程式を解いていくことになる。一方で、この微分方程式は初期値に対して敏感で、安易に $r \sim 0$ に初期値を与えて解こうとすると、2つある解のうち的一方に収束してしまう。これは特に微分方程式の開始地点が渦中心に近いほど、すなわち r が 0 の近くから始まっているときほど起こりやすい。

それを解消するため、TDGL 方程式の $r \sim 0$ での級数解を計算し、渦中心付近ではその級数解から得られる解を用い、ある程度離れたところで級数解から得られる初期値を用いて Runge-Kutta 法にて解くことにする。

3.2.1 GL 方程式の級数解

TDGL 方程式の級数解をえるために、平衡状態の解、すなわち、GL 方程式の解を級数解で求めておく。出発点とする方程式は

$$\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) f_0 - \left(A(r) - \frac{p}{\kappa r} \right)^2 f_0 + f_0 - f_0^3 = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) - \frac{A}{r^2} = f_0^2(r) \left(A(r) - \frac{p}{\kappa r} \right) \quad (3.89)$$

である。 $p = \pm 1$ とする。初期条件は以下の通りとする。

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = c_1, \quad A_0(0) = 0, \quad A_0'(0) = a_1 \quad (3.90)$$

初期条件 (3.90) のもとで、(3.88), (3.89) の解を級数の形で

$$f_0(r) = \sum_{n=0} c_n r^n, \quad A_0(r) = \sum_{n=0} a_n r^n, \quad (3.91)$$

と書くことにする。ただし、 $c_0 = a_0 = 0$ とする。便宜のため、記号

$$(c * c)_n = \sum_{m=0}^n c_m c_{n-m}, \quad (c * c * c)_n = \sum_{m=0}^n (c * c)_m c_{n-m} \quad (3.92)$$

を導入すると、

$$f_0^2(r) = \sum_{n=0} (c * c)_n r^n, \quad f_0^3(r) = \sum_{n=0} (c * c * c)_n r^n \quad (3.93)$$

となる。さらに、

$$(a * a)_n = \sum_{m=0}^n a_m a_{n-m}, \quad (a * a * c)_n = \sum_{m=0}^n (a * a)_m c_{n-m}, \quad (3.94)$$

$$(c * c * a)_n = \sum_{m=0}^n (c * c)_m a_{n-m}, \quad (a^{(+1)} * c)_n = \sum_{m=0}^n a_{m+1} c_{n-m}$$

を導入すると、

$$\left(A_0(r) - \frac{p}{\kappa r}\right)^2 f_0 = \frac{c_1}{\kappa^2 r} + \sum_{n=0} r^n \left(\frac{c_{n+2}}{\kappa^2} + (a * a * c)_n - \frac{2p(a^{(+1)} * c)_n}{\kappa} \right) \quad (3.95)$$

$$\left(A_0(r) - \frac{p}{\kappa r}\right) f_0^2 = \sum_{n=0} r^n \left((c * c * a)_n - \frac{p(c * c)_{n+1}}{\kappa} \right) \quad (3.96)$$

と書ける。これに加えて、

$$\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) f_0 = \frac{c_1}{\kappa^2 r} + \sum_{n=0} \frac{(n+2)^2 c_{n+2}}{\kappa^2} r^n \quad (3.97)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA}{dr} \right) - \frac{A}{r^2} = \sum_{n=0} (n+3)(n+1) a_{n+2} r^n \quad (3.98)$$

を用いると、式 (3.88), (3.89) のすべての項が級数の形で与えられる。結果として、漸化式

$$c_{n+2} = \frac{\kappa^2}{(n+3)(n+1)} \left((a * a * c)_n - \frac{2p}{\kappa} (a^{(+1)} * c)_n - c_n + (c * c * c)_n \right) \quad (3.99)$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+1)} \left((c * c * a)_n - \frac{p(c * c)_{n+1}}{\kappa} \right) \quad (3.100)$$

を得る。これと初期条件 (3.90) により、 c_n, a_n が低次から順に決まる。

3.2.2 齊次方程式 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ を解くための手法

実際に TDGL 方程式を級数的に解いていくにあたり、 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ のなかの $q(r)$ を消去することを考える。(3.37b), (3.38) より

$$q(r) = \frac{H_m^f f}{2f_0 Q_0}. \quad (3.101)$$

とできる。結果として、解くべき方程式は $f(r)$ について 4 階で、 $r = 0$ に正則特異点をもつ微分方程式になる。各 m について、 $r = 0$ で発散する解が 2 つと、収束する解が 2 つある。後者の解を次の手法を用いて求めることを目指す。

まずはじめに、Frobenius の手法を用いて $r = 0$ 周辺での解析的な解を求める。それにより、 $f(r_c)$, $f'(r_c)$, $q(r_c)$, $q'(r_c)$ を求める。ここで、 $r_c = 0.1 \sim 0.2$ とする。これを初期値として微分方程式を Runge-Kutta 法によりとき、 $f(r)$ と $q(r)$ を $r > r_c$ の範囲で計算していく。

3.2.3 $\mathcal{L}_m \mathbf{x}_{m\sigma} = 0$ の解

$f(r)$ を

$$f(r) = \sum_{n=0} f_n(\rho) r^{n+\rho} \quad (3.102)$$

の形に展開する。 ρ は未定パラメータである。この形式を

$$q(r) = \frac{H_m^f f}{2f_0 Q_0} \quad (3.103)$$

に代入する。そのとき、 $q(r)$ が

$$q(r) = \sum_{n=-2}^{\infty} q_n(\rho) r^{n+\rho} \quad (3.104)$$

と展開された形で得ることができ。ハミルトニアン H_m^f を

$$H_m^f = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2 + 1}{r^2} \right) + 1 + w(r), \quad w(r) = -3f_0(r)^2 - A_0^2(r) + \frac{2A_0(r)}{\kappa r} \quad (3.105)$$

と書き下し、ここで使った関数 $w(r)$ も r について展開した形で書き下しておく。

$$w(r) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n r^n, \quad w_n = -3(c * c)_n - (a * a)_n + \frac{2a_{n+1}}{\kappa} \quad (3.106)$$

これにより、(3.103) の分子が

$$H_m^f \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\rho) r^{n+\rho} = \sum_{n=-2}^{\infty} (T_m f)_n(\rho) r^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(\rho) + (w * f)_n(\rho)) r^{n+\rho}, \quad (3.107)$$

と書き下せる。ここで、

$$(T_m f)_n(\rho) = \frac{((n + \rho + 2)^2 - m^2 - 1)f_{n+2}(\rho)}{\kappa^2} \quad (3.108)$$

である。関数 $z(r)$ を以下のように定義すると、

$$z(r) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n r^n = \omega(r)^{-1}, \quad \omega(r) = f_0(r) Q_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left((c * a)_n - \frac{c_{n+1}}{\kappa} \right)}_{\omega_n} r^n. \quad (3.109)$$

式 (3.103), (3.107), (3.108), 及び (3.109) より、 $n = -2, -1$ のとき、

$$q_n(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2} z_0 (T_m f)_{-2}(\rho), & n = -2 \\ \frac{1}{2} z_0 (T_m f)_{-1}(\rho), & n = -1 \end{cases} \quad (3.110)$$

また、それより大きな $n = 0, 2, \dots$ に対して、

$$q_n(\rho) = \frac{1}{2} (z_{n+2} (T_m f)_{-2}(\rho) + z_{n+1} (T_m f)_{-1}(\rho)) + (z * (T_m f))_n(\rho) + (z * f)_n(\rho) + (z * w * f)_n(\rho) \quad (3.111)$$

を得る。式 (3.102), (3.104), (3.110), (3.111) は任意の $f_n(\rho)$ に対して式 (3.37b) の 1 行目を満たす。

以下では、(3.37b)(3.38) の 2 行目、

$$H_m^q q(r) - 2\omega(r) f(r) = 0. \quad (3.112)$$

を解く。1項目を

$$H_m^q q(r) = \frac{d}{dr} \left(F(r) \left(\frac{dq(r)}{dr} + \frac{q(r)}{r} \right) \right) - f_0(r)^2 q(r) \quad (3.113)$$

と書き、ここで定義した $F(r)$ は

$$F(r) = \frac{r^2 f_0(r)^2}{m^2 + f_0(r)^2} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ \sum_{n=4}^{\infty} F_n r^n, & m \neq 0. \end{cases} \quad (3.114)$$

であり、右辺2行目のように展開係数を定める。ここから $m \neq 0$ と $m = 0$ は分けて議論する。

3.2.4 $m \neq 0$

式(3.112)を上のように決めた展開係数を用いて展開すると、

$$H_m^q q(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ (\rho + \ell + 1) \sum_{n=-2}^{\ell-2} (\rho + n + 1) F_{\ell+2-n} q_n(\rho) - \sum_{n=-2}^{\ell-2} (c * c)_{\ell-n} q_n(\rho) \right\} r^{\ell+\rho} \quad (3.115)$$

と

$$\omega(r) f(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\omega * f)_{\ell}(\rho) r^{\ell+\rho}, \quad (3.116)$$

になる。これらをまとめて、

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} r^{\ell+\rho} S_{\rho, \ell, m}[\{f_n\}] = 0, \quad (3.117)$$

と書き表す。係数 $S_{\rho, \ell, m}[\{f_n\}]$ は

$$S_{\rho, \ell, m}[\{f_n\}] = \left\{ (\rho + \ell + 1) \sum_{n=-2}^{\ell-2} (\rho + n + 1) F_{\ell+2-n} q_n(\rho) - \sum_{n=-2}^{\ell-2} (c * c)_{\ell-n} q_n(\rho) - 2(\omega * f)_{\ell}(\rho) \right\} \quad (3.118)$$

とした。(3.118)で、 r^{ρ} の係数は $l = 0$ としたものなので、

$$S_{\rho, 0, m}[\{f_n\}] = -\frac{c_1(\rho - m - 1)(\rho - m + 1)(\rho + m - 1)(\rho + m + 1)f_0(\rho)}{2\kappa m^2} \quad (3.119)$$

となる。ここで、

$$(c * c) = c_1^2, \quad F_4 = \frac{c_1^2}{m^2}, \quad \omega_0 = -\frac{c_1}{\kappa}, \quad z_0 = -\frac{\kappa}{c_1}, \quad q_{-2}(\rho) = -\frac{(\rho^2 - m^2 - 1)f_0(\rho)}{2\kappa c_1}$$

を使った。 $r^{1+\rho}$ の係数は

$$S_{\rho, 1, m}[\{f_n\}] = -\frac{c_1(\rho - m)(\rho - m + 2)(\rho + m)(\rho + m + 2)f_1(\rho)}{2\kappa m^2} \quad (3.120)$$

である。同じようにして、 $r^{2+\rho}$ の係数は

$$S_{\rho,2,m}[\{f_n\}] = c_1(\rho - m + 1)(\rho + m + 1) \left\{ \frac{(\rho - m + 3)(\rho + m + 3)f_2(\rho)}{2\kappa m^2} + \frac{(-6a_1m^2 + 6a_1\rho^2 + 20a_1\rho + 6a_1 - \kappa\rho^2 + 2\kappa\rho + 15\kappa + \kappa m^2)f_0(\rho)}{16m^2} \right\} \quad (3.121)$$

ここで、GL 方程式を級数展開したときの r^3 の係数 c_3 が r^1 の係数 c_1 を用いて

$$c_3 = -\frac{\kappa^2 c_1 + 2\kappa c_1 a_1}{8} \quad (3.122)$$

と表すことができることより因数を整理した。この関係式は GL 方程式の係数を順次決定できる、式 (3.99)

$$c_{n+2} = \frac{\kappa^2}{(n+3)(n+1)} \left((a * a * c)_n - \frac{2p}{\kappa} (a^{(+1)} * c)_n - c_n + d_n \right) \quad (3.123)$$

より従う。 $\ell \geq 2$ について、 $r^{\ell+\rho}$ の係数は

$$S_{\rho,\ell,m}[\{f_n\}] = -\frac{c_1(\rho - m + \ell - 1)(\rho - m + \ell + 1)(\rho + m + \ell - 1)(\rho + m + \ell + 1)f_\ell(\rho)}{2\kappa m^2} + (\cdots)f_{\ell-2}(\rho) + (\cdots)f_{\ell-4}(\rho) + \cdots \quad (3.124)$$

これらの式より、 $f_\ell(\rho)$ がゼロでないなら、 $f_\ell(\rho)$ を、 $f_{\ell-2}(\rho)$, $f_{\ell-4}(\rho) \cdots$ を使って再帰的に求めることができる。 n が奇数のとき、 $f_n(\rho) = 0$ と $q_n(\rho) = 0$ と解を決定することができる。 $f(r)$ と $q(r)$ が、 $\ell > 0$ で式 (3.117) を満たし、また、(3.110)、(3.111) を満たすような $f_n(\rho)$, $q_n(\rho)$ であるとき、これを $f(r; \rho)$, $q(r; \rho)$ とする。そのとき、

$$\mathcal{L}^{(m)} \begin{pmatrix} f(r; \rho) \\ q(r; \rho) \end{pmatrix} = -\frac{c_1(\rho - m - 1)(\rho - m + 1)(\rho + m - 1)(\rho + m + 1)f_0(\rho)r^\rho}{2\kappa m^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

を得る。この式の左辺をゼロにするような ρ が求めたい解の最低次の項ということになる。 $\rho = m + 1$ のとき、式 (3.124) で $\ell > 0$ を満たす $f_{\ell+2}(\rho)$ の係数は非ゼロとなり、 $f_\ell(m + 1)$ が再帰的に決まる。したがって、基本的な解のうち、 $r = 0$ で収束的な解の 1 つは $f_0(m + 1) = 1$ として、

$$\begin{pmatrix} f(r; m + 1) \\ q(r; m + 1) \end{pmatrix} \quad (3.126)$$

と得ることができる。式 (3.121) において $\rho = m - 1$ のとき、 f_0 と $f_0(\rho)$ は共通因数 $(\rho - m + 1)(\rho + m - 1)$ を持つ。このことより、式 (3.121) の (右辺) = 0 から $f_2(\rho)$ を $f_0(\rho)$ を用いて決定することができる。 $f_2(\rho)$ の係数は一見ゼロになってしまうが、共通因数を持つことより、式 (3.121) の右辺中括弧の中がゼロになるという条件で解くことができる。 $\rho = m - 1$ のとき、(3.124) を $\ell \geq 2$ で考えたとき、 $f_{\ell+2}(m - 1)$ の係数はゼロではないので、 $f_2(m - 1)$, $f_4(m - 1)$, $f_6(m - 1)$, \cdots を用いて再帰的に決定することがで

きる。したがって、基本的な解のうち、 $r = 0$ で収束的な解の2つめは、 $f_0(m-1) = 1$ として、

$$\begin{pmatrix} f(r; m-1) \\ q(r; m-1) \end{pmatrix} \quad (3.127)$$

である。

式 (3.121) では、 $f_2(\rho)$ の係数が一見ゼロになってしまい、この式から単純には $f(r; m-1)$ が決定できず、係数を未定パラメータ ρ で微分し、対数項を導出する Frobenius の手法が必要であるように見えるが、前述の通り必要ない。このことは、今回扱っている TDGL 方程式のみに着目した場合には見つからないが、式 (3.122) で示した関係、すなわち、平衡状態の渦糸解をあわせて解くことにより解決できる問題である。

3.2.5 $m = 0$

式 (3.112) は

$$\sum_{\ell=-4}^{\infty} r^{\ell+\rho} (\rho+\ell+1)(\rho+\ell+3)q_{\ell+2}(\rho) - \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{\ell+\rho} \sum_{n=-2}^{\ell-2} (c*c)_{\ell-n}q_n(\rho) - 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{\ell+\rho} (\omega*f)_{\ell}(\rho) = 0 \quad (3.128)$$

となる。式 (3.118) で、 $r^{\rho-4}$ の係数は

$$-\frac{(\rho-3)(\rho-1)^2(\rho+1)f_0(\rho)}{2\kappa c_1}, \quad (3.129)$$

式 (3.118) で $r^{\rho-3}$ は

$$-\frac{(\rho-2)\rho^2(\rho+2)f_1(\rho)}{2\kappa c_1} \quad (3.130)$$

である。式 (3.128) において、 $r^{\rho-2}$ の係数は

$$-\frac{(\rho-1)(\rho+1)^2(\rho+3)f_2(\rho)}{2c_1\kappa} - \frac{(\rho-1)(\rho+1)(10a_1\rho^2 + 6a_1 + \kappa\rho^2 + 7\kappa)f_0(\rho)}{16c_1}. \quad (3.131)$$

と表される。式 (3.128) で $\ell \geq -1$ での $r^{\ell+\rho}$ の係数は

$$-\frac{(\rho+\ell+1)(\rho+\ell+3)^2(\rho+\ell+5)f_{\ell+4}(\rho)}{2c_1\kappa} + (\dots)f_{\ell+2}(\rho) + (\dots)f_{\ell}(\rho) + \dots \quad (3.132)$$

という形になる。 $m \neq 0$ のときと同じく再帰的に決定することができる。 n が奇数のときは $f_n(\rho) = 0$, $q_n(\rho) = 0$ となる。式 (3.125) にならって

$$\mathcal{L}^{(0)} \begin{pmatrix} f(r; \rho) \\ q(r; \rho) \end{pmatrix} = -\frac{(\rho-3)(\rho-1)^2(\rho+1)f_0(\rho)r^{\rho-4}}{2\kappa c_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

を得ることができ、したがって、2つの基本解は $f_0(1) = 1$ とすれば

$$\begin{pmatrix} f(r; 3) \\ q(r; 3) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(r; 1) \\ q(r; 1) \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

である。

3.2.6 非斉次方程式の特解

式 (3.37a) の 1 行目を $q(r)$ について解くと

$$q(r) = \frac{1}{2}z(r) \left(H_f^{(1)} f - g_f(r) \right) \quad (3.135)$$

これを (3.37a) の 2 行目に代入すると

$$\tilde{\mathcal{H}}f(r) = \tilde{g}(r) \quad (3.136)$$

を得る。ここで、

$$\tilde{\mathcal{H}}f(r) \equiv \frac{1}{2}H_q^{(1)} \left(z(r)H_f^{(1)} f \right) - 2\omega(r)f(r), \quad \tilde{g}(r) = \frac{1}{2}H_q^{(1)} (z(r)g_f(r)) + g_q(r). \quad (3.137)$$

である。 $\tilde{g}(r)$ は以下のように級数展開される。

$$\tilde{g}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_{2k} r^{2k}. \quad (3.138)$$

前提として、ここでは $\tilde{\mathcal{H}}f(r)$ を、正則関数 $f(r)$ について考えることにする。 $f(r)$ は以下のように級数展開されている。

$$f(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell} r^{\ell}. \quad (3.139)$$

$\tilde{\mathcal{H}}f(r)$ を

$$\tilde{\mathcal{H}}f(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [\tilde{\mathcal{H}}f]_{\ell} r^{\ell}, \quad (3.140)$$

のように表すことにすると、係数 $[\tilde{\mathcal{H}}f]_{\ell}$ は $S_{0,\ell}^{(1)}(\{f_n\})$ で表されることとなる。例えば、式 (3.119), (3.120), (3.121) 及び (3.124) より、以下が従う。

$$[\tilde{\mathcal{H}}f]_0 = 0, \quad [\tilde{\mathcal{H}}f]_1 = \frac{3c_1 f_1}{2\kappa}, \quad [\tilde{\mathcal{H}}f]_2 = 0 \quad (3.141)$$

また、

$$[\tilde{\mathcal{H}}f]_{\ell} = -\frac{(\ell-2)\ell^2(\ell+2)c_1 f_{\ell}}{2\kappa} + (\dots)f_{\ell-2} + \dots \quad (3.142)$$

である。この結果と、式 (3.138) をあわせて考えれば、式 (3.136) の解を

$$f^{\text{ih}}(r) = f^{\text{ih,I}}(r) + f^{\text{ih,II}}(r) + f^{\text{ih,III}}(r) \quad (3.143)$$

と得る。ここで、 $f^{\text{ih,I}}(r)$, $f^{\text{ih,II}}(r)$, $f^{\text{ih,III}}(r)$ はそれぞれ、

$$\tilde{\mathcal{H}}f^{\text{ih,I}}(r) = \tilde{g}_0 \quad (3.144)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}f^{\text{ih,II}}(r) = \tilde{g}_2 r^2 \quad (3.145)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}f^{\text{ih,III}}(r) = \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{g}_{2k} r^{2k}. \quad (3.146)$$

の特解である。ここで、

$$\tilde{\mathcal{H}}f(r, \rho) \Big|_{m=1} = -\frac{c_1(\rho-2)\rho^2(\rho+2)f_0(\rho)r^\rho}{2\kappa}, \quad (3.147)$$

を考えることにより、以下の2つの式を得ることができる。

$$\tilde{\mathcal{H}}\frac{\partial^2 f(r, \rho)}{\partial \rho^2} \Big|_{m=1, \rho=0} = \frac{4c_1 f_0(0)}{\kappa}, \quad \tilde{\mathcal{H}}\frac{\partial f(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{m=1, \rho=2} = -\frac{8c_1 f_0(2)r^2}{\kappa}. \quad (3.148)$$

これらと (3.144), (3.145) を見比べることにより、特解 $f^{\text{ih,I}}(r)$, $f^{\text{ih,II}}(r)$ を

$$f^{\text{ih,I}}(r) = \frac{\kappa \tilde{g}_0}{4c_1} \frac{\partial^2 f(r, \rho)}{\partial \rho^2} \Big|_{m=1, \rho=0, f_0(0)=1} \quad (3.149)$$

$$f^{\text{ih,II}}(r) = -\frac{\kappa \tilde{g}_2}{8c_1} \frac{\partial f(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{m=1, \rho=2, f_0(2)=1} \quad (3.150)$$

と求めることができる。 $f^{\text{ih,III}}(r)$ については、

$$f^{\text{ih,III}}(r) = \sum_{k=2} f_{2k} r^{2k} \quad (3.151)$$

の形で得られ、 $f_0 = f_2 = 0$ と定めれば、あとは小さい k から大きい k に向かって順に

$$S_{0,2k}^{(1)}(\{f_n\}) = \tilde{g}_{2k} \quad \text{for } k \geq 2 \quad (3.152)$$

を解けば決まる。以下 f_4, f_6, \dots と再帰的に決定できる。

3.2.7 非斉次項の展開係数

この小節では非斉次項 $\tilde{g}(r)$ の展開係数を求めることを目的とする。スカラーポテンシャルを求める方程式 (3.33) を改めて書くと、以下の通りだった。

$$\left(-\zeta^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}\right) + f_0^2(r)\right) \tilde{p} = 0 \quad (3.153)$$

解 \tilde{p} は以下を満たしている。

$$r \rightarrow 0, \quad \tilde{p}(r) \rightarrow \frac{1}{r}, \quad r \gg 1, \quad \tilde{p}(r) \propto e^{-r/\zeta}. \quad (3.154)$$

電場の表式

$$\varepsilon^{(r)}(r) = -\frac{\tilde{p}'(r)}{\kappa} + \frac{Q_0(r)}{r}, \quad \varepsilon^{(\theta)}(r) = \frac{\tilde{p}(r)}{\kappa r} - Q_0'(r). \quad (3.155)$$

と、(3.41), (3.137) より、 $\tilde{g}(r)$ を得ることができる。式 (3.153) は $r=0$ で正則特異点を持つ。そこで、 $\tilde{p}(r)$ を

$$\tilde{p}(r) = r^\rho \sum_{n=0} p_n(\rho) r^n, \quad p_0 \neq 0 \quad (3.156)$$

と置き、式 (3.153) に代入すれば、

$$(\rho + \ell + 3)(\rho + \ell + 1) \sum_{\ell=-2}^{\infty} p_{\ell+2}(\rho) r^{\ell+\rho} - \zeta^{-2} \sum_{\ell=2}^{\infty} r^{\ell+\rho} \sum_{n=2}^{\ell} (c * c)_n p_{\ell-n}(\rho) = 0 \quad (3.157)$$

を得る。(3.157)における $r^{\rho-2}$ の係数より、

$$(\rho + 1)(\rho - 1)p_0(\rho) = 0. \quad (3.158)$$

を得る。同様にして、

$$(\rho + 2)\rho p_1(\rho) = 0 \quad (3.159)$$

$$(\rho + 3)(\rho + 1)p_2(\rho) = 0 \quad (3.160)$$

$$(\rho + 4)(\rho + 2)p_3(\rho) = 0 \quad (3.161)$$

$$(\rho + 5)(\rho + 3)p_4(\rho) - \zeta^{-2}(c * c)_2 p_0(\rho) = 0 \quad (3.162)$$

$$(\rho + 6)(\rho + 4)p_5(\rho) - \zeta^{-2}(c * c)_2 p_1(\rho) = 0 \quad (3.163)$$

が得られる。また、 $\ell \geq 4$ については以下の表式を得る。

$$(\rho + \ell + 1)(\rho + \ell - 1)p_\ell(\rho) - \zeta^{-2} \sum_{n=0}^{\ell-4} (c * c)_{\ell-n-2} p_n(\rho) = 0, \quad \ell \geq 4. \quad (3.164)$$

(3.158)- (3.164) より、 $\rho = \pm 1$ について、(3.156) の基本的な解を、 n が奇数と、2 のときには

$$p_\ell(\rho) = 0, \quad (3.165)$$

それ以外るときには

$$p_\ell(\rho) = \frac{\sum_{n=0}^{\ell-4} (c * c)_{\ell-n-2} p_n(\rho)}{\zeta^2(\rho + \ell + 1)(\rho + \ell - 1)}, \quad \ell \geq 4. \quad (3.166)$$

の形で得られる。これらより、2 つの基礎的な解が級数展開の形で

$$\tilde{p}_{\text{high}}(r) = r \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}(1) r^{2k}, \quad \tilde{p}_{\text{low}}(r) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}(-1) r^{2k} \quad (3.167)$$

と得られる。 $p_0(\pm 1) = 1$ とする。これらの解は $r \in (0, r_{c1})$ において有効な級数展開である。 $r_{c1} \sim 0.2\xi$ とした。 $\tilde{p}_{\text{high}}(r)$ と $\tilde{p}_{\text{low}}(r)$ の r が大きい部分は別の数値的な手法、例えば、Runge-Kutta 法などにより求められる。

求めたスカラーポテンシャル

$$\tilde{p}(r) = \tilde{p}_{\text{low}}(r) + C_e \tilde{p}_{\text{high}}(r) \quad (3.168)$$

は (3.154) の $r \rightarrow 0$ での境界条件を満たす。係数 C_e は (3.154) の $r = r_{c2} \gg \xi$ での境界条件を考慮して、

$$C_e = -\frac{\zeta \tilde{p}'_{\text{low}}(r_{c2}) + \tilde{p}_{\text{low}}(r_{c2})}{\zeta \tilde{p}'_{\text{high}}(r_{c2}) + \tilde{p}_{\text{high}}(r_{c2})} \quad (3.169)$$

で得られる。 $r = r_{c2} \gg \xi$ であるので

$$\frac{\tilde{p}'(r_{c2})}{\tilde{p}(r_{c2})} = -\frac{1}{\zeta} \quad (3.170)$$

も成り立っている。

式 (3.167) と (3.168) より、 $\tilde{p}(r)$ を

$$\tilde{p}(r) = \frac{1}{r} + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_{2k+1} r^{2k+1}, \quad \tilde{p}_{2k+1} = p_{2k+2}(-1) + C_e p_{2k}(+1) \quad (3.171)$$

と書くことができる。したがって、電場の成分は

$$\varepsilon^{(r)}(r) = -\frac{\tilde{p}'(r)}{\kappa} + \frac{Q_0(r)}{r} = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(-\frac{n\tilde{p}_n}{\kappa} + a_n \right) r^{n-1} \quad (3.172a)$$

$$\varepsilon^{(\theta)}(r) = \frac{\tilde{p}(r)}{\kappa r} - Q_0'(r) = \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{\tilde{p}_n}{\kappa} - na_n \right) r^{n-1}, \quad (3.172b)$$

と書き表せる。電場 $\tilde{\varepsilon}(r)$ の展開係数を

$$\tilde{\varepsilon}(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{r\varepsilon^{(r)}(r)}{1+r^2 f_0^2(r)} \right) - \varepsilon^{(\theta)}(r) = \sum_{n=0,2,4,\dots} \tilde{\varepsilon}_n r^n. \quad (3.173)$$

と描いておくことにする。

次に、 $\tilde{g}(r)$ の展開係数を求めていく。 $\tilde{g}(r)$ は

$$\tilde{g}(r) = v\sigma_n \left(\frac{H_q^{(1)}(z(r)f_0'(r))}{2\kappa^2\zeta^2} + \tilde{\varepsilon}(r) \right) \quad (3.174)$$

と表されている。ここで、簡単のため、 $z(r)f_0'(r)$ を

$$z(r)f_0'(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{2\ell} (z * dc)_{2\ell}, \quad (z * dc)_{2\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} (2n+1) z_{2(\ell-n)} c_{2n+1} \quad (3.175)$$

と描いておくことにすると、

$$H_q^{(1)}(z(r)f_0'(r)) = \sum_{\ell=1}^{\infty} r^{2\ell} \sum_{n=0}^{\ell-1} \left((2\ell+1)(2n+1) F_{2(\ell+1-n)}^{(1)} - (c * c)_{2(\ell-n)} \right) (z * dc)_{2n}. \quad (3.176)$$

と書くことができる。最終的には、 $\tilde{g}(r)$ を

$$\tilde{g}(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{2\ell} \tilde{g}_{2\ell} \quad (3.177)$$

と展開したとき、その係数は

$$\tilde{g}_{2\ell} = v\sigma_n \left(\frac{1}{2\kappa^2\zeta^2} \sum_{n=0}^{\ell-1} \left((2\ell+1)(2n+1) F_{2(\ell+1-n)}^{(1)} - (c * c)_{2(\ell-n)} \right) (z * dc)_{2n} + \tilde{\varepsilon}_{2\ell} \right). \quad (3.178)$$

の形で得ることができる。

3.2.8 非斉次方程式の特解；再考

前の小節までで、電場ソース項の級数解を得ることができ、これにより、非斉次方程式の特解を導出することができるようになった。実際に数値計算をすれば求まるが、ここで、式 (3.149), (3.150) について、改めて考える。これらは $f(r; \rho)$ を微分したものが解になっているため、Frobenius の手法により導かれる対数項を持つよう思える。しかし、(3.149), (3.150) は係数に \tilde{g}_0, \tilde{g}_2 を持っており、実際に計算すると、この2項はゼロになっていることがわかる。(実際には $\tilde{g}_0 - \tilde{g}_3$ はすべてゼロになる。) したがって、この特解は対数項を持つことはなく、 r の冪の項のみを持つことがわかる。

第 4 章

TDGL による数値計算

本章では、前章までで計算した級数解、漸近形を用いて実際に数値計算を行い、得られた結果を議論する。パラメータとして κ, ζ を設定し、これらの物質パラメータが変わった場合の電流と磁場の状態、及び磁束フロー駆動力の振る舞いの変化を議論する。電流と磁場については、Hu-Thompson の論文 [50] で言及されているバックフロー構造に着目して議論する。磁束フロー駆動力については流体力由来の駆動力と電磁気由来の駆動力がそれぞれ渦中心からどのような振る舞いをするのかを示し、その合力が一定値に収束するものの、その値が従来から知られている $|\mathbf{j}_t \times \phi_0|$ ではないという点を議論する。

4.1 量子渦の形状

4.1.1 平衡状態の物理量

平衡状態の物理量は GL 方程式 (3.88), (3.89) を解くことによって得られる。本計算では $\kappa = 3, 5, 7, 10$ の 4 つのパラメータを用いて比較を行った。得られた秩序変数 $f_0(r)$ を図 4.1 に、ベクトルポテンシャル $A_0(r)$ を図 4.2 に示した。Abrikosov の単位系が λ を基準とすることを反映して、秩序変数 f_0 は κ が大きいほどコヒーレンス長 ξ が小さくなっている。一方で、ベクトルポテンシャル A_0 は $r = 1$ 、すなわち磁場侵入長 λ の位置でピークを持ち、遠方では $1/\kappa r$ に漸近している。

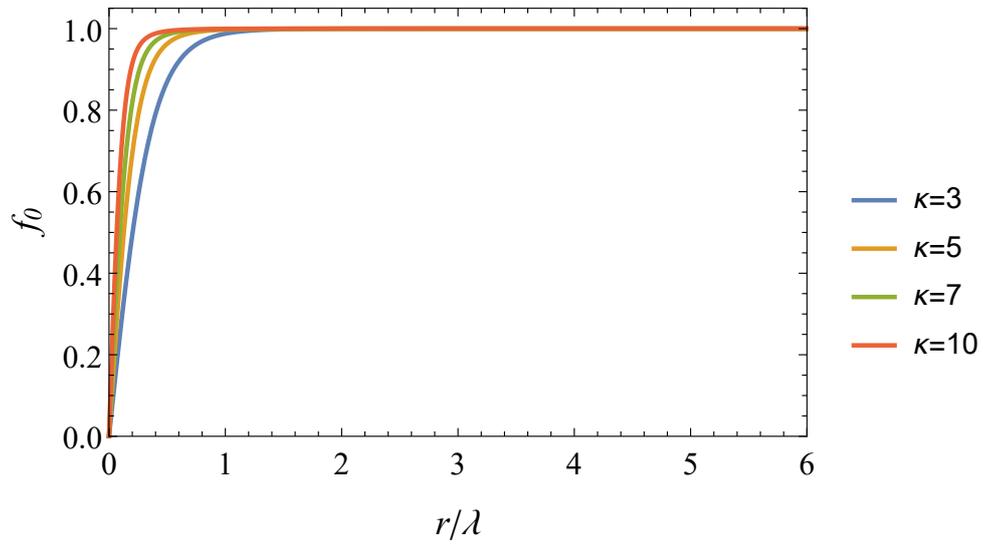
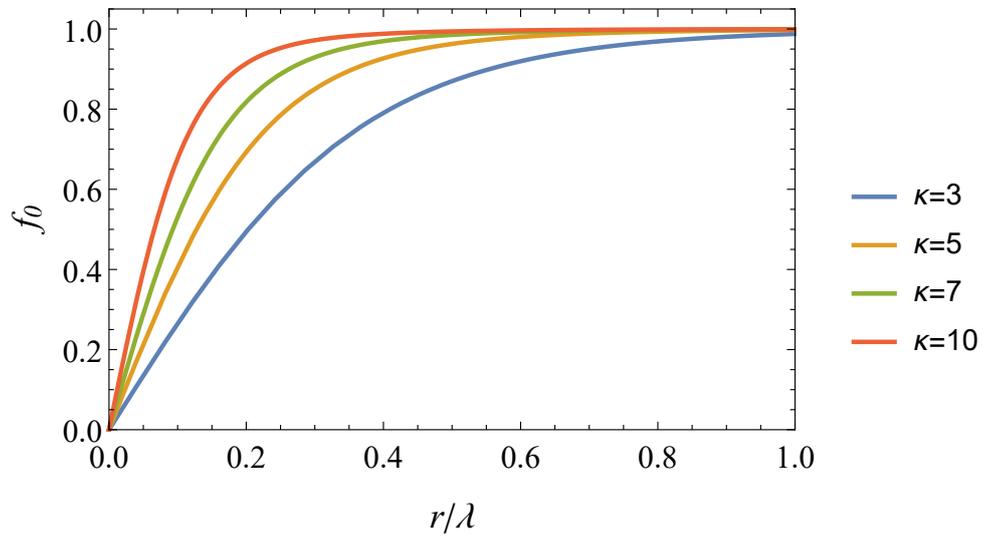
(a) 秩序変数 f_0 (b) 秩序変数 f_0 について、 $r \leq 1$ までの範囲を示したもの。

図 4.1: $\kappa = 3, 5, 7, 10$ での秩序変数 f_0 。 λ を基準とする単位系のため、 κ が大きくなるにつれ、コヒーレンス長 ξ が短くなっていることがわかる。

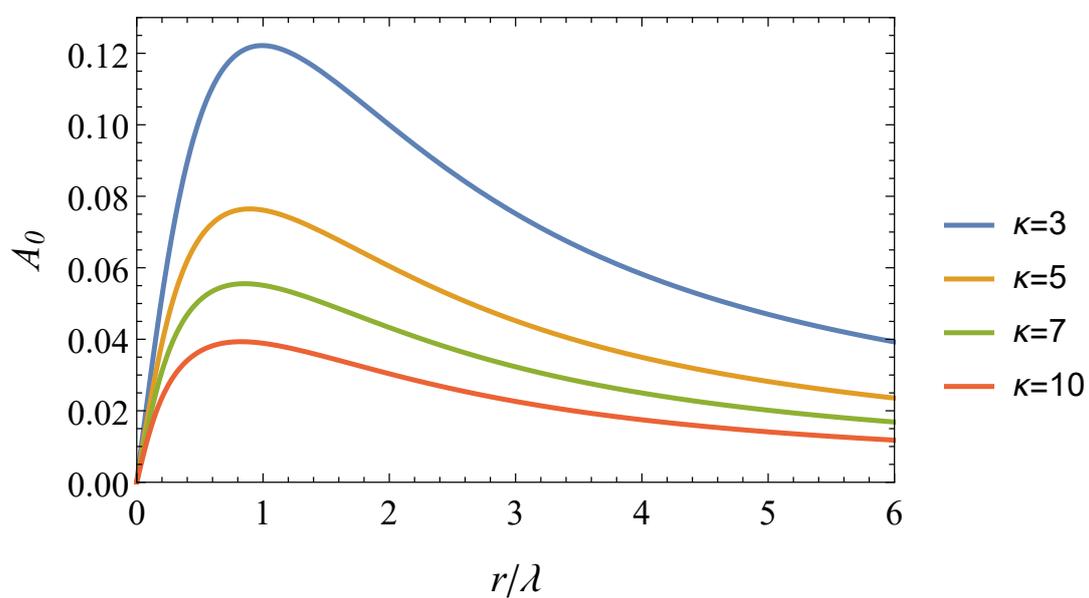


図 4.2: $\kappa = 3, 5, 7, 10$ でのベクトルポテンシャル A_0 。 λ を基準とする単位系のため、ベクトルポテンシャルのピークはどの κ についても $r = 1$ にある。

4.1.2 秩序変数

各パラメータについて TDGL 方程式の数値計算を行った。計算にあたり、流れている輸送電流は y 軸について対称と仮定した。すなわち、 $j_+ = j_-$ である。このとき、境界条件 (3.49) の 1 行目は $j_+ - j_- = 0$ となる。したがって、部分波展開の角運動量 m は奇数のみを考える。また、計算の際、式 (3.23), (3.24) の角運動量 m についての和は $m = 9$ 程度まで取れば十分である。角運動量 m が大きくなると、秩序変数やベクトルポテンシャルといった物理量の寄与は小さくなるからである。例として、 $\kappa = 10$ の場合を図 4.3 に示した。

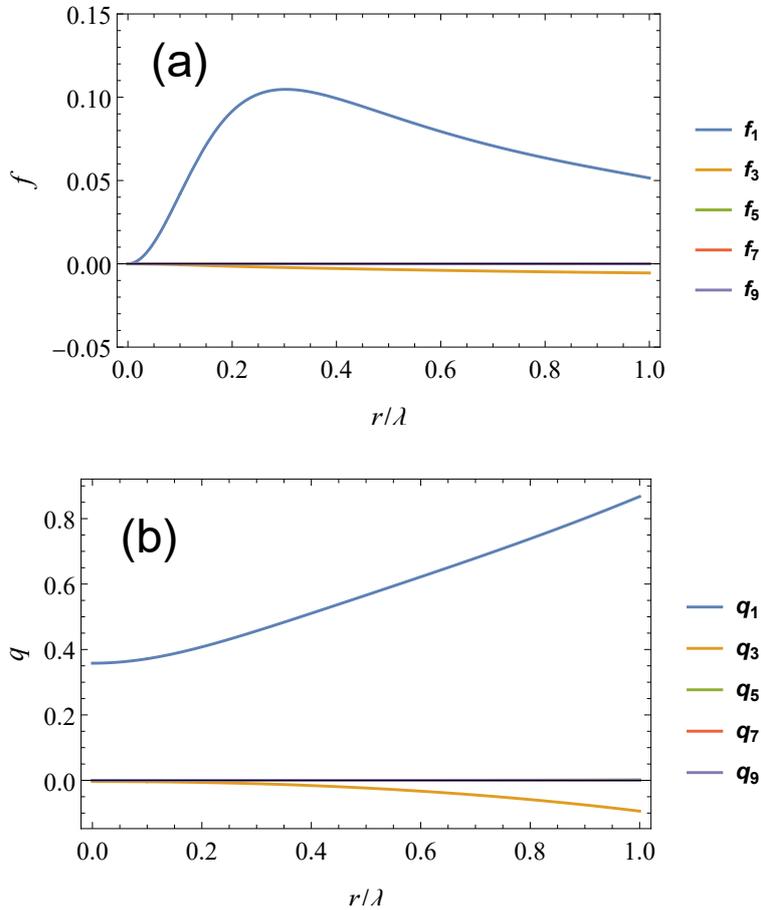


図 4.3: $\kappa = 10, \zeta = 1/3, v\sigma_n = 1$ での (a) 秩序変数 $f^{(1)}$ と (b) ゲージ不変ベクトルポテンシャル $q^{(1)}$ の角運動量ごとのプロット。角運動量 m が大きいほど、各項の寄与が小さいことがわかる。

秩序変数 f_1 の計算結果を図 4.7a, 4.4a に等高線図として示す。破線の円の内部がこの計算が信頼できる範囲である。横軸、縦軸はそれぞれ実空間での x, y をコヒーレンス長 ξ で規格化したものである。2 つの図について、 κ の値が変わっても基本的には形が変わ

らないことがわかる。図の x 正方向に向かって輸送電流 j_t が流れており、磁束フロー速度 v は $-y$ 方向である。図より、秩序変数の穴が動いていく方向に穴が広がるように変調を受ける。磁束フロー Hall 効果は考えていないため、図は左右対称である。

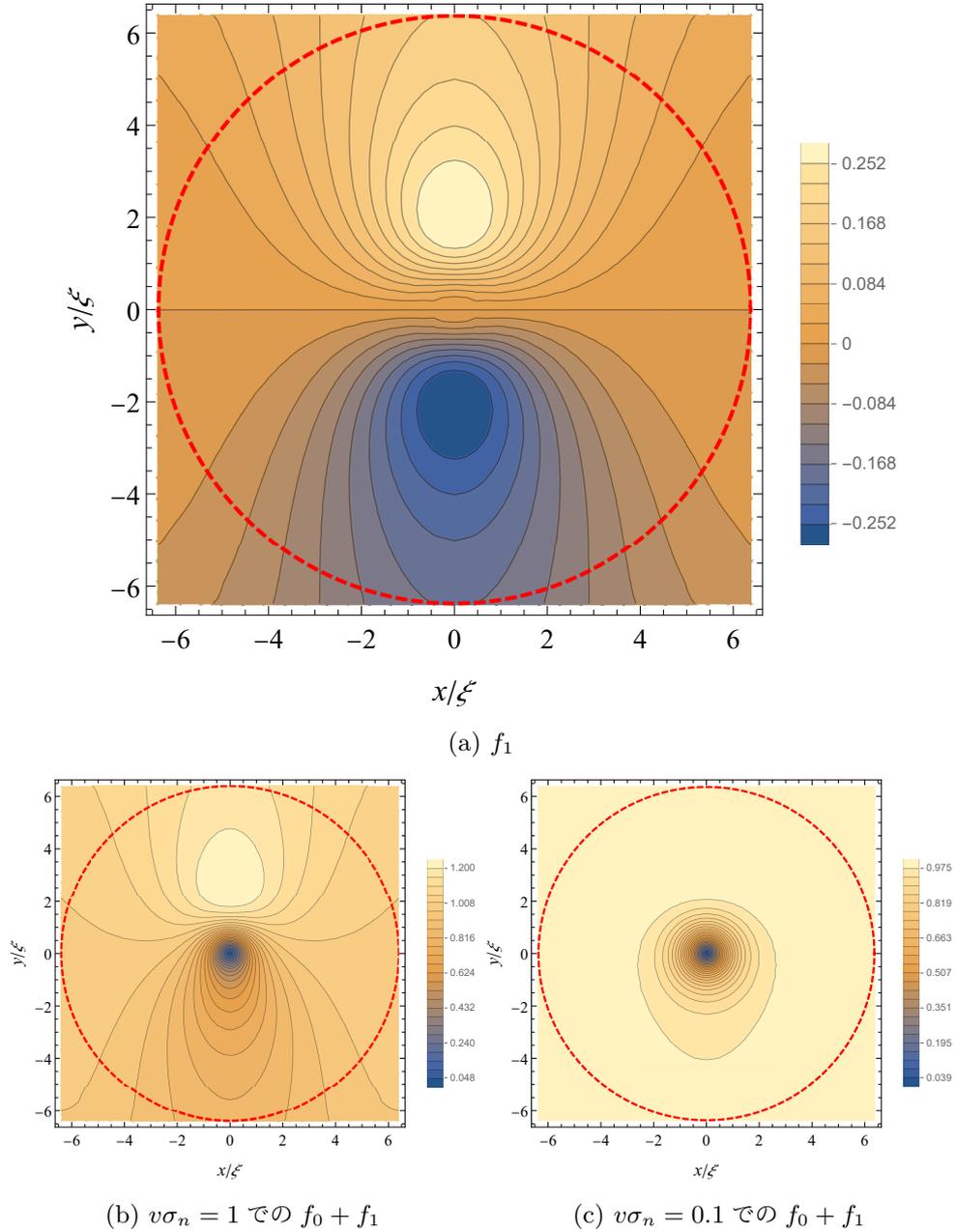


図 4.4: $\kappa = 3, \zeta = 1/3$ における秩序変数の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

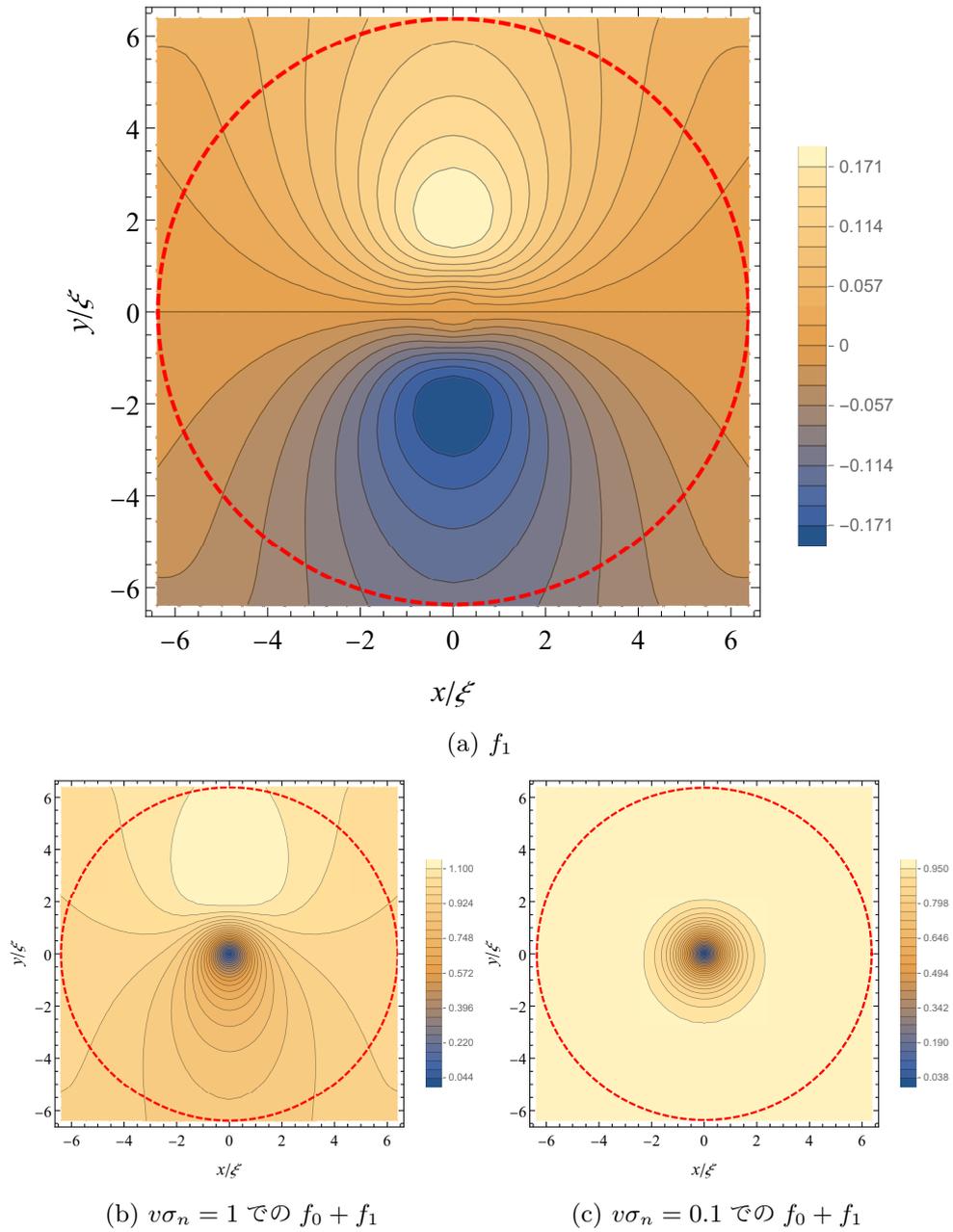


図 4.5: $\kappa = 5, \zeta = 1/3$ における秩序変数の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

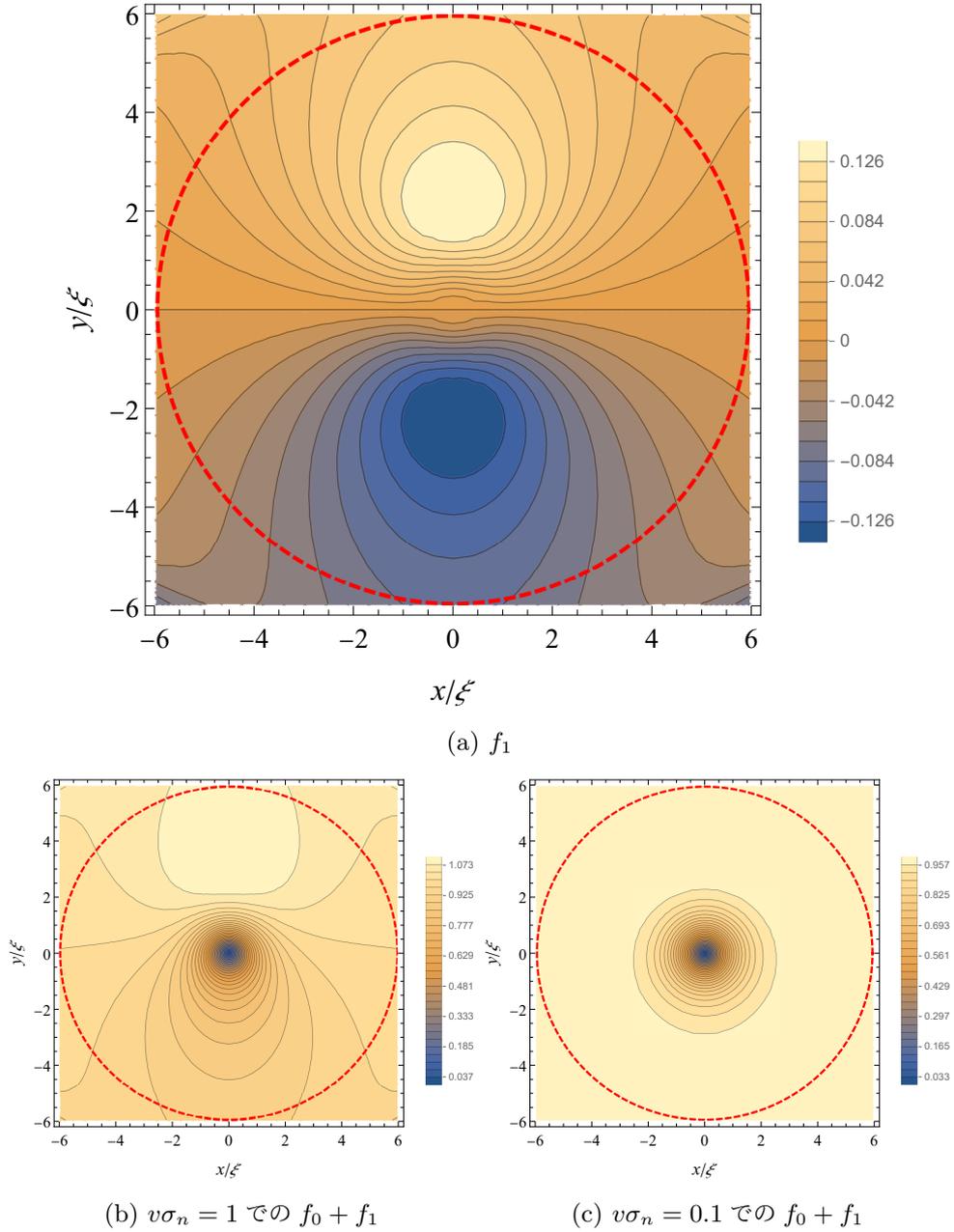


図 4.6: $\kappa = 7, \zeta = 1/3$ における秩序変数の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

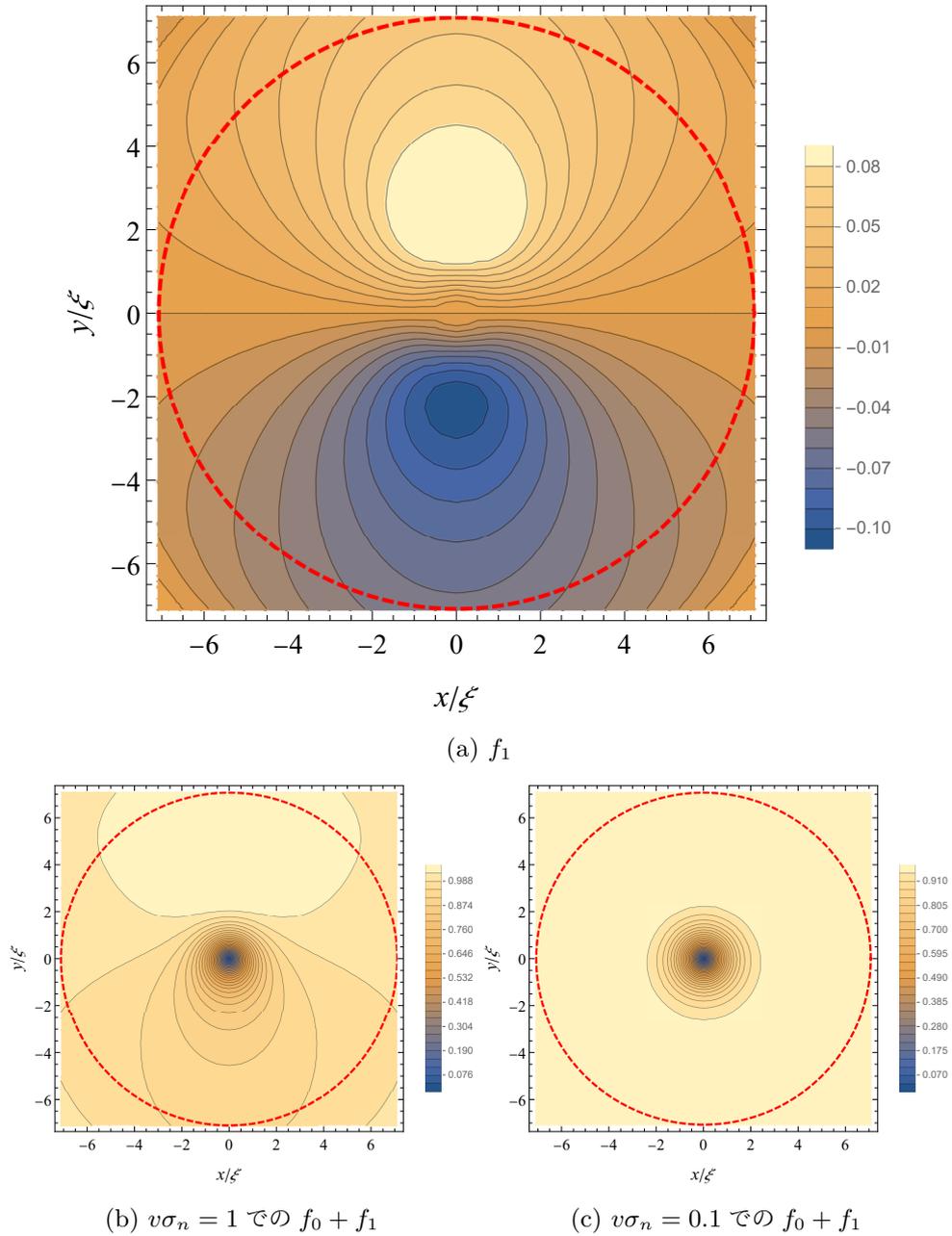


図 4.7: $\kappa = 10, \zeta = 1/3$ における秩序変数の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

4.1.3 磁場、電流

磁場の実空間での等高線図を図 4.8 から図 4.11 に示した。それぞれの図の (a) は渦糸速度 v の 1 次の磁場 H_1 のみを示し、(b),(c) は平衡状態での磁場 H_0 と H_1 との和を示している。 H_1 は渦糸フロー速度 v に比例しており、 $v\sigma_n = 1, 0.1$ の場合をそれぞれ図示した。

H_1 のみを示した図 4.8a から図 4.11a はそれぞれ輸送電流による磁場を含んでおり、これは磁場侵入長 λ を有限値にして計算した効果である。輸送電流は London 方程式の結果の通り、 $\cosh y$ に比例する形をしている。したがって、輸送電流による磁場は $\sinh y$ の形をしており、 y の正方向から負方向へ勾配がついた図が得られる。電流の 2 次元面内のベクトル図も図 4.12 に示す。前述した通り、電流は遠方で London 方程式の帰結として、 $\cosh y$ に比例する輸送電流に接続するという境界条件を課している。得られたベクトル図はそれを反映して、 y の両端から中心に向かって強度が減衰している。

ここで、 $\kappa = 10$ について j_1, H_1 から輸送電流の成分、また、輸送電流が作る磁場の成分を引き去った残りの成分を図 4.13 に図示する。電流のベクトル図と磁場の等高線図を重ねて示した。渦中心の上下に小さな別の渦電流があり、さらにその外側に大きな構造があるのがみえる。磁場は双極子様の形を持っており、渦中心で電流が輸送電流と反対方向に流れている。これは Hu-Thompson(1972) [50] の論文で言及されているバックフロー構造である。Hu-Thompson の論文から引用した図 4.14b と本研究で得られた図 4.14a を並べてみてもほぼ同じ図となっていることがわかる。上下の小さな渦電流は、図 4.7a で示した f_1 の構造に対応している。秩序変数が正方向にある部分には磁場が入り込みづらくなっているため、バックフロー磁場は負方向、電流もそれに対応する向きとなっている。

Hu-Thompson の示したバックフローの図 4.14b は TDGL 方程式の解の漸近形をもとに描かれたが、本研究では厳密に数値計算をすることによりあらためてバックフロー構造を図示し、バックフローが散逸領域に存在することを示した。また、Hu-Thompson の計算は、第 2 種極限を取り輸送電流 j_t は一定値とする従来型の手法を用いているが [50]、輸送電流を空間変化するものとして計算してもこのバックフロー構造は現れるということが明らかになった。

数値的にみると、渦中心部分において、バックフローの絶対値は輸送電流と比べて $\kappa = 10$ のとき 5.2% 程度、 $\kappa = 3$ のとき 18% 程度である。したがって、輸送電流を引き去っていない場合に渦中心に実際に逆向きの電流が流れているわけではなく、あくまで、電流を弱める働きをする程度である。このとき、渦中心には輸送電流 $j_t(\mathbf{r})$ からバックフロー電流を差し引いた値の常伝導電流が流れている。常伝導電流のベクトル図を図 4.15 に示す。

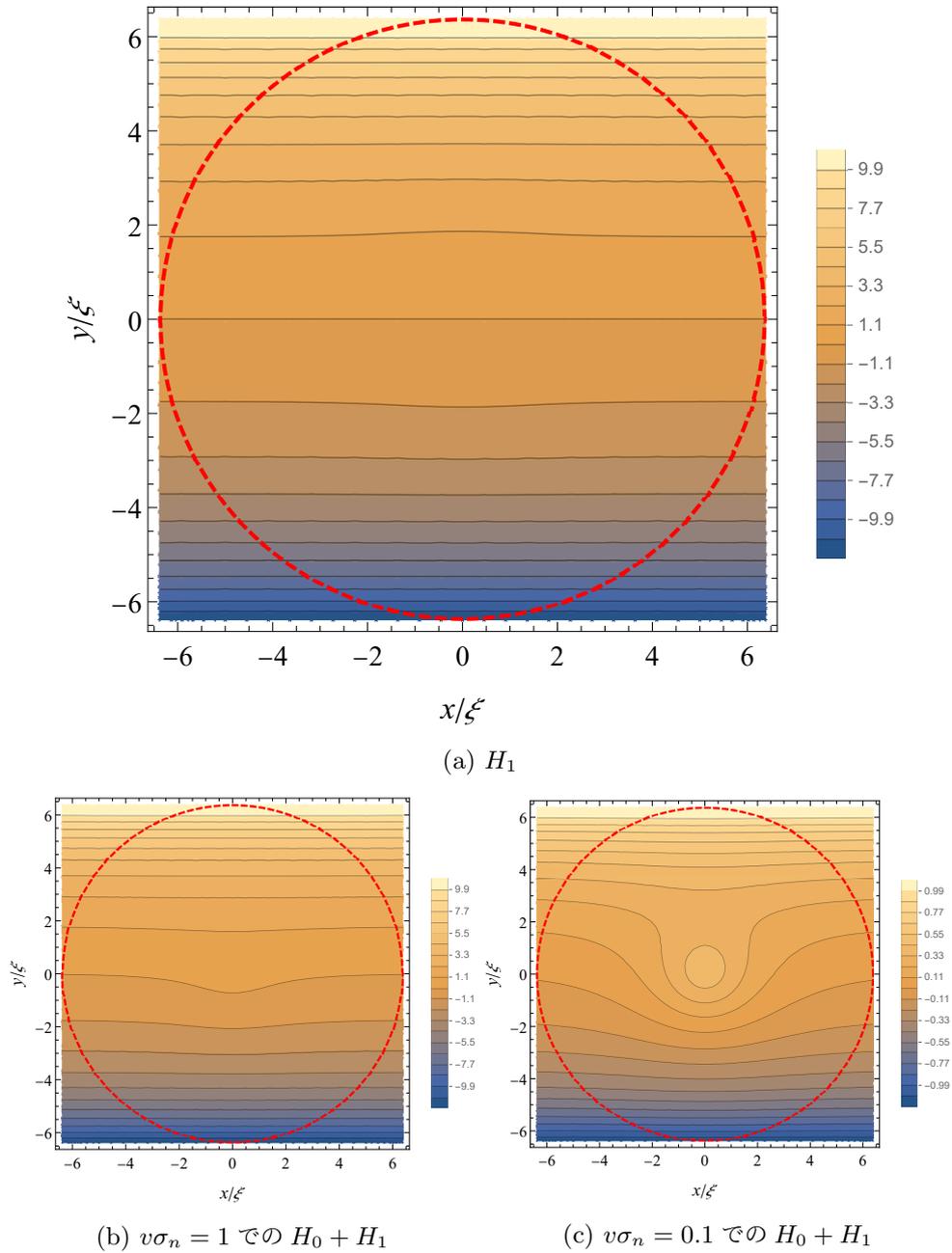


図 4.8: $\kappa = 3, \zeta = 1/3$ における磁場の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

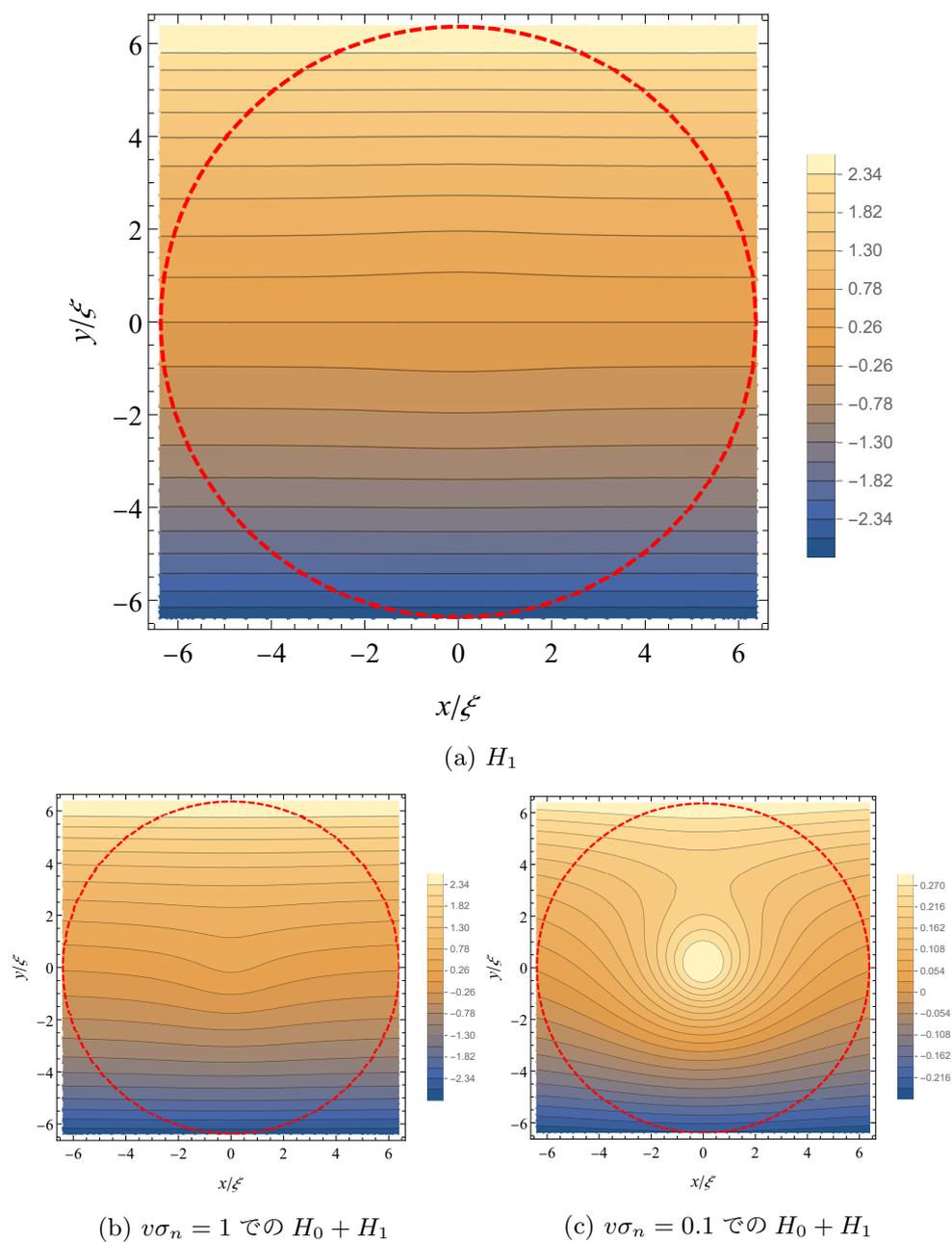


図 4.9: $\kappa = 5, \zeta = 1/3$ における磁場の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

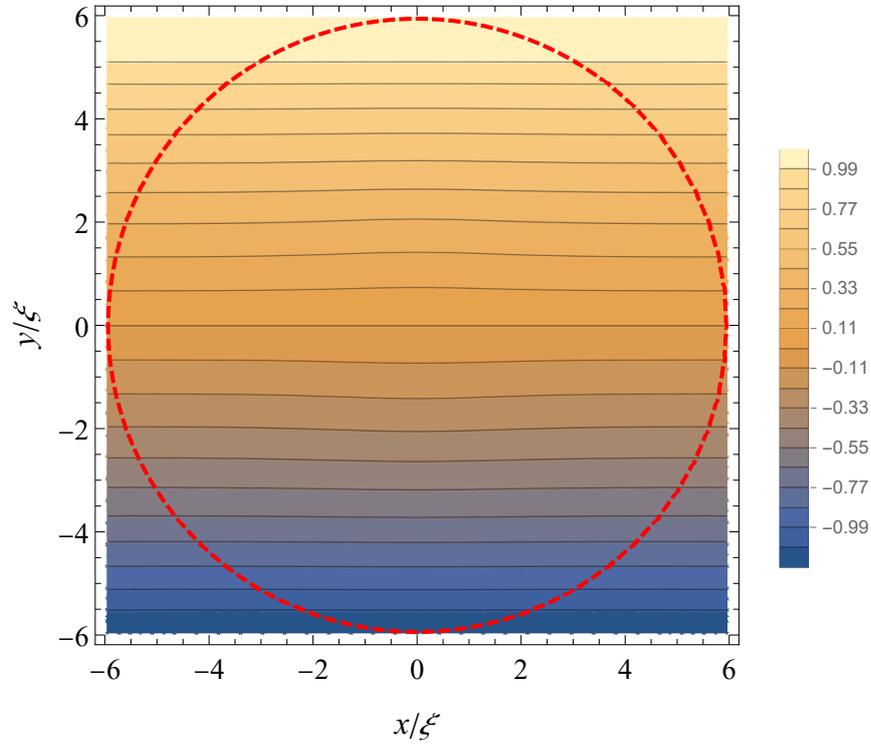
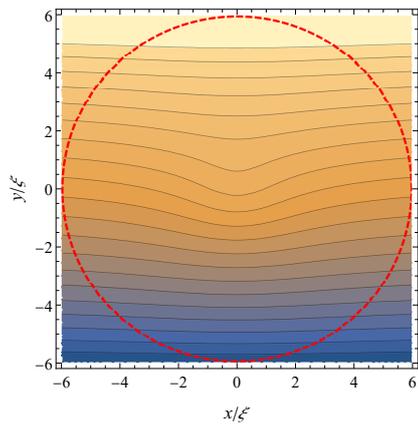
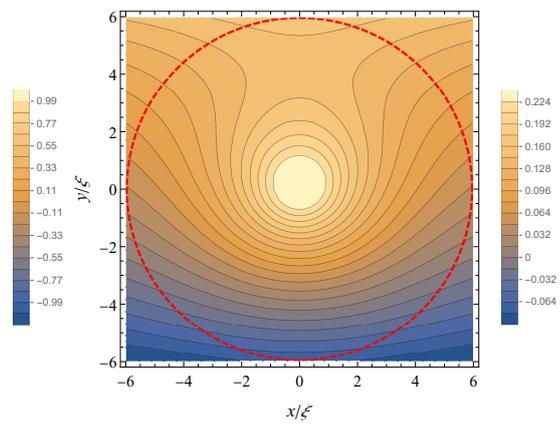
(a) H_1 (b) $v\sigma_n = 1$ での $H_0 + H_1$ (c) $v\sigma_n = 0.1$ での $H_0 + H_1$

図 4.10: $\kappa = 7, \zeta = 1/3$ における磁場の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

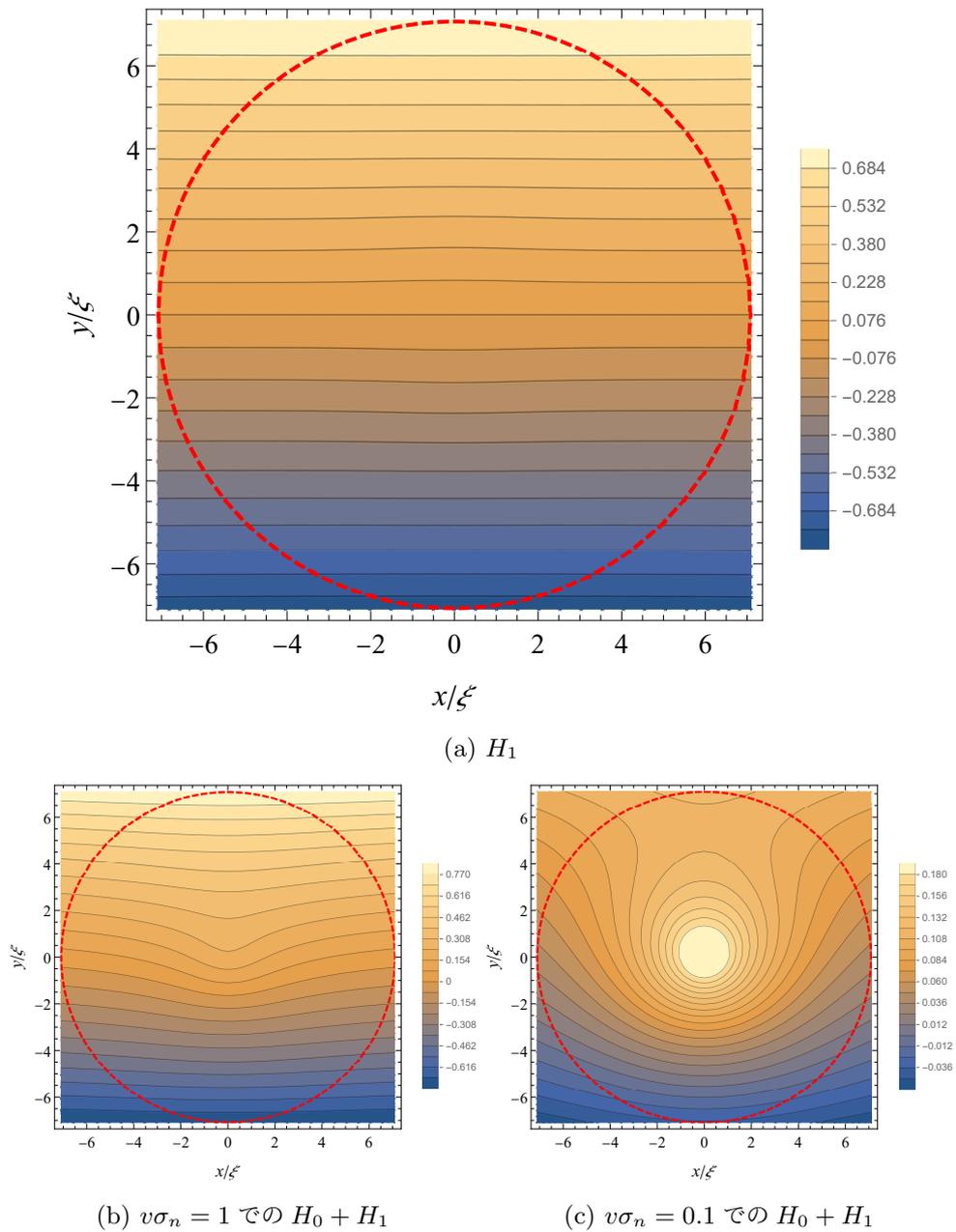


図 4.11: $\kappa = 10, \zeta = 1/3$ における磁場の等高線図。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

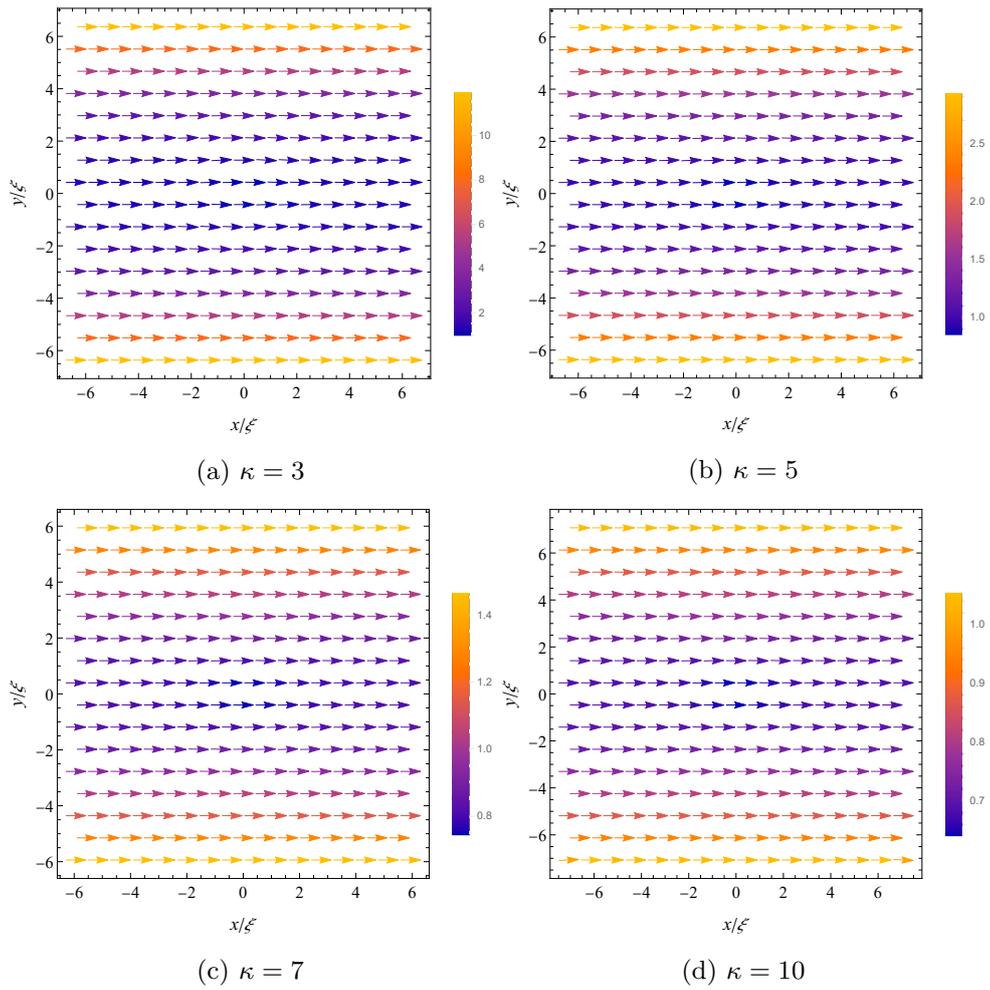


図 4.12: 輸送電流は x の正方向に流れている。 y 方向には端から指数的に減衰し、 $\cosh y$ に比例する大きさを持つ。

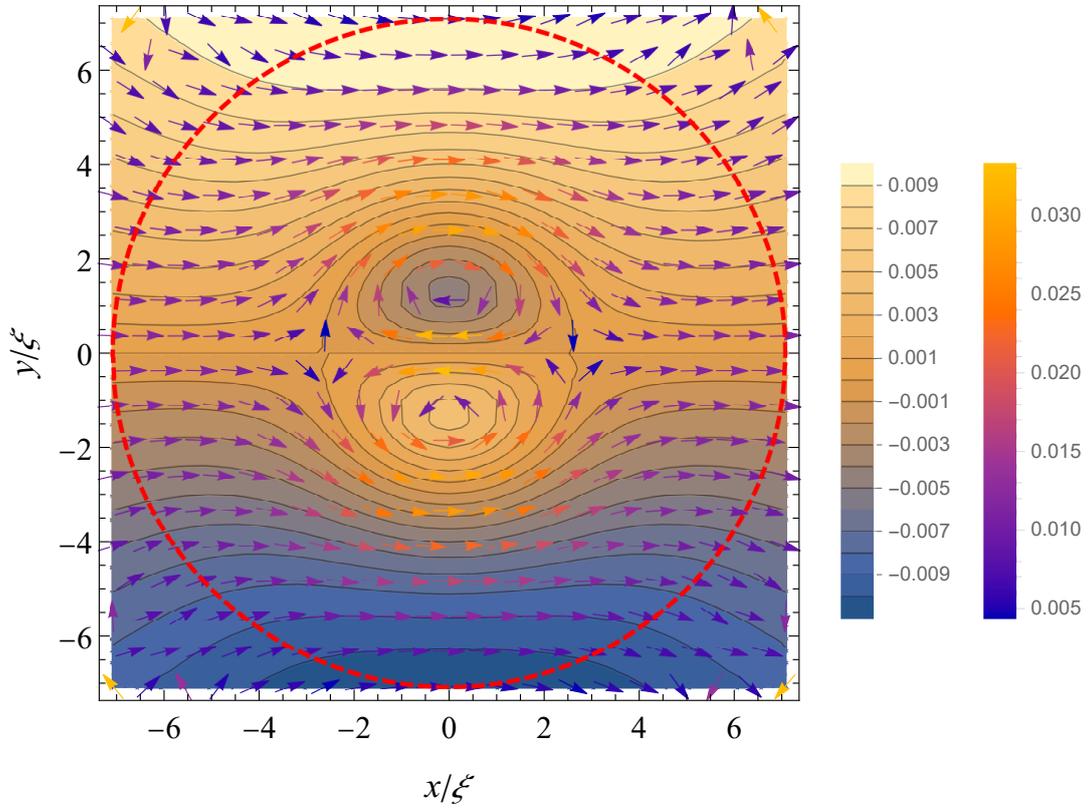
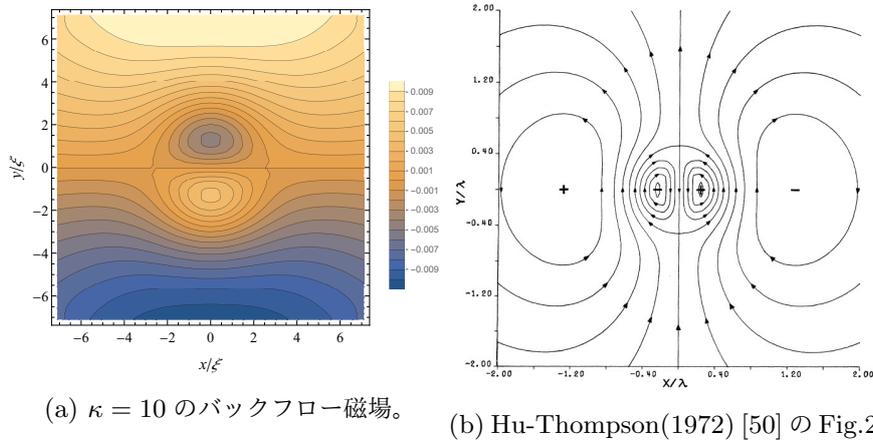


図 4.13: $\kappa = 10, \zeta = 1/3$ でのバックフロー電流とそれによる磁場。磁束渦の中心である原点付近で x 負方向の電流成分がある。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。



(a) $\kappa = 10$ のバックフロー磁場。

(b) Hu-Thompson(1972) [50] の Fig.2

図 4.14: バックフロー磁場の等高線プロットを Hu-Thompson の論文の図と並べたもの。小さな渦構造とその外側の大きな渦構造がよく一致している。

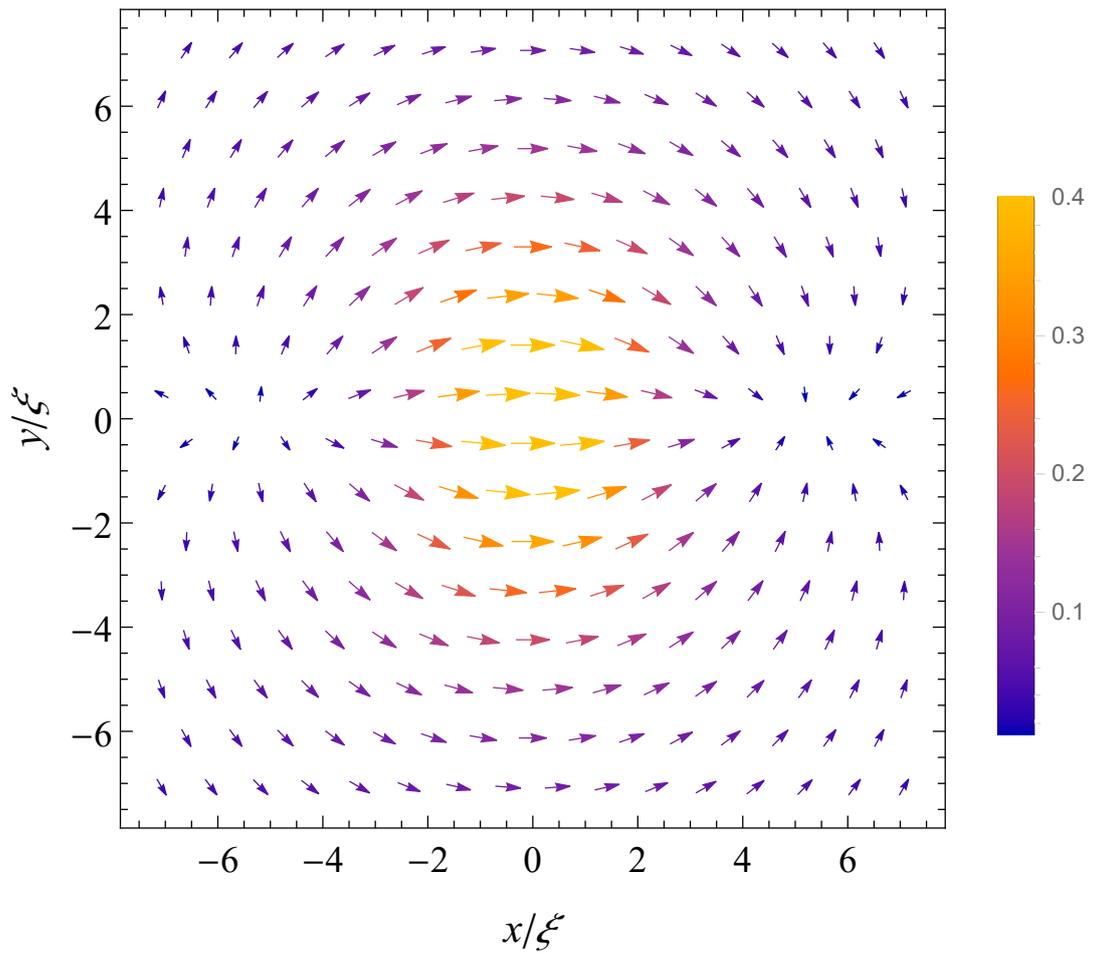


図 4.15: 常伝導電流 j_n を示したベクトル図。 $\kappa = 10, \zeta = 1/3, v\sigma_n = 1$ とした。 $v\sigma_n = 1$ として計算しているのので、プロットは電場ベクトルに一致している。渦中心付近の超伝導が壊れたあたりに流れていることがわかる。

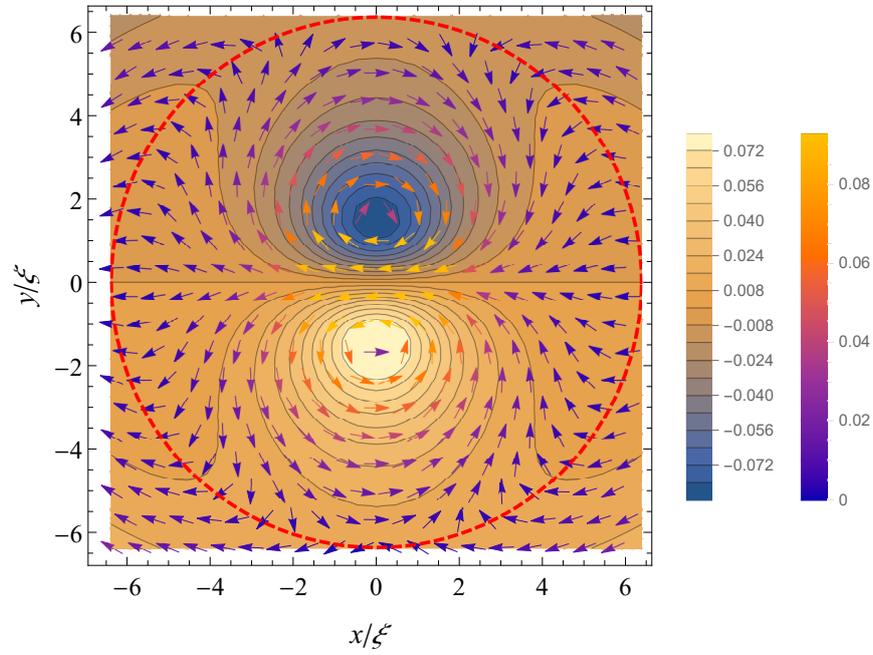
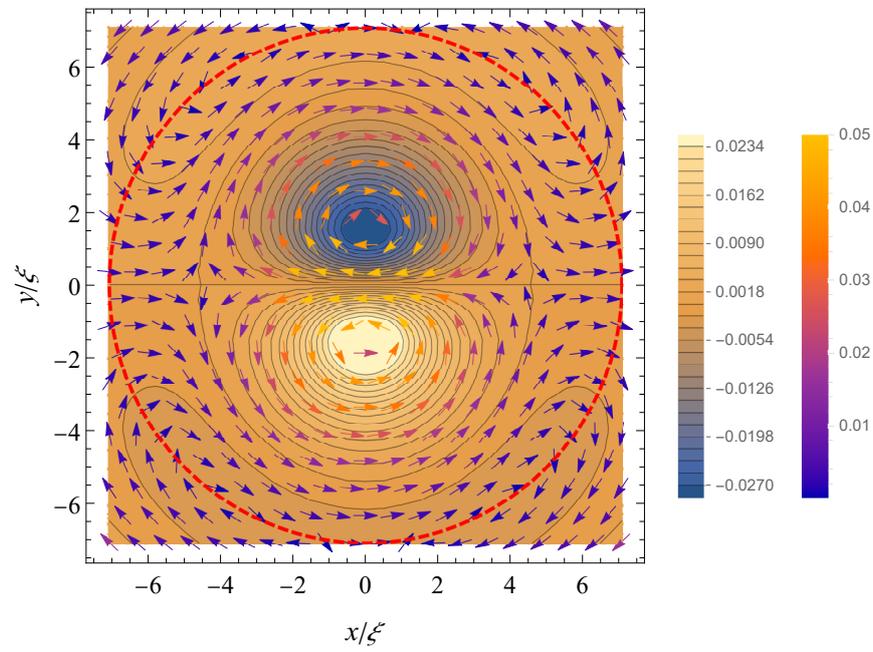
4.1.4 バックフローのパラメータ依存性

Hu-Thompson は κ, ζ の比によってバックフロー電流が増強あるいは減衰すると主張している [50]。彼らの論文で図示されているのはパラメータが 1 種類にとどまっていたが、本研究は複数のパラメータで計算できているのでそれを図示する。

まず、 $\zeta = 1/3$ と固定して、 κ を変化させたものを図 4.16 に示す。 κ の値が小さいほど、バックフロー電流が強くと現れていることが図からわかる。 $\kappa = 3$ では x の正方向への電流成分、すなわち、輸送電流と同じ方向の電流成分が図示した範囲内に表れていない。 κ が大きくなるにつれ、渦中心付近のバックフローが弱まるとともに、上下の渦電流のさらに外側にもう一つの渦構造が表れていることがわかる。これらの計算から、 κ が小さいほどバックフローが強くと現れることが確認できた。

ζ を変化させたときのバックフロー図について、 $\kappa = 7$ で計算したものを示す。 ζ が小さいほどバックフロー電流の強度が高いことが図からわかる。図 4.17c と図 4.17d の間でフローの向きが変わっており、そのときに渦中心付近上下にある渦が消えていることがわかる。その後、図 4.17e の ζ では輸送電流に順方向の電流成分が強くと残り、外側の渦構造がやや磁束渦中心に近づいていることがわかる。

$\kappa = 5$ についても同様に、渦中心でのバックフロー電流の符号が変わる ζ 付近での計算を図 4.18 に示す。 $\kappa = 7$ と同じ傾向が異なる κ でも見られる。

(a) $\kappa = 3$ (b) $\kappa = 5$

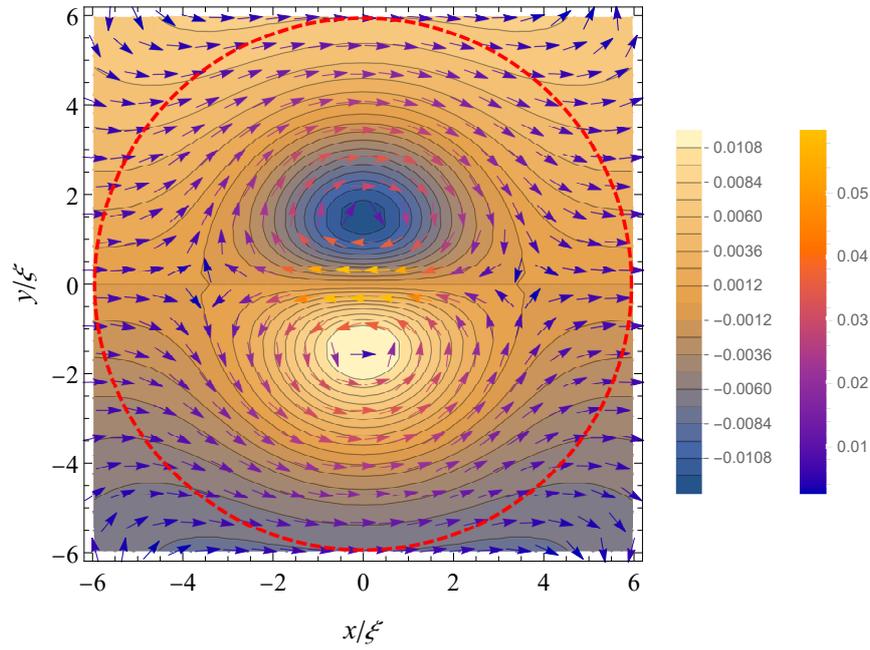
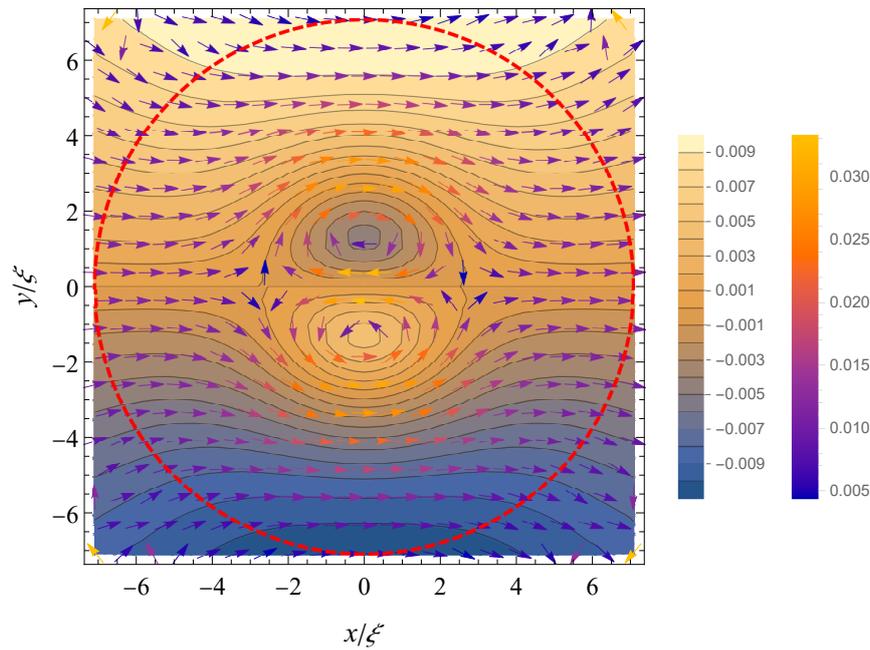
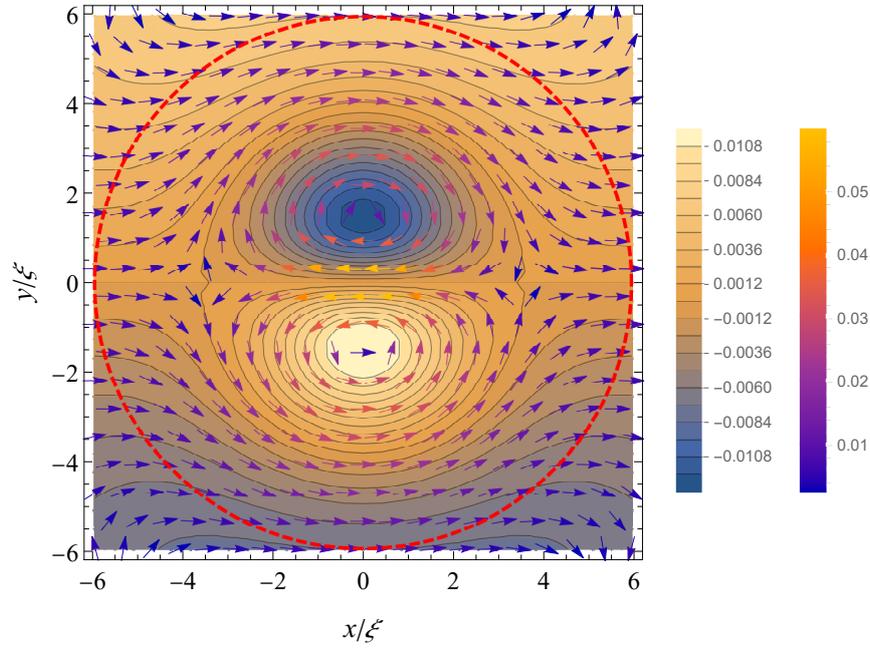
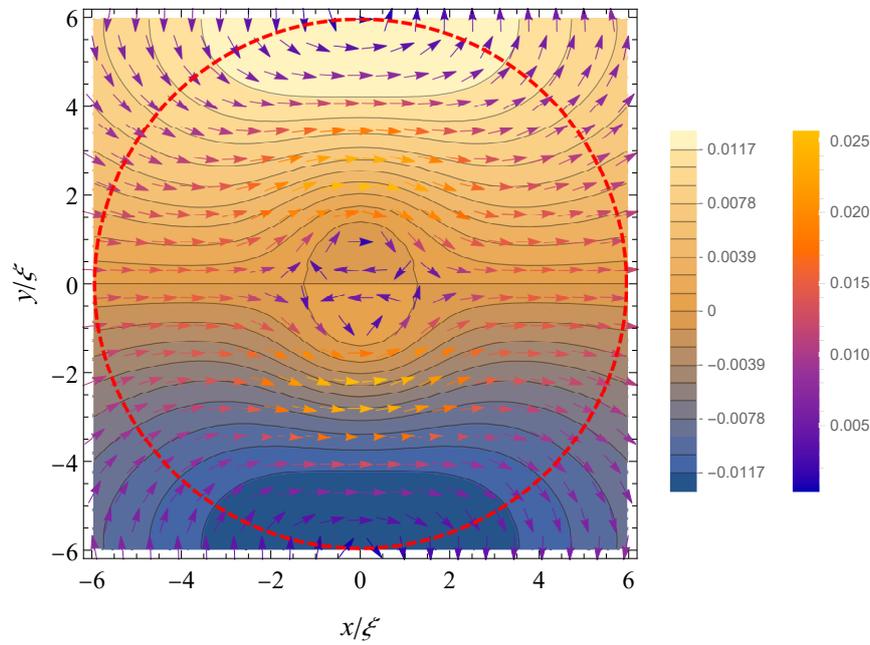
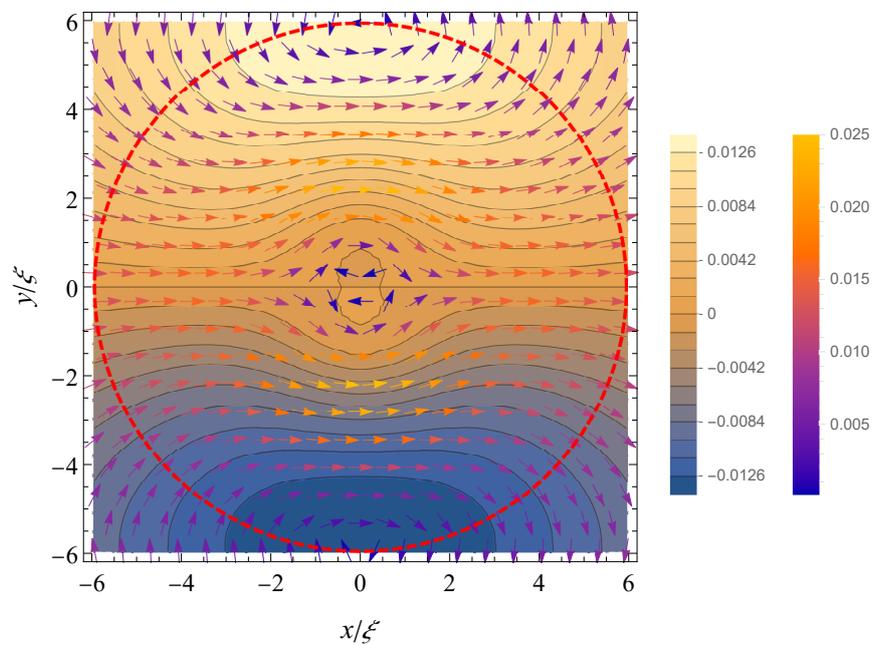
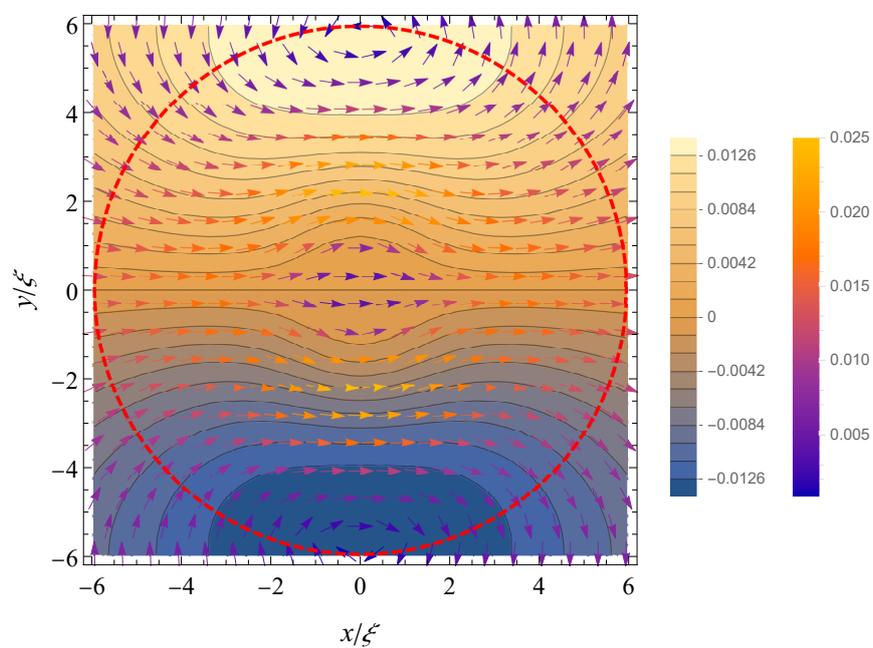
(c) $\kappa = 7$ (d) $\kappa = 10$

図 4.16: $\zeta = 1/3, v\sigma_n = 1, \kappa = 3, 5, 7, 10$ でのバックフローを图示した。渦中心部分で輸送電流とは反対方向に流れる電流成分がある。また、その上下に小さな渦流が 2 つ生じている。この渦流、またそれに付随するバックフロー磁場は f_1 が正の部分で負になっていることがわかる。 ζ を固定した上では κ が大きいほどバックフローの絶対値は小さくなり、外側の渦構造が近くに存在することもわかる。図中の赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

(a) $\kappa = 7, \zeta = 1/3, v\sigma_n = 1$ (b) $\kappa = 7, \zeta = 21/50, v\sigma_n = 1$

(c) $\kappa = 7, \zeta = 43/100, v\sigma_n = 1$ (d) $\kappa = 7, \zeta = 11/25, v\sigma_n = 1$

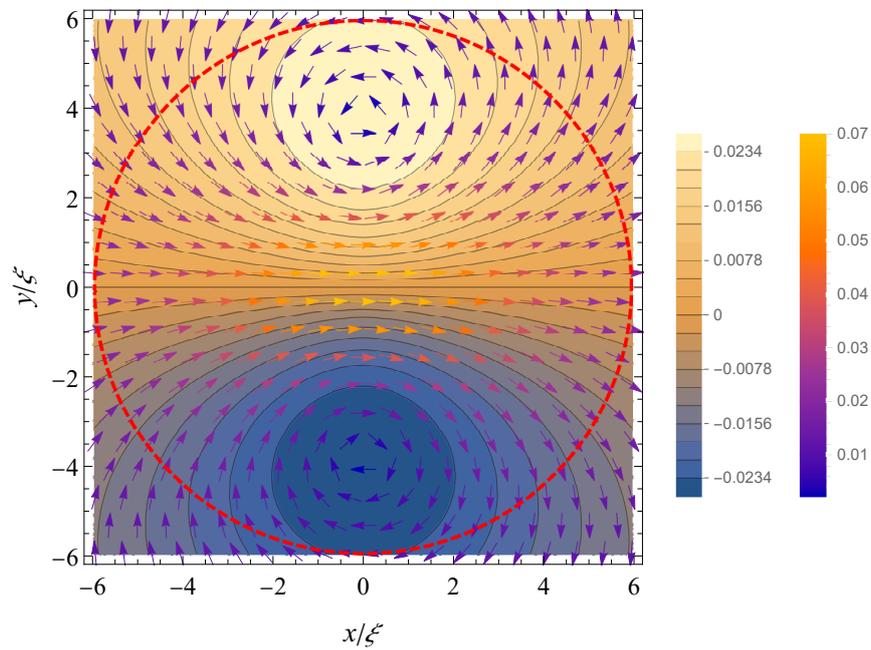
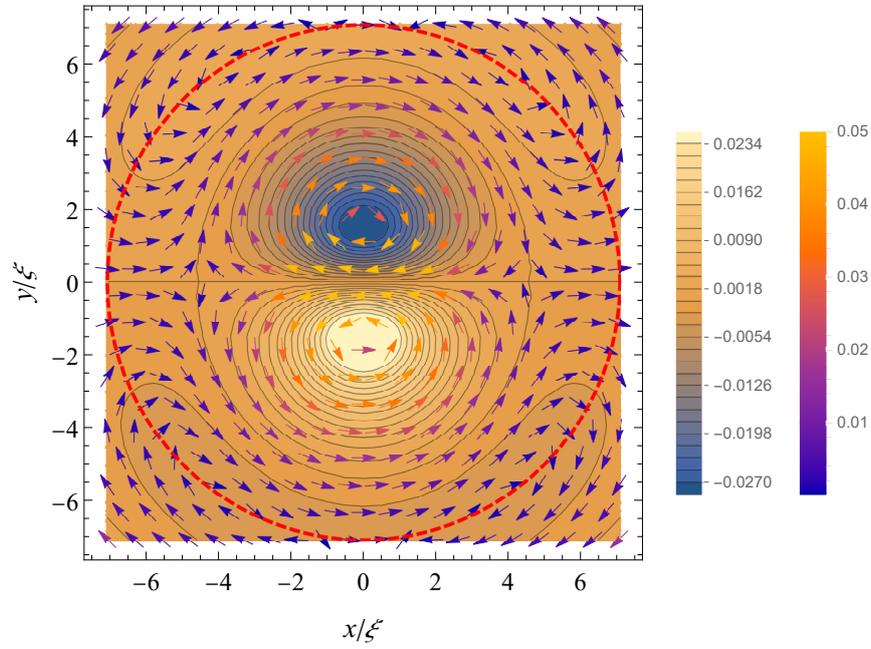
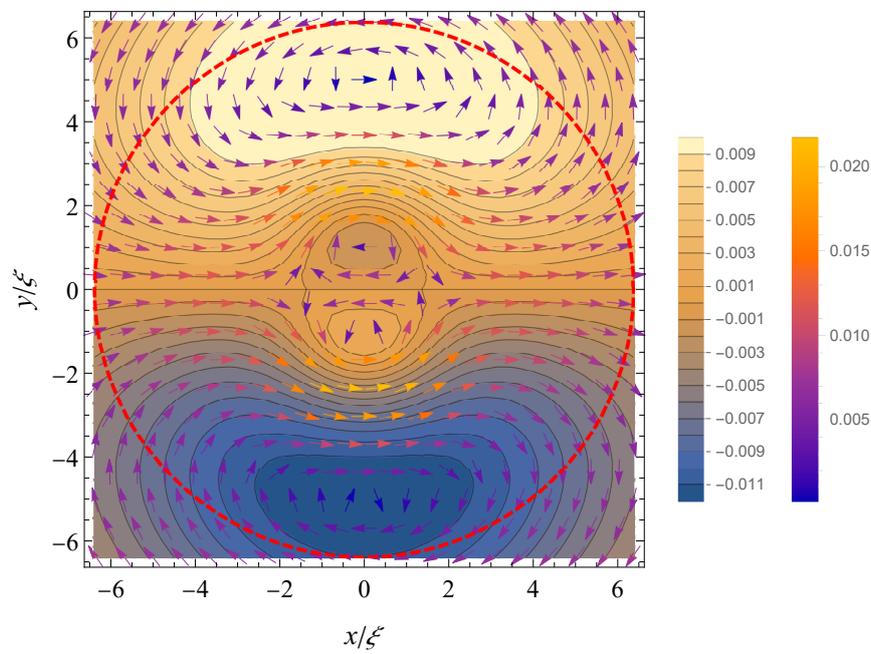
(e) $\kappa = 7, \zeta = 1, v\sigma_n = 1$

図 4.17: $\kappa = 7$ と固定し、 ζ を変化させたもの。 ζ が小さいほどバックフローが増強されていることがわかる。磁束渦付近の渦構造はバックフローの消失にともなって消え、外側の渦構造が原点に向かって近づいてきていることがわかる。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

(a) $\kappa = 5, \zeta = 1/3, v\sigma_n = 1$ (b) $\kappa = 5, \zeta = 9/20, v\sigma_n = 1$

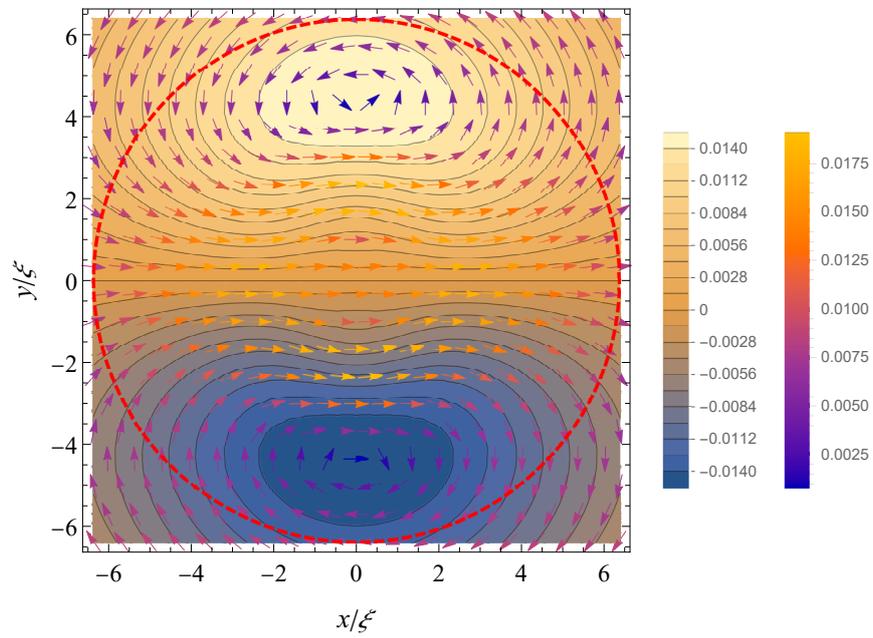
(c) $\kappa = 5, \zeta = 1/2, v\sigma_n = 1$

図 4.18: $\kappa = 5, v\sigma_n = 1, \zeta = 1/3, 9/20, 1/2$ でのバックフロー。赤い破線は計算結果が漸近解に沿っており、計算が信頼できる範囲を示している。

4.2 量子渦の駆動力

これまでの物理量を用いて渦にかかる駆動力について再考する。渦にかかる駆動力については、Kato-Chung [45] で定義された流体力学的な力、電磁気学的な力、及びその合力を計算する。

4.2.1 運動量保存則と駆動力

Kato-Chung [45] で示された電子に対しての運動量保存則は以下のように書かれる。

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{h})_\mu = \partial_\nu \mathcal{P}_{\mu\nu} - \gamma_1 (\partial_t f \partial_\mu f - \kappa f^2 P Q_\mu) - (\mathbf{j}_n \times \mathbf{h})_\mu \quad (4.1)$$

ここで、運動量密度テンソルを

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = -j_{s\nu} Q_\mu + \frac{\partial_\nu f \partial_\mu f}{\kappa^2} - \delta_{\mu\nu} F_{\text{sn}} \quad (4.2)$$

であり、さらに、自由エネルギー密度は

$$F_{\text{sn}} = \frac{|\nabla f|^2}{2\kappa^2} + \frac{Q^2 f^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \quad (4.3)$$

である。流体力学的な力は

$$\begin{aligned} & \oint (-\mathcal{P}_{\mu\nu}) n_\nu d\ell \\ &= \oint \left(-f^2 Q_\mu Q_\nu n_\nu + \frac{f^2 Q^2 n_\mu}{2} - \frac{\partial_\mu f \partial_\nu f n_\nu}{\kappa^2} + \frac{\partial_\nu f \partial_\nu f n_\mu}{2\kappa^2} - \frac{f^2 n_\mu}{2} + \frac{f^4 n_\mu}{4} \right) d\ell \end{aligned} \quad (4.4)$$

と得られる。以下では、積分のそれぞれの項を評価していく。 $\mu = y$ とする。 v について線形方程式であるので、

$$\begin{aligned} - \oint f^2 Q_y Q_\nu n_\nu d\ell &\sim - \oint f_0^2 Q_{0y} Q_{1\nu} n_\nu d\ell \\ &= - \oint f_0^2 Q_0 (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_y) q_{1+}^{(r)}(r) \cos \theta d\ell \\ &= -\pi r f_0^2(r) Q_0(r) q_{1+}^{(r)}(r) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \oint \frac{f^2 Q^2 n_y}{2} d\ell &= \oint \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 f_0^2 n_y d\ell + \oint \mathbf{Q}_0^2 f_0 f_1 n_y d\ell \\ &= \oint Q_0(r) (q_{1+}^{(\theta)}(r) \cos \theta + q_{1-}^{(\theta)}(r) \sin \theta) f_0^2(r) \sin \theta d\ell \\ &\quad + \oint Q_0^2 f_0 (f_{1+}(r) \cos \theta + f_{1-}(r) \sin \theta) \sin \theta d\ell \\ &= \pi r Q_0 f_0^2 q_{1-}^{(\theta)}(r) + \pi r Q_0^2 f_0 f_{1-}(r) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$-\frac{1}{\kappa^2} \oint \partial_y f \partial_\nu f n_\nu d\ell = -\frac{1}{\kappa^2} \oint \partial_y f \partial_r f d\ell = -\frac{\pi r}{\kappa^2} \frac{df_0}{dr} \left(2 \frac{df_{1-}}{dr} + \frac{f_{1-}}{r} \right) \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{2\kappa^2} \oint \partial_\nu f \partial_\nu f n_y d\ell = \frac{\pi r}{\kappa^2} \frac{df_0}{dr} \frac{df_{1-}}{dr} \quad (4.8)$$

$$-\frac{1}{2} \oint f^2 n_y d\ell = -\pi r f_0 f_{1-} \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{4} \oint f^4 n_y d\ell = \pi r f_0^3 f_{1-} \quad (4.10)$$

のように計算できる。

電磁氣的な力は v の 1 次までで解くことなどに注意して

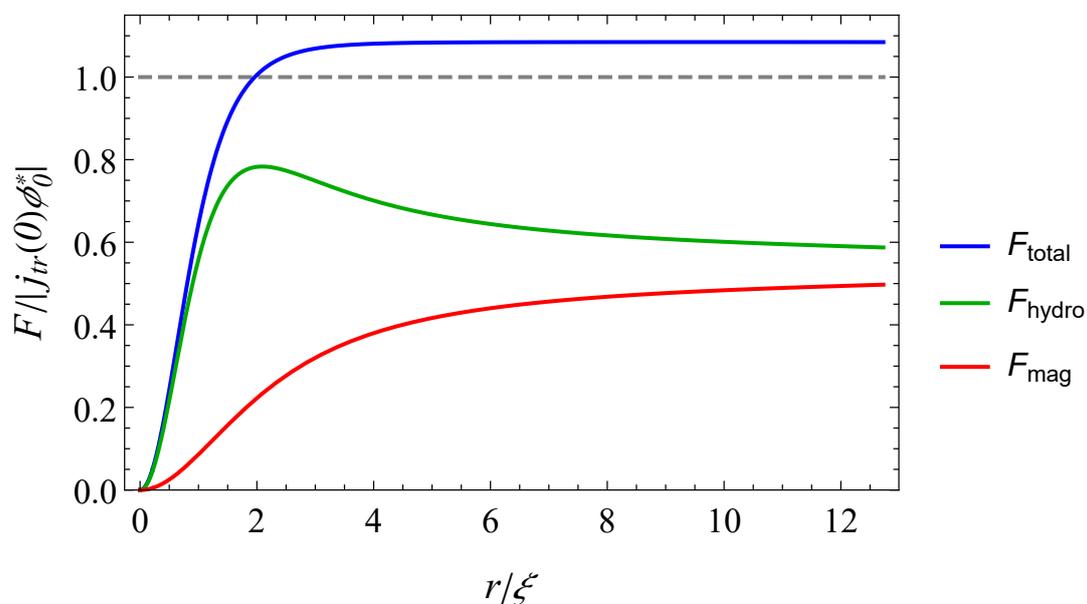
$$\int_S (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{h}(\mathbf{r}))_\mu d\mathbf{r} = -\pi r h_0(r) h_{1-}^{(1)}(r) \quad (4.11)$$

と計算できる。

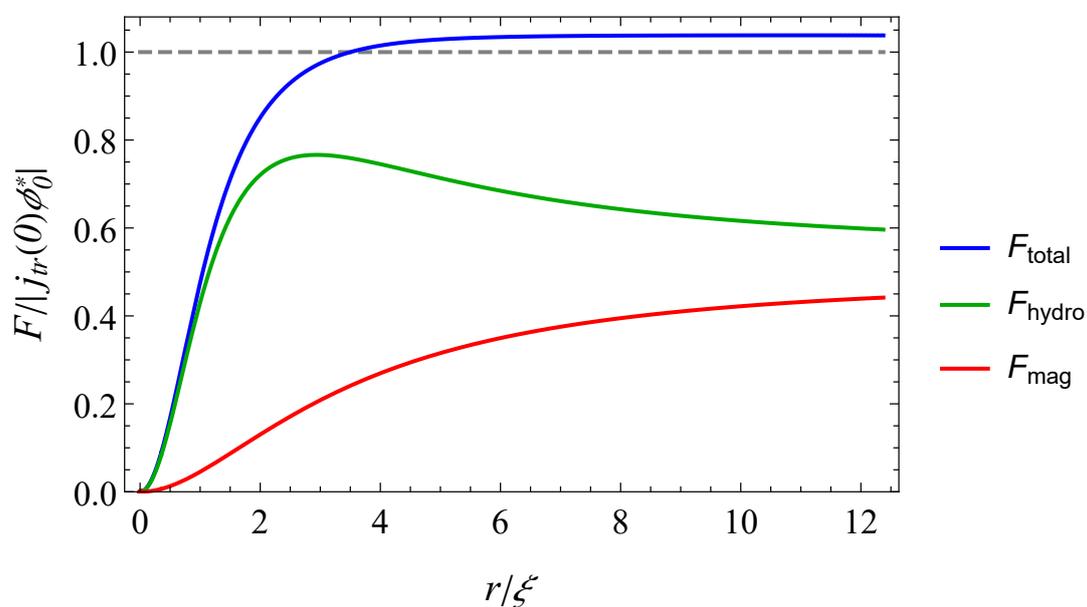
4.2.2 駆動力の成分

実際に駆動力を式 (4.4)-(4.11) のもと計算した結果が、図 4.19 である。 $\kappa = 3, 5, 7, 10, \zeta = 1/3$ の場合を示した。ここで示した流体力、磁気力、およびそれらの合力は、局所的な力を渦中心 $r = 0$ から、横軸で示す距離 r まで面積分した総和として求めている。合力を示した曲線を見れば、一定の距離以降は積分範囲を増やしても駆動力の増減が無いことがわかる。言い換えれば、一定の距離に到達すると、それより外側の積分範囲には渦を動かそうとする力が無いことを示している。積分範囲として十分な距離を取れば、それより外側では渦への運動量の流れ込みはなくなるので、内部の力の合力は渦芯部分のみに掛かる力だとみなすことができる。この時点で渦一つにかかる力が初めて定義できる。今回の計算結果では、渦中心から一定の距離までは流体力、磁気力はともに 0 から増えていき、ある一定の距離まで到達すると、合力の増減がなくなる。これは超伝導量子渦に駆動力の観点から長さが定義できることを示している。

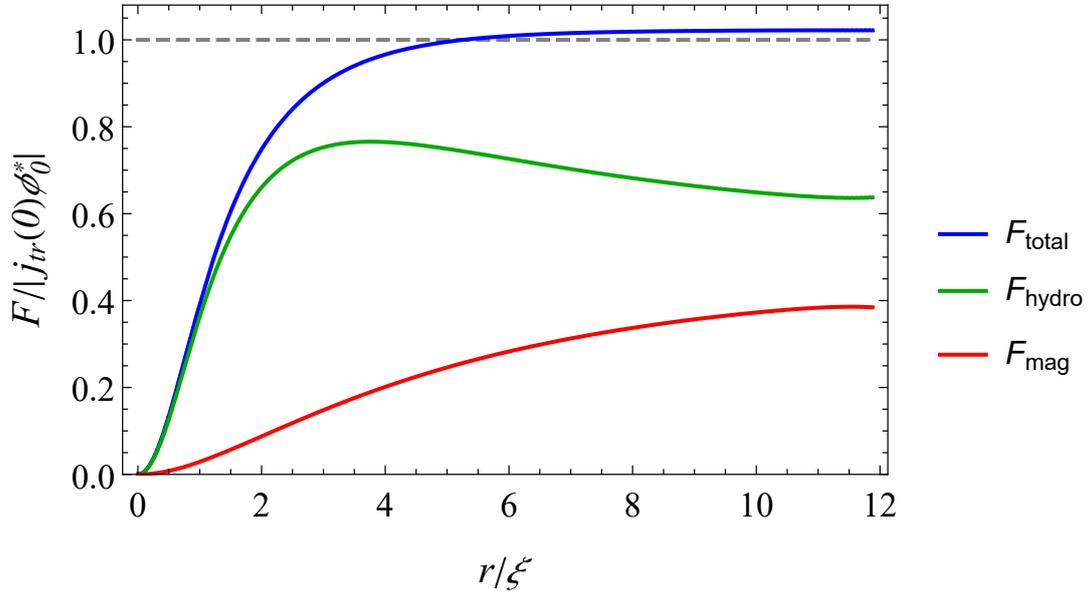
Kato-Chung では渦中心から遠方での漸近解を用いて、2 つの力の合力が一定値 $j_t(0) \times \phi_0$ になることにのみ着目し、散逸領域では渦にかかる力が定義できないことを議論できていなかった。Kato-Chung の議論では渦芯部にかかる力の大きさと、積分範囲とした領域の中に渦芯があることはわかっていた。加えて、今回の計算により、渦の力の観点から散逸領域に大きさがあることがわかった。



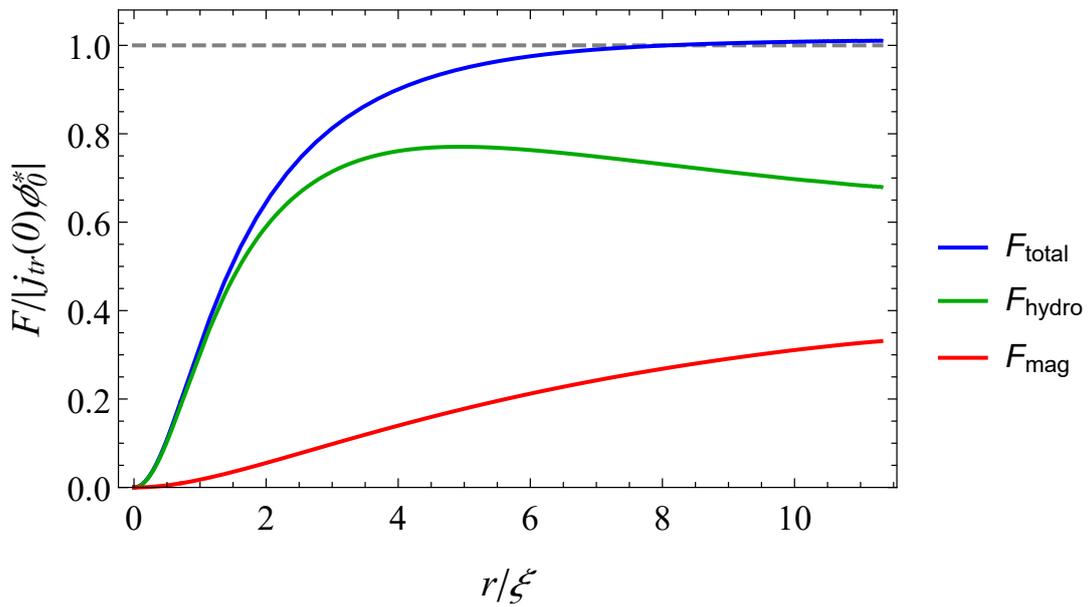
(a) $\kappa = 3, \zeta = 1/3$ での駆動力のそれぞれの成分とその合力。図中の破線は $|j_t(0) \times \phi_0|$ の値を示している。



(b) $\kappa = 5$ での駆動力のそれぞれの成分とその合力。図中の破線は $|j_t(0) \times \phi_0|$ の値を示している。



(c) $\kappa = 7$ での駆動力のそれぞれの成分とその合力。図中の破線は $|j_t(0) \times \phi_0|$ の値を示している。

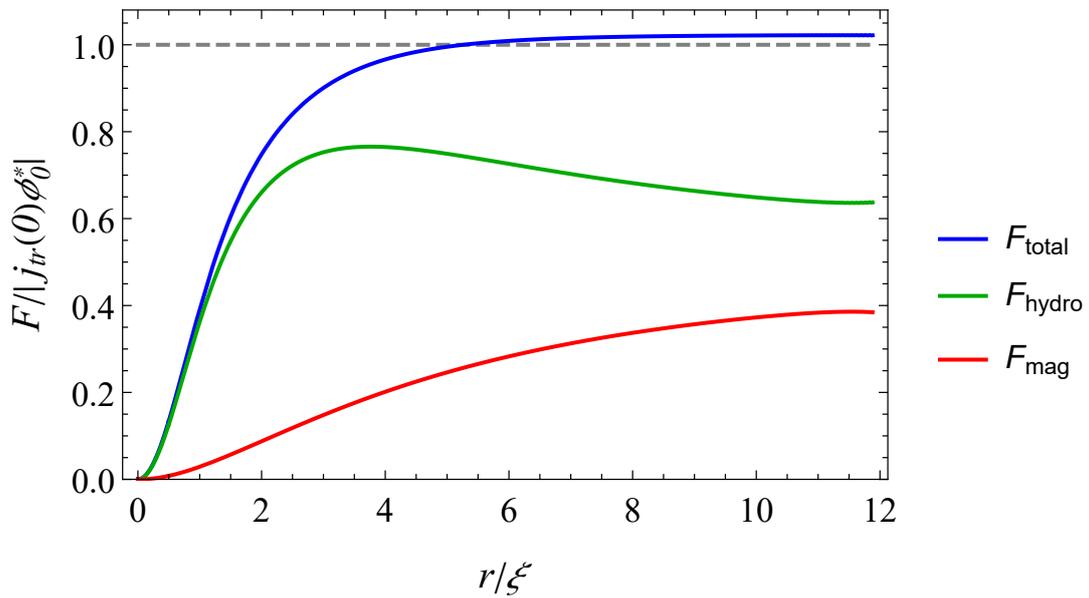


(d) $\kappa = 10$ での駆動力のそれぞれの成分とその合力。図中の破線は $|j_t(0) \times \phi_0|$ の値を示している。

図 4.19: 駆動力の大きさを示したグラフ。緑が流体力、赤が磁気力、青がそれらの合力を示している。青線を見れば、一定の距離以降は合力は増えないことがわかる。また、 κ が大きいほどその一定値に達する距離が長い。

駆動力の ζ 依存性

駆動力の増え方は κ だけでなく、 ζ にも依存している。 ζ は電場の減衰に関わる長さのスケールである。この長さスケールが変わることで駆動力が一定値に近づく長さが変わる。 $\kappa = 7$ について、 ζ を変えたときの駆動力を図 4.20 に示す。 ζ が大きいほど、駆動力の増加の仕方が鈍い。したがって、図 4.17 の結果と合わせて考えると、バックフローが増強される、すなわち ζ が小さいほど駆動力も狭い範囲内で一定値に達し、バックフローが弱められる ζ が大きい領域では駆動力も広い範囲に生じていることがわかる。



(a) $\kappa = 7, \zeta = 1/3$ 。図中の破線は $|j_t(0) \times \phi_0|$ の値を示している。

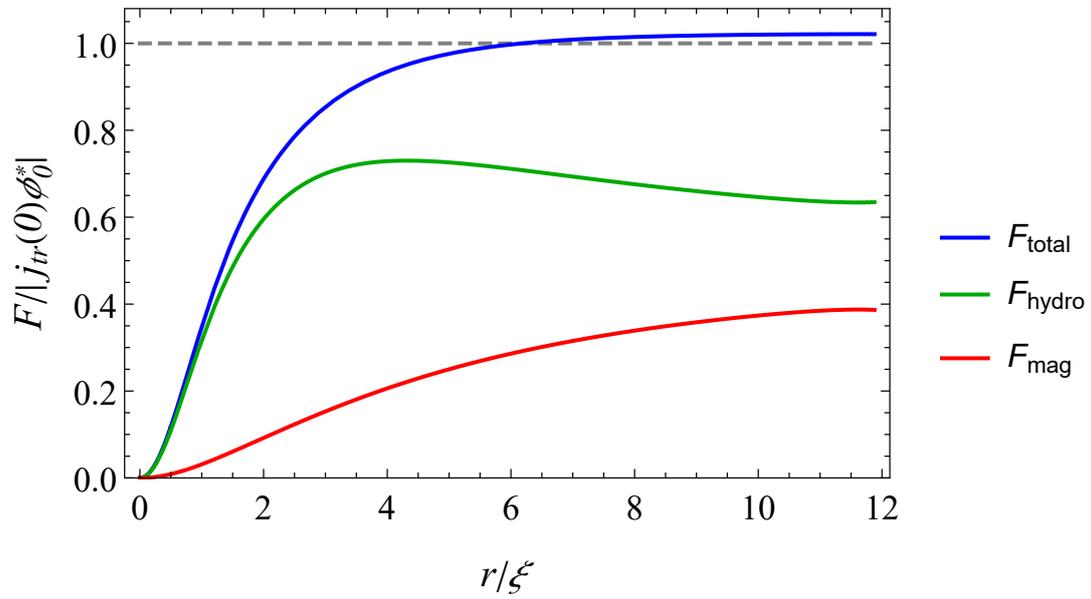
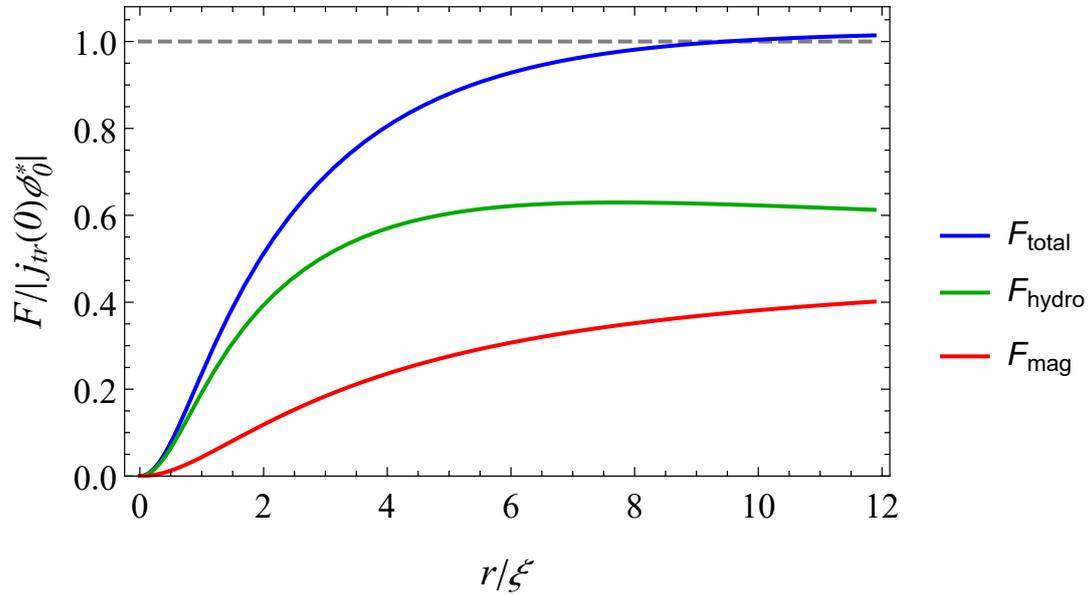
(b) $\kappa = 7, \zeta = 43/100$ (c) $\kappa = 7, \zeta = 1$

図 4.20: $\kappa = 7$ と固定し、 ζ を変化させた磁束渦の駆動力。図中の破線は $|j_t(0) \times \phi_0|$ の値を示している。

4.2.3 駆動力の絶対値

一定になった力の絶対値は

$$F_{\text{total}} = 2\pi j_t U_\infty \quad (4.12)$$

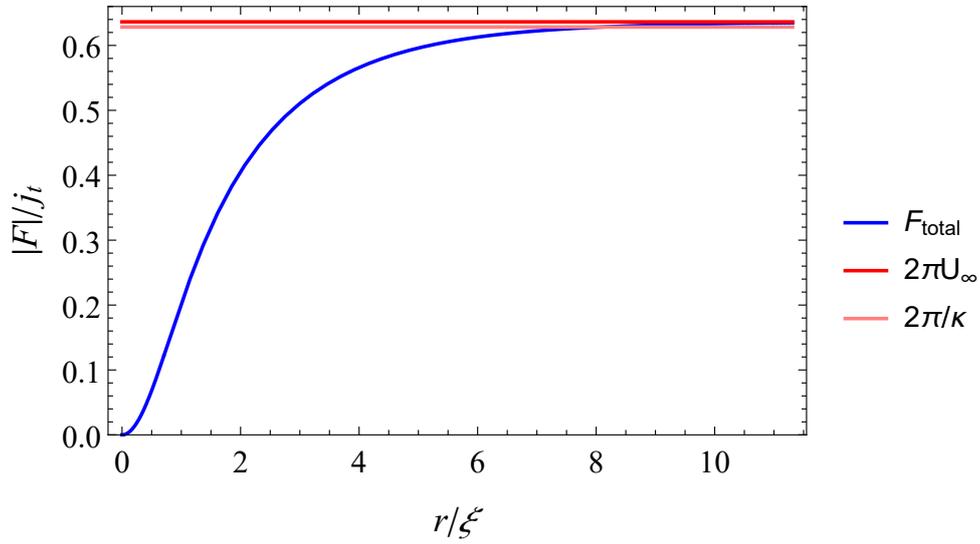
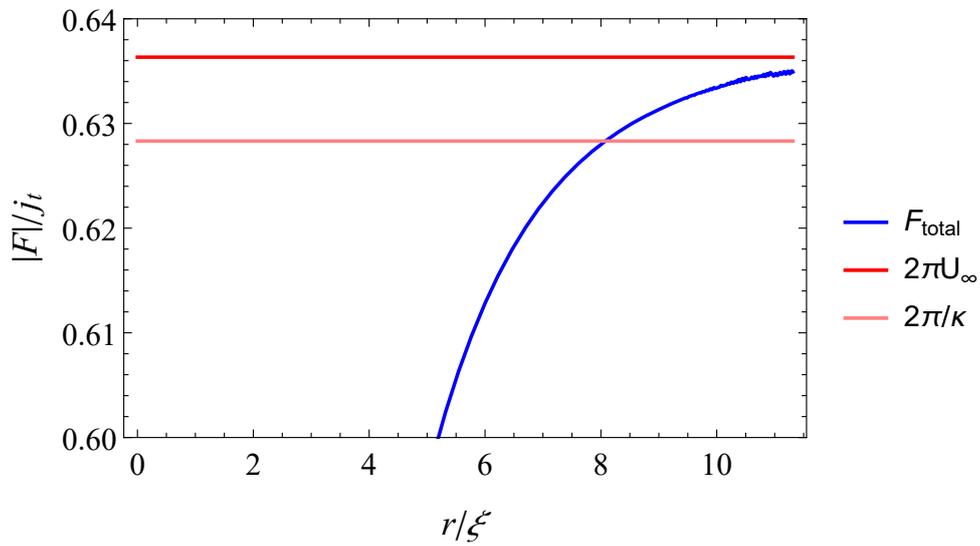
と計算できる。これまで力の絶対値は

$$F_{\text{drv}}^{\text{conv}} = |\mathbf{j}_t \times \boldsymbol{\phi}_0| = j_t \frac{2\pi}{\kappa} \quad (4.13)$$

とされてきたが、今回の計算により、 U_∞/κ 倍だけ異なることがわかった。この値は $\kappa \gg 1$ であれば $U_\infty \sim 1/\kappa$ となるが、磁場侵入長が有限の値を取る場合、特に今回の計算のように $\kappa = 3, 10$ のような場合には一致するとは言えない。

特に図 4.22 にはその大きさの違いが顕著に表れている。これは κ が比較的小きな値であることに由来している。従来 of 駆動力の大きさは $\kappa \rightarrow \infty$ を前提とした方程式からの結論であったため、有限の κ で計算を進めた本論文にて駆動力の大きさが正しく示されたことになる。

また、今回の計算より、これまで通説とされていた「渦の駆動力の大きさは輸送電流と磁束量子の積」とするこれまでの通説は第二種極限を取った場合に成立する関係式と位置づけることができた。

(a) $\kappa = 10, \zeta = 1/3$ での駆動力の絶対値と比較の全体図。

(b) 図 4.21a 上部の目盛りを拡大表示した図。

図 4.21: 図 4.19d の F_{total}/j_t (青) と、 $2\pi U_\infty$ (赤) と $2\pi/\kappa$ (ピンク) の比較。駆動力はすべて j_t に比例しているため、 j_t で除した値を示している。特に図 4.21b を見れば、青線は赤線へと漸近している様子がわかる。

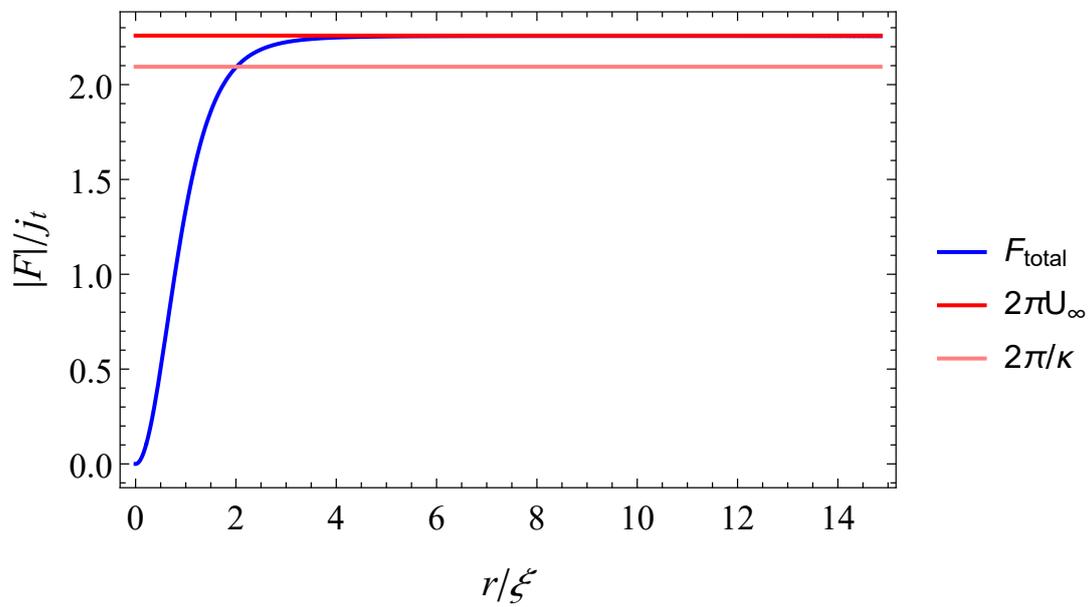


図 4.22: $\kappa = 3$ での F_{total}/j_t (青) と、 $2\pi U_\infty$ (赤) と $2\pi/\kappa$ (ピンク) の比較。 $1/\kappa$ と U_∞ の違いが顕著に表れている。

4.2.4 局所的な力の計算

今回の計算では漸近形に頼らず方程式を解ききったために、局所的な磁気力を計算することができる。式 (4.11)、図 4.19 に示していた磁気力は範囲を決めての積分値だったが、局所的な電子にかかる力を可視化することができた。

局所的な磁気力は具体的には以下の式で計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{mag}} &= \mathbf{j} \times \mathbf{H} \\ &= (\mathbf{j}_0 + v\mathbf{j}_1) \times (\mathbf{H}_0 + v\mathbf{H}_1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

である。ここで、フラックスフロー速度 v を陽に書き表した。式 (4.14) を計算したベクトル図は図 4.23 である。フロー速度 $v = 0.1$ とすれば、 v の 2 次項が十分無視できることが図からわかる。中心から放射状に湧き出る向きの力は $\mathbf{j}_0 \times \mathbf{H}_0$ であり、これは平衡状態からの寄与に相当する。この寄与を \mathbf{F}_{mag} 全体から差し引いた、正味の電磁気的な駆動力を図 4.24 に示した。渦中心付近の電子は大局的に見れば下向きの駆動力を受けており、中心付近ほど受けている力の強度が高い。これは物理的にも自然な描像である。つぶさに見ていけば、電子は一様に下向きの力を受けているというよりは双極子的な力を受けていることも見て取れる。

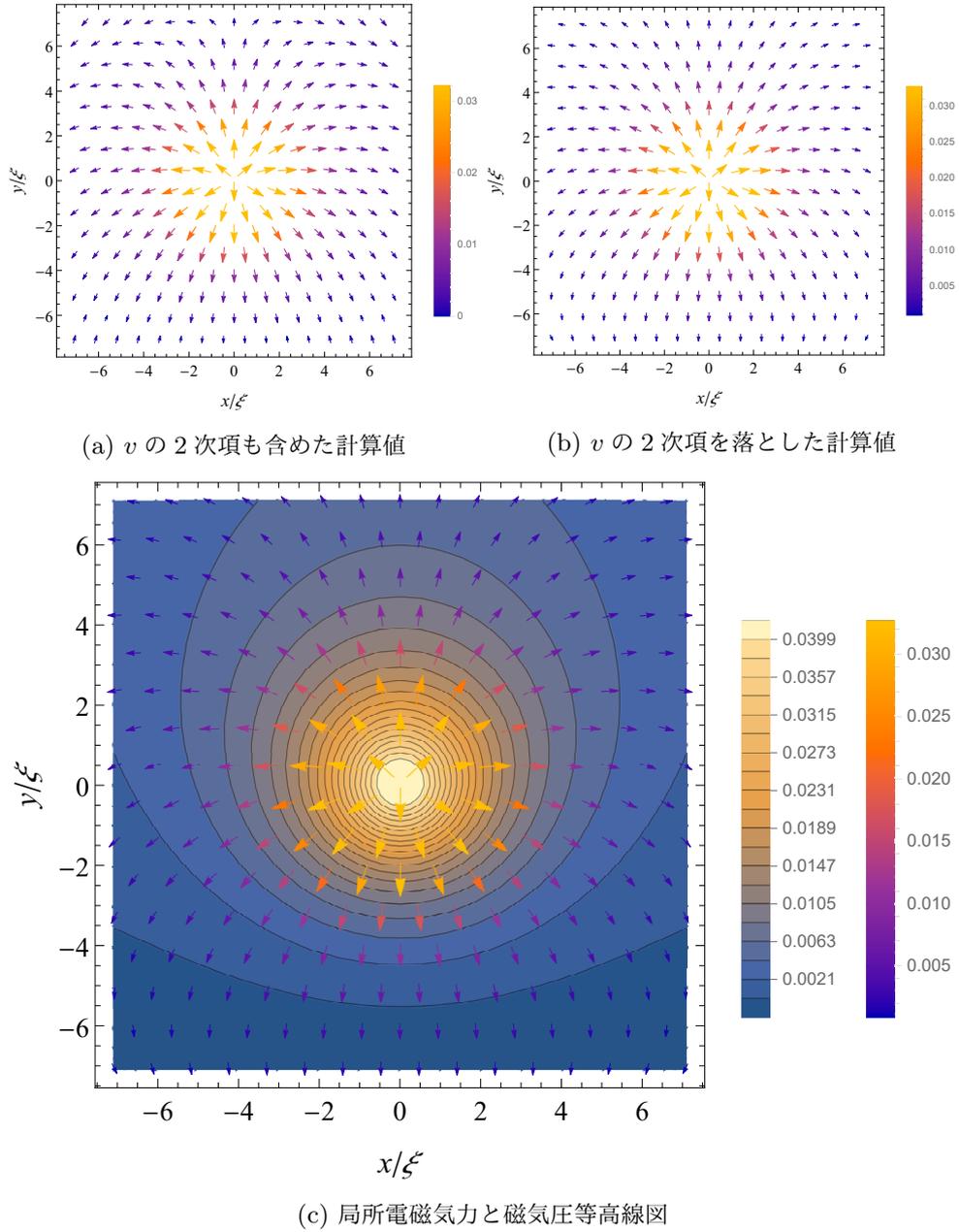
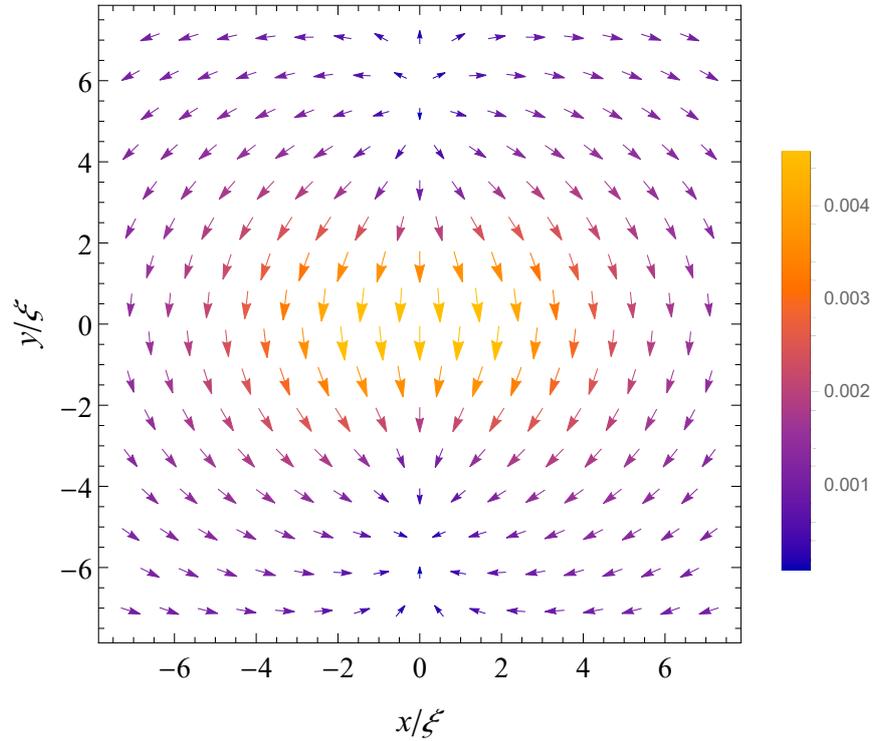
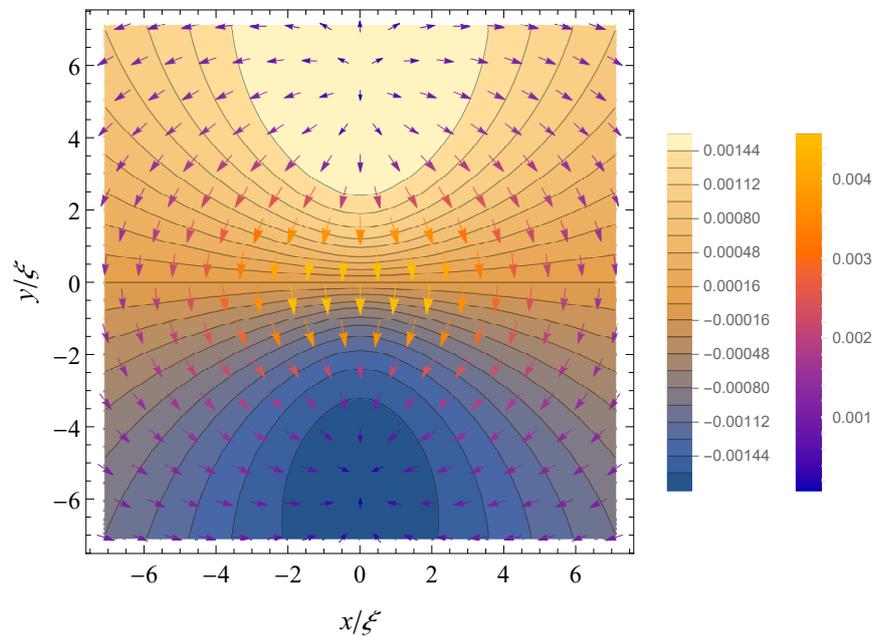


図 4.23: $\kappa = 10, \zeta = 1/3, v\sigma_n = 0.05$ における局所的な磁気力のベクトル図。中心から放射状に湧き出る向きの力は平衡状態の磁場 H_0 と渦電流 j_0 からくる寄与である。図 4.23a と図 4.23b の 2 つの図がほぼ同様に見える。図 4.23c は図 4.23b に磁気圧を示した等高線図を重ねたもの。等高線と垂直方向に力が働いていることがわかる。



(a) 正味の電磁気力



(b) 正味の電磁気力と正味の磁気圧

図 4.24: 図 4.23b からさらに平衡状態の電流同士の効果 $\mathbf{j}_0 \times \mathbf{H}_0$ を差し引いた、正味の電磁気的な駆動力。全体的に下向きで、渦中心付近ほど高い強度を持つ。大局的には下向きの力だが、細かく見れば、双極子的な力を受けている。磁気圧等高線図重ねて見ても、中心付近で下向きの磁気力の強度が増していることがわかる。

4.2.5 エネルギー保存則と散逸関数

今回の計算では、秩序変数などの解が得られている。これを利用すると、あらたに局所的な散逸関数を求めることが可能である。エネルギー保存則は以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{h}^2}{2} + \frac{f^2 Q^2}{2} + \frac{|\nabla f|^2}{2\kappa^2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} \right) + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = -W \quad (4.15)$$

ここで、エネルギー流は、

$$\mathbf{j}_e = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{h} + \frac{P f^2 Q}{\kappa} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\nabla f}{\kappa^2} \quad (4.16)$$

また、右辺の散逸関数は

$$W = \sigma_n \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \kappa \gamma_1 f^2 P^2 + \gamma_1 \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2}_{v^2 \cos^2 \theta (f'_0(r))^2} \quad (4.17)$$

である。この W を描像した図を 4.25 に示す。散逸の領域はコヒーレンス長 ξ 程度の範囲であることがわかる。

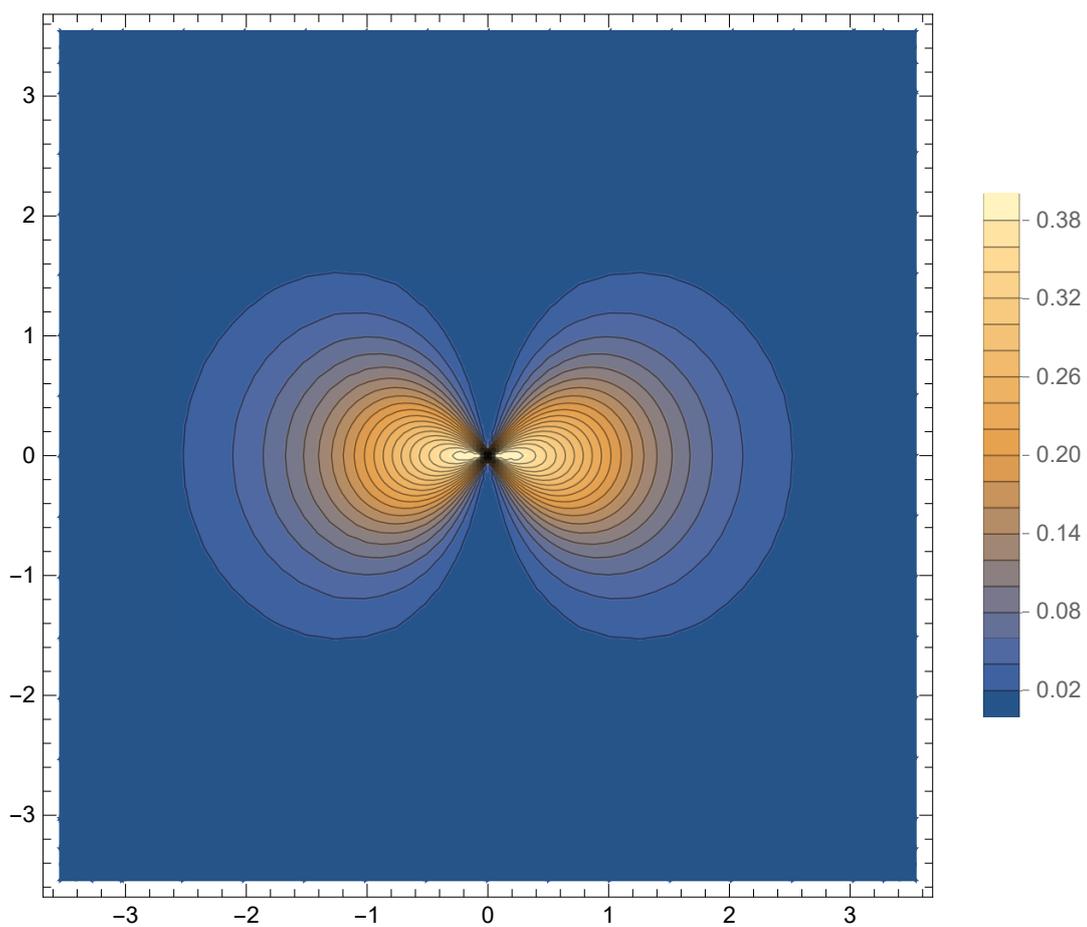


図 4.25: $\kappa = 10, \zeta = 1/3, \nu\sigma_n = 1$ でのエネルギー散逸関数を等高線プロットしたもの。散逸の領域はおおよそ $r \sim \xi$ 程度に収まっていることがわかる。

第 5 章

議論

この章では、前前章で述べた定式化から派生して得られる結果、前章で得られた結果の適用範囲と実験による検証可能性について述べる。

5.1 輸送電流下でピン留めされている孤立量子渦にかかる力

第 3 章の定式化を変更することにより、ピン留めされた孤立量子渦がある系に輸送電流が流れている場合の Ginzburg-Landau 方程式の解を得ることができる。

$x = 0, y = 0$ を中心軸とした円柱状欠陥 (断面の半径 a) によるピン留めポテンシャル $u(r) = u_0\Theta(a - r)$ (Θ は Heaviside のステップ関数) があるときの平衡 GL 方程式

$$\left(\frac{\nabla^2}{\kappa^2} - Q^2 + 1\right) f - f^3 - u(r)f(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\nabla}{\kappa} \cdot (f^2 \mathbf{Q}) = 0 \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q} = -f^2 \mathbf{Q} \quad (5.3)$$

を境界条件

$$f(\mathbf{r} \rightarrow 0) = 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{r} \rightarrow 0) \rightarrow -\frac{\mathbf{e}_\theta}{\kappa r} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = -(j_+ e^y + j_- e^{-y}) \mathbf{e}_x + o(j_+, j_-) \quad f(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 1 + o(j_+, j_-) \quad (5.5)$$

の下で解けば、微小な輸送電流下でピンされた孤立渦に対する GL 方程式の解を輸送電流に関する一次までの精度で解いたことになる。 $f_{0'}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}_{0'}(\mathbf{r})$ を境界条件

$$f(\mathbf{r} \rightarrow 0) = 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{r} \rightarrow 0) \rightarrow -\frac{\mathbf{e}_\theta}{\kappa r}, \quad f(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

の下での (5.1)-(5.2) の解とし、 $f^{(1')}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r})$ は $O(j_+, j_-)$ の寄与とし、

$$f(\mathbf{r}) = f_{0'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + f^{(1')}(\mathbf{r}) + o(j_+, j_-) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_{0'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r}) + o(j_+, j_-) \quad (5.8)$$

とおくと、 \mathbf{r}_0 は輸送電流による $f_{0'}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}_{0'}(\mathbf{r})$ の変形を伴わない空間分布の変位を表し、 $f^{(1')}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r})$ は変形の効果を表す。 $f^{(1')}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r})$ は境界値問題

$$L' \begin{pmatrix} f^{(1')}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{0'}(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 \cdot \nabla)u(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L' = L + \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$$|f^{(1')}(\mathbf{r} \rightarrow 0)| < \infty, \quad f^{(1')}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = 0, \quad (5.10)$$

$$|\mathbf{j}^{(1')}(\mathbf{r} \rightarrow 0)| < \infty, \quad \mathbf{j}^{(1')}(\mathbf{r} \rightarrow \infty) = (j_+ e^y + j_- e^{-y})\mathbf{e}_x \equiv \mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r}) \quad (5.11)$$

の解である。3章における $f^{(1)}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r})$ と比べると、 $f^{(1')}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r})$ が満たす非同次方程式の作用素 L と非同次項をそれぞれ

$$L \rightarrow L', \quad \begin{pmatrix} -\gamma_1 \mathbf{v} \cdot \nabla f_0 \\ -\sigma_n \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f_{0'}(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 \cdot \nabla)u(\mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

と置き換えたものが $f^{(1')}(\mathbf{r}), \mathbf{Q}^{(1')}(\mathbf{r})$ が満たす同次方程式 (5.9) である。これにより力の r 依存性、秩序変数の大きさ、磁場、電流分布、バックフロー電流、局所 Lorentz 力分布を得られ、フロー状態のそれらと比較することができる。

5.2 実験による検証法の提案

本論文で得られた結果のうち、実験による検証が可能と思われるのは、渦にかかる駆動力のうち、磁気的な Lorentz 力はその半分以下となる点である。フラックスフロー状態で直接検証するのは難しいが、前節で見たように、フロー状態で渦にかかる駆動力とピン止めされた渦にかかる駆動力は同じものである。従って、輸送電流下でピンされた孤立量子渦の周囲の局所磁場を測定し、それから Maxwell の応力により渦にかかる磁気的な Lorentz 力を求められれば、「磁気的な Lorentz 力が渦にかかる駆動力の一部でしかない」ことを検証できる。

具体的には以下のような手順で行う。

1. 量子渦がない状態で輸送電流を超伝導体に流し、電流の空間分布を測定しておく ($\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r})$ の測定)。
2. 孤立量子渦がピン止めされている超伝導体 (1 と同じサンプル) に輸送電流を流す。その際の輸送電流の強さは、量子渦から離れた領域で 1 と同じ値になるように設定する。
3. 1. で求めた $\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r})$ から 2 でピン止められている量子渦の位置 \mathbf{r}_0 における $\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r}_0)$ を求めておく (これにより駆動力の大きさ $|\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r}_0)| |\phi_0^*|$ を見積もることができる)。
4. 3 の状態で、ピン止めされた量子渦を囲む領域 (2次元面上での閉曲線 C) で局所磁場を測定し、Maxwell 応力の表面積分により、 C で囲まれる領域 S にかかる磁気的 Lorentz 力 $\mathbf{F}_L(S)$ を

$$(\mathbf{F}_L(S))_\mu = \oint_C \left(h_\mu h_\nu - \frac{\hbar^2 \delta_{\mu\nu}}{2} \right) n_\nu d\ell. \quad (5.13)$$

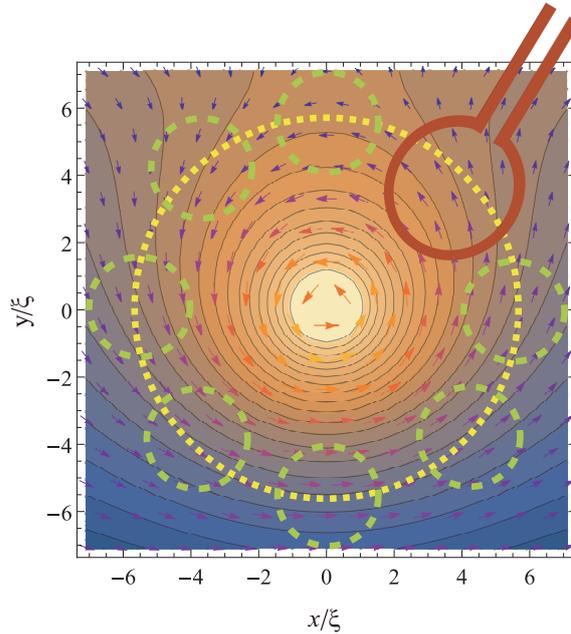


図 5.1: 実験的検証法の模式図。局所磁場から閉曲線の内側にかかる Maxwell 応力が計算できる。そのために量子渦を囲む閉曲線上で局所磁場を測定する。

より求める。ここで dl は閉曲線に沿った線素、 n_ν は C に直交する 2 次元平面上の単位ベクトルの $\nu (= x, y)$ 成分である。

5. $|\mathbf{F}_L(\mathbf{S})|$ が $|\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r}_0)||\phi_0^*|$ の半分以下であることを確かめる。 C が量子渦から十分離れれば $|\mathbf{F}_L(\mathbf{S})|$ が $\frac{1}{2}|\mathbf{j}_{\text{tr}}(\mathbf{r}_0)||\phi_0^*|$ に近づくことが本研究の結果から予想される。

この検証では、フロー状態ではなくピン留めされた磁束渦に対して、それを囲む閉曲線で磁場測定を行うことで、Lorentz 力が $\mathbf{j}_t \times \phi_0$ の半分以下の値で検出される。領域内の駆動力は Maxwell の応力テンソルを、閉曲線上で積分したものから得られるため、磁場の測定のみから Lorentz 力は計算され、磁束量子と予め測定しておいた輸送電流の値と比較することでその駆動力の絶対値の比較を行うことができる。前節で述べたようにピン留め磁束とフロー状態の磁束は同じものと考えられるため、ピン留め磁束の Lorentz 力の情報から、フロー状態についても Lorentz 力が駆動力の一部に過ぎないことを検証できる。

5.3 一般化された TDGL 方程式への拡張

TDGL 方程式

$$\gamma \frac{\partial f}{\partial t} = \xi^2 \nabla^2 f - \left(\frac{e^* \xi \mathbf{Q}}{\hbar} \right)^2 f + f - f^3. \quad (5.14a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = \frac{\gamma f^2 P}{\mu_0 \lambda^2 \xi^2}, \quad (5.14b)$$

の適用範囲は狭い。転移点近傍であることに加えて、対破壊緩和時間（磁性不純物による弾性散乱） τ_s がエネルギーギャップ $\Delta(T)$ に対応する時間スケール $\hbar/\Delta(T)$ よりずっと短いことが条件である。これは多くの磁性不純物を含む超伝導体でのみ成り立つ。非磁性不純物による弾性散乱の緩和時間 τ_{imp} が $\hbar/\Delta(T)$ よりずっと短い、 τ_s やフォノンによる非弾性散乱緩和時間 τ_E が $\hbar/\Delta(T)$ よりずっと長いとき、転移点近傍の超伝導体のダイナミクスは $\tau_s > \tau_E$ のとき以下の方程式（一般化された TDGL 方程式）で表される。

$$\gamma^{(f)} \frac{\partial f}{\partial t} = \xi^2 \nabla^2 f - \left(\frac{e^* \xi \mathbf{Q}}{\hbar} \right)^2 f + f - f^3. \quad (5.15a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_s = \frac{\gamma^{(x)} f^2 P}{\mu_0 \lambda^2 \xi^2}, \quad (5.15b)$$

ここで、二つの緩和時間はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\gamma^{(f)} = \gamma(1 + 4\tau_E^2 \Delta(T)^2 f^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma^{(x)} = \gamma(1 + 4\tau_E^2 \Delta(T)^2 f^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

$\gamma^{(f)}$ と $\gamma^{(x)}$ はそれぞれ秩序変数の振幅緩和時間と位相の緩和時間である。一般化された TDGL 方程式の特徴は、秩序変数の振幅と位相が異なる緩和時間を持つ、つまり、位相の方が速く緩和することと、緩和時間が秩序変数の局所的な値を通して位置に依存することである。 $\tau_E \Delta(T) \ll 1$, $\gamma^{(f)} \sim \gamma^{(x)}$ が成り立つとき式 (5.15a) と (5.15b) は従来型の TDGL 方程式 (5.14a) (5.14b) に帰着される。

一般化された TDGL 方程式に対しても第3章で述べた定式はほぼそのまま使える。電場を求める方程式に現れる γ は $\gamma^{(x)}$ で置き換え、 $f^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$ に対する方程式の非同次項に現れる γ を $\gamma^{(f)}$ に置き換えればよい。これにより、電場の空間分布が替わるので、エネルギー散逸領域の大きさが変わり、したがって、フロー状態で渦にかかる駆動力が定義できる領域（従って「渦の大きさ」）が異なることと、駆動電流の大きさ j_{tr} と渦の速さ v の間の線形関係式が変更を受ける一方で、渦の駆動力の大きさや、駆動力が流体的な力と磁気的な Lorentz 力からなることは従来型 TDGL 方程式と用いたときと同様である。

第 6 章

結論

本研究では、第二種超伝導体に生じた量子渦が孤立して存在するとき、そこに輸送電流が流れるとその量子渦が駆動する磁束フロー現象を、Time-dependent Ginzburg-Landau 方程式 (TDGL 方程式) の問題として解き、その解を用いて物理量、特に渦芯付近の物理量を計算し図示した。その結果

- (1) 渦芯周辺の電子にかかる駆動力を計算し、磁束渦にかかる駆動力を定義できる条件
- (2) 磁束渦にかかる駆動力の絶対値が従来より知られている $\mathbf{j}_{\text{tr}} \times \phi_0$ とは異なること

を示した。

この TDGL 方程式は非斉次項を持つ微分方程式であり、解く際には境界条件を正しく定めることが重要である。本研究ではこの境界条件を、従来の空間で一様な輸送電流とするのではなく、超伝導体の端から指数的に減衰する電流とした。これは電流が London 方程式を満たすように振る舞うという条件である。この輸送電流が端部から内部に向かって減衰するという条件はすなわち、磁場侵入長 λ が有限の値であることを意味している。

この条件のもと、TDGL 方程式を磁束フロー速度 v の 1 次までで解き、その解を用いて物理量を計算して図示した。特に得られた電流から輸送電流を差し引いた際に残るバックフロー流の描像は Hu-Thompson [50] が TDGL 方程式から導出した漸近的な形をよく再現しており、今回計算した解の正当性は十分である。

(1) について、渦芯付近と渦芯から十分遠方のバルク領域をつなぐ全領域の解を得たことにより、散逸関数や、渦の周りの電子にかかる駆動力などを局所的に求めることができるようになった。特に、渦の周りの電子にかかる駆動力を渦芯部から積分領域を広げていく形で計算できるようになったことで、超伝導磁束渦にかかる駆動力は、電子にかかる駆動力の総和が変化しなくなるある距離だけ離れたときに初めて定義できることを明らかにした。流体力学で渦糸にかかる力を議論する際に、その渦糸を取り囲むように運動量を計算したとき、囲む範囲を変えても計算される運動量が変化しないことから、渦糸にかかる駆動力と決めていることとの類推で、超伝導量子磁束渦にかかる駆動力も、囲む範

囲を変えても内部の運動量の総和、すなわち駆動力の総和が変わらないときに、これを磁束渦にかかっている力と呼ぶことができるということである。この結果は、コヒーレンス長や磁場侵入長ではなく、駆動力の面から渦の大きさを議論することができるということを示唆している。

(2) について、渦にかかる力を計算した結果、その絶対値は $2\pi j_{\text{tr}} U_{\infty}$ であり、通説となっている駆動力の絶対値 $\mathbf{j}_{\text{tr}} \times \boldsymbol{\phi}_0 = 2\pi j_{\text{tr}} / \kappa$ ではないことを明らかにした。 $\kappa \rightarrow \infty$ のとき、 $U_{\infty} \rightarrow 1/\kappa$ となることより、従来の TDGL 方程式を用いた磁束フローの理解は $\kappa \rightarrow \infty$ という極限的な状態を扱ったものであったと位置づけた。

本研究では、この方程式が解を持つ条件を導出することにより、外部パラメータである輸送電流と磁束フロー速度や秩序変数などの超伝導体内部の量を結ぶ関係式を導出した。この関係式も先行研究 [28, 38] とは異なる境界条件のもとで導出されており、有限の磁場侵入長での物理量の計算が尽くされている。

また、局所的な磁場や電磁気力などを導出しており、とくに渦にかかる駆動力としての電磁気力は知られている $\mathbf{j}_{\text{tr}} \times \boldsymbol{\phi}_0$ の半分以下であるということは、局所的な磁場を検出できるプローブで実証可能である。

本研究の今後の発展としては、まず、方程式の緩和項の再考が挙げられる。Dorsey [38] では複素数を考えることによりフラックスフロー Hall 効果を、Watts-Tobin [31] では γ_1 をさらに 2 つの成分、秩序変数の振幅と位相の緩和それぞれに分けることで、より広範な適用範囲の方程式とできる。これらの項を追加しても、今回の解法を用いれば、大きな変更はなく、ほぼ、非斉次項が変更を受けるだけで解くことができる。課題として、駆動力の面から渦の大きさを決定するとしたとき、その長さの基準をどのように決定するかについては未解決である。どの程度まで、漸近値に近づいたときに積分範囲によらずに内部の運動量が変わっていないとできるのかを議論する必要がある。

また、今回は孤立した磁束渦に対するアプローチであったが、磁束が格子を組んだとき、磁場侵入長有限とする境界条件でどのような解が導出されるかは、磁束は多くの場合格子を組んでいることを考えても、興味深く、重要な問題である。

付録 A

局所的な力のつり合いの導出

はじめに超伝導電流が磁場から受ける力を書き下す。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{j}_s \times \mathbf{H})_\mu &= [\mathbf{j}_s \times (\nabla \times \mathbf{Q})]_\mu \\
 &= j_{s\lambda} \partial_{\lambda'} Q_{\mu'} \varepsilon_{\lambda'\mu'\nu} \varepsilon_{\lambda\nu\mu} \\
 &= -j_{s\lambda} \partial_{\lambda'} Q_{\mu'} (\delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} - \delta_{\lambda\mu'} \delta_{\lambda'\mu}) \\
 &= -\partial_\nu (j_{s\nu} Q_\mu) + (\nabla \cdot \mathbf{j}_s) Q_\mu + j_{s\nu} \partial_\mu Q_\nu
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

ここで $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$ はレヴィ・チヴィタの ε であり、 $\delta_{\mu\nu}$ はクロネッカーの δ である。(A.1) の右辺第3項をさらに書き換える。そのために $\partial_\mu \mathcal{F}_{sn}$ を計算する。

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \mathcal{F}_{sn} &= \left(\frac{\partial_\nu}{\kappa} \left(\partial_\mu f \frac{\partial_\nu}{\kappa} f \right) - \partial_\mu f \frac{\partial_\nu^2}{\kappa^2} f + f^2 Q_\nu \partial_\mu Q_\nu + f \partial_\mu f q^2 - f \partial_\mu f + f^3 \partial_\mu f \right) + \partial_\mu \left(\frac{\rho_s P}{\kappa} \right) \\
 &= \partial_\nu \left(\frac{\partial_\mu}{\kappa} f \frac{\partial_\nu}{\kappa} f \right) - j_{s\nu} \partial_\mu Q_\nu - \partial_\mu f (\gamma_1 \partial_t f + \gamma_2 P f) + \partial_\mu \left(\frac{\rho_s P}{\kappa} \right)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

2番目の等式で (2.93) と (2.95) を用いた。(A.2) と (2.98) を (A.1) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{j}_s \times \mathbf{H})_\mu &= -\partial_\nu (j_{s\nu} Q_\mu) + (\gamma_1 \kappa P f^2 - \partial_t \rho_s) Q_\mu \\
 &\quad - \partial_\mu \mathcal{F}_{sn} + \partial_\nu \left(\frac{\partial_\mu}{\kappa} f \frac{\partial_\nu}{\kappa} f \right) - \partial_\mu f (\gamma_1 \partial_t f + \gamma_2 P f) + \partial_\mu \left(\frac{\rho_s P}{\kappa} \right) \\
 &= \partial_\nu \mathcal{P}_{\mu\nu} + \gamma_1 \kappa P f^2 Q_\mu - \partial_t (\rho_s Q_\mu) + \rho_s \partial_t Q_\mu - \gamma_1 \partial_t f \partial_\mu f - \gamma_2 P f \partial_\mu f + \rho_s \frac{\partial_\mu}{\kappa} P + P \frac{\partial_\mu}{\kappa} \rho_s \\
 &= \partial_\nu \mathcal{P}_{\mu\nu} + \gamma_1 \kappa P f^2 Q_\mu - \partial_t (\rho_s Q_\mu) - \gamma_1 \partial_t f \partial_\mu f - \rho_s E_\mu
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

となる。最後の式変形では $\mathbf{E} = -\nabla P/\kappa - \partial_t \mathbf{Q}$ と (2.97) を用いた。この (A.3) を (2.99) を用いて改めて書くと、(2.100);

$$\partial_\nu \mathcal{P}_{\mu\nu} + \partial_t (-\rho_s Q_\mu) = (\rho_s \mathbf{E} + \mathbf{j}_s \times \mathbf{H})_\mu + \gamma_1 \partial_\mu f \partial_t f + \left(-\frac{d\rho_s}{dt} \right)_{\text{conv}} Q_\mu \tag{A.4}$$

となる

付録 B

単位系の変換

本論文では参考文献として、Dorsey [38], Hu-Thompson [50], Kato-Chung [45] を引用している。これら 3 つの論文はそれぞれが採用している単位系が異なっている。この補遺にてそれらの単位系の間の変換をまとめる。本論中ではとくに Dorsey が採用した、磁場侵入長 λ を長さの基準とし、物理量を無次元化する単位系のもとで計算を進めた。

B.1 Kato-Chung の単位系から Dorsey の単位系へ

Kato-Chung の TDGL 方程式は秩序変数 ψ , ベクトルポテンシャル \mathbf{A} , スカラーポテンシャル Φ を用いて

$$\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie^*\Phi}{\hbar} \right) \psi = \xi^2 \left(\nabla - \frac{ie^*\mathbf{A}}{\hbar} \right)^2 \psi + \psi - |\psi|^2 \psi \quad (\text{B.1})$$

と書き表される。Kato-Chung の単位系での物理量には添字 K を、無次元化した物理量には Dorsey の論文に習っていることを示す添字 D をつけると、2 つの単位系は以下の係数で変換できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_K &= \lambda \mathbf{r}_D, & t_K &= (\lambda/c)t_D, & \psi_K &= \psi_D, \\ \mathbf{A}_K &= (\hbar/e^*\xi)\mathbf{A}_D, & \Phi_K &= (\hbar c/e^*\lambda)\Phi_D \\ \sigma_K &= (1/\mu_0\lambda c)\sigma_D \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

したがって、扱う TDGL 方程式は

$$\left(\frac{1}{\kappa} \nabla - i\mathbf{A} \right)^2 \psi + \psi - |\psi|^2 \psi - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \psi = 0 \quad (\text{B.3})$$

と変換される。

B.2 Kato-Chung の単位系から Hu-Thompson の単位系へ

Hu-Thompson の論文では前提として、 $\hbar = c = k_B = 1$ としている。したがって、真空の誘電率 ε_0 、真空の透磁率 μ_0 と光速 c の関係は

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} = 1 \quad (\text{B.4})$$

となり、ゆえに

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0} \quad (\text{B.5})$$

と書くことができる。Kato-Chung と Hu-Thompson の単位系の違いは主に SI 単位系と CGS 単位系の違いに由来するものである。Kato-Chung の単位系での物理量に添え字 K を、Hu-Thompson の単位系での物理量に添え字 H を書くことにすると、変換は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \gamma_K &= \xi^2 \gamma_H, & e_K^* &= \sqrt{4\pi\varepsilon_0} (2e_H) = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} (2e_H) \\ \sigma_K &= \frac{4\pi}{\mu_0} \sigma_H, & \mathbf{j}_K &= \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \mathbf{j}_H \\ \mathbf{Q}_K &= \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{Q}_H, & P_K &= \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} P_H \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

これにより、Kato-Chung 単位系を介して Hu-Thompson の単位系と Dorsey の単位系を換算できる。

謝辞

はじめに指導教員としてご指導くださった加藤雄介先生に感謝申し上げます。本研究に際しては物理的なアイデアから数学的な技術にいたるまで大変多くのことを議論していただきました。研究内容だけでなく、日常のことなど多くのことを気にかけていただき、大変お世話になりました。

加藤研の先輩である黒澤範行さん、正木祐輔さん、越田真史さん、篠崎美沙子さんにはセミナーでの議論以外にも大学院生活にあたっての助言をいただくなどお世話になりました。特に黒澤さんは、論文の出発点となる方程式の非線形 GL 方程式の数値解法アルゴリズムを開発してくださり、本研究ではそれを使わせていただきました。同期の寒川崇生さん、後輩の福井毅勇さん、鈴木裕太さん、児玉壮平さん、牧野舜さん、渡辺秋光さんとはセミナーやお茶会を通じていろいろな話ができて、刺激を受けました。後輩の皆さんにとっては、あまり良いお手本になれなかったと少し申し訳ない気分もあります。とくに福井さんとは5年間、同じ研究室で多くのことを話すことができ、本当によい仲間にも恵まれました。

国内渦糸会議などでも多くの先生方や同じ物理を研究する皆さんとの議論、交流を深められました。特に、私が参加した、2018年の実行委員の小久保伸人先生、野島勉先生、西壽照和先生、他多くの皆様にもここでお礼をしたいと思います。ありがとうございました。また、渦糸の物理の研究仲間ということでは、前田研に所属する黒川穂高さんにも単一量子磁束についての参考文献をご教示いただいたりと、近くの研究室、近くの研究範囲ということでお世話になりました。ありがとうございました。

最後に、生活面、精神面で支えてくれた、両親、家族に感謝いたします。

参考文献

- [1] Y. S. Hor, A. J. Williams, J. G. Checkelsky, P. Roushan, J. Seo, Q. Xu, H. W. Zandbergen, A. Yazdani, N. P. Ong, and R. J. Cava. Superconductivity in $\text{Cu}_x\text{Bi}_2\text{Se}_3$ and its Implications for Pairing in the Undoped Topological Insulator. Phys. Rev. Lett., Vol. 104, p. 057001, Feb 2010.
- [2] D. A. Ivanov. Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p -Wave Superconductors. Phys. Rev. Lett., Vol. 86, pp. 268–271, Jan 2001.
- [3] Yuan Cao, Valla Fatemi, Shiang Fang, Kenji Watanabe, Takashi Taniguchi, Efthimios Kaxiras, and Pablo Jarillo-Herrero. Unconventional superconductivity in magic-angle graphene superlattices. Nature, Vol. 556, pp. 43–50, Mar 2018.
- [4] Michael Tinkham. Introduction to Superconductivity. Dover Publications, New York, 2 edition, 2004.
- [5] 家泰弘. 超伝導. 朝倉物性物理シリーズ, No. 5. 朝倉書店, 東京, 2005.
- [6] 立木昌, 藤田敏三 (編). 高温超伝導の科学. 裳華房, 東京, 2005.
- [7] J. G. Bednorz and K. A. Müller. Possible highTc superconductivity in the Ba – La – Cu – O system. Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, Vol. 64, No. 2, pp. 189–193, Jun 1986.
- [8] M. K. Wu, J. R. Ashburn, C. J. Torng, P. H. Hor, R. L. Meng, L. Gao, Z. J. Huang, Y. Q. Wang, and C. W. Chu. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure. Phys. Rev. Lett., Vol. 58, pp. 908–910, Mar 1987.
- [9] Hiroshi Maeda, Yoshiaki Tanaka, Masao Fukutomi, and Toshihisa Asano. A New High-TcOxide Superconductor without a Rare Earth Element. Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 27, No. Part 2, No. 2, pp. L209–L210, feb 1988.
- [10] Z. Z. Sheng and A. M. Hermann. Bulk superconductivity at 120 K in the Tl–Ca/Ba–Cu–O system. Nature, Vol. 332, No. 6160, pp. 138–139, Mar 1988.
- [11] Alexander L. Fetter and Pierre C. Hohenberg. in Superconductivity, ed. R. D. Parks, Vol. 2. Marcel Dekker, New York, 1969.
- [12] 恒藤敏彦. 超伝導・超流動. 岩波講座 現代の物理学, No. 17. 岩波書店, 東京, 1993.
- [13] London F. and London H. The electromagnetic equations of the supraconductor.

- Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A149, p. 71–88, 1935.
- [14] Alexey A. Abrikosov. On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group. *JETP*, Vol. 5, No. 6, pp. 1174–1182, Dec 1957.
- [15] U. Essmann and H. Träuble. The direct observation of individual flux lines in type II superconductors. *Physics Letters A*, Vol. 24, No. 10, pp. 526 – 527, 1967.
- [16] H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, and J. V. Waszczak. Scanning-Tunneling-Microscope Observation of the Abrikosov Flux Lattice and the Density of States near and inside a Fluxoid. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 62, pp. 214–216, Jan 1989.
- [17] K. Harada, T. Matsuda, J. Bonevich, M. Igarashi, S. Kondo, G. Pozzi, U. Kawabe, and A. Tonomura. Real-time observation of vortex lattices in a superconductor by electron microscopy. *Nature*, Vol. 360, No. 6399, pp. 51–53, Nov 1992.
- [18] Pål Erik Goa, Harald Hauglin, Michael Baziljevich, Eugene Il'yashenko, Peter L Gammel, and Tom H Johansen. Real-time magneto-optical imaging of vortices in superconducting NbSe₂. *Superconductor Science and Technology*, Vol. 14, No. 9, pp. 729–731, aug 2001.
- [19] Denis Vasyukov, Yonathan Anahory, Lior Embon, Dorri Halbertal, Jo Cuppens, Lior Neeman, Amit Finkler, Yehonathan Segev, Yuri Myasoedov, Michael L. Rappaport, Martin E. Huber, and Eli Zeldov. A scanning superconducting quantum interference device with single electron spin sensitivity. *Nature Nanotechnology*, Vol. 8, p. 639–644, Sep 2013.
- [20] John R. Kirtley, Lisa Paulius, Aaron J. Rosenberg, Johanna C. Palmstrom, Connor M. Holland, Eric M. Spanton, Daniel Schiessl, Colin L. Jermain, Jonathan Gibbons, Y.-K.-K. Fung, Martin E. Huber, Daniel C. Ralph, Mark B. Ketchen, Gerald W. Gibson, and Kathryn A. Moler. Scanning SQUID susceptometers with sub-micron spatial resolution. *Review of Scientific Instruments*, Vol. 87, No. 9, p. 093702, 2016.
- [21] Ž.L. Jelić E. O. Lachman Y. Myasoedov M. E. Huber G. P. Mikitik A. V. Silhanek M. V. Milošević A. Gurevich L. Embon, Y. Anahory and E. Zeldov. A scanning superconducting quantum interference device with single electron spin sensitivity. *Nature Communications*, Vol. 8, p. 85, Jul 2017.
- [22] Y. B. Kim and M. J. Stephen. in *Superconductivity*, ed. R. D. Parks, Vol. 2. Marcel Dekker, New York, 1969.
- [23] Nicolai B Kopnin. *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [24] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad. Flux-Flow Resistance in Type-II Superconductors. *Phys. Rev.*, Vol. 139, pp. A1163–A1172, Aug 1965.

-
- [25] John Bardeen and M. J. Stephen. Theory of the Motion of Vortices in Superconductors. Phys. Rev., Vol. 140, pp. A1197–A1207, Nov 1965.
- [26] Albert Schmid. A time dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state. Physik der kondensierten Materie, Vol. 5, No. 4, pp. 302–317, 1966.
- [27] L. P. Gor'kov and G. M. Éliashberg. Generalization of the Ginzburg -Landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities. Zh. Eksp. Teor. Fiz., Vol. 54, p. 612, 1968. [Soviet Phys. JETP **27**, 328 (1968)].
- [28] L. P. Gor'kov, N. B. Kopnin. Vortex motion and resistivity of type-II superconductors in a magnetic field. Phys. Usp., Vol. 18, No. 7, pp. 496–513, 1975.
- [29] Christiane Caroli and Kazumi Maki. Motion of the Vortex Structure in Type-II Superconductors in High Magnetic Field. Phys. Rev., Vol. 164, pp. 591–607, Dec 1967.
- [30] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov. Nonlinear conductivity of superconductors in the mixed state. Zh. Eksp. Teor. Fiz., Vol. 68, p. 1915, 1975.
- [31] R.J. Watts-Tobin, Y. Krähenbühl, and L. Kramer. Nonequilibrium theory of dirty, current-carrying superconductors: Phase-slip oscillators in narrow filaments near T_c . Journal of Low Temperature Physics, Vol. 42, No. 5, pp. 459–501, Mar 1981.
- [32] C J Gorter. Note on the superconductivity of alloys. Phys. Letters, Vol. 1, No. 69, 5 1962.
- [33] B. D. Josephson. Macroscopic Field Equations for Metals in Equilibrium. Phys. Rev., Vol. 152, pp. 211–217, Dec 1966.
- [34] J. Friedel, P. G. De Gennes, and J. Matricon. Nature of the driving force in flux creep phenomena. Applied Physics Letters, Vol. 2, No. 6, pp. 119–121, 1963.
- [35] P. G. de Gennes and J. Matricon. Collective Modes of Vortex Lines in Superconductors of the Second Kind. Rev. Mod. Phys., Vol. 36, pp. 45–49, Jan 1964.
- [36] P. Nozières and W. F. Vinen. The motion of flux lines in type II superconductors. Philosophical Magazine, Vol. 14, No. 130, pp. 667–688, 1966.
- [37] Yasuhiro Iye, Shigeru Nakamura, and Tsuyoshi Tamegai. Hall effect in high temperature superconductors near T_c . Physica C: Superconductivity, Vol. 159, No. 5, pp. 616 – 624, 1989.
- [38] Alan T. Dorsey. Vortex motion and the hall effect in type-II superconductors: A time-dependent Ginzburg-Landau theory approach. Phys. Rev. B, Vol. 46, pp. 8376–8392, Oct 1992.
- [39] Ping Ao and David J. Thouless. Berry's phase and the Magnus force for a vortex

- line in a superconductor. Phys. Rev. Lett., Vol. 70, pp. 2158–2161, Apr 1993.
- [40] E. B. Sonin. Magnus force in superfluids and superconductors. Phys. Rev. B, Vol. 55, pp. 485–501, Jan 1997.
- [41] P. Ao. Invalidity of Classes of Approximate Hall Effect Calculations. Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 5025–5025, Jun 1998.
- [42] N. B. Kopnin and G. E. Volovik. Kopnin and Volovik Reply:. Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 5026–5026, Jun 1998.
- [43] D.-X. Chen, J. J. Moreno, A. Hernando, A. Sanchez, and B.-Z. Li. Nature of the driving force on an Abrikosov vortex. Phys. Rev. B, Vol. 57, pp. 5059–5062, Mar 1998.
- [44] N. Prokof'ev B. Svistunov, E. Babaev. Superfluid States of Matter. CRC Press, New York, 2015.
- [45] Yusuke Kato and Chun-Kit Chung. Nature of Driving Force on an Isolated Moving Vortex in Dirty Superconductors. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 85, No. 3, p. 033703, 2016.
- [46] S. Kambe, A. D. Huxley, P. Rodière, and J. Flouquet. Low Field Scaling of the Flux-Flow Resistivity in the Unconventional Superconductor UPt₃. Phys. Rev. Lett., Vol. 83, pp. 1842–1845, Aug 1999.
- [47] Y. Matsuda, A. Shibata, K. Izawa, H. Ikuta, M. Hasegawa, and Y. Kato. Free flux flow resistivity in a strongly overdoped high- T_c cuprate: The purely viscous motion of the vortices in a semiclassical d -wave superconductor. Phys. Rev. B, Vol. 66, p. 014527, Jul 2002.
- [48] T. Okada, H. Takahashi, Y. Imai, K. Kitagawa, K. Matsubayashi, Y. Uwatoko, and A. Maeda. Microwave surface-impedance measurements of the electronic state and dissipation of magnetic vortices in superconducting LiFeAs single crystals. Phys. Rev. B, Vol. 86, p. 064516, Aug 2012.
- [49] Hikaru Ueki, Wataru Kohno, and Takafumi Kita. Vortex-Core Charging Due to the Lorentz Force in a d-Wave Superconductor. Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 85, No. 6, p. 064702, 2016.
- [50] Chia-Ren Hu and Richard S. Thompson. Dynamic Structure of Vortices in Superconductors. II. $H \ll H_{c2}$. Phys. Rev. B, Vol. 6, pp. 110–120, Jul 1972.
- [51] Hidetoshi Fukuyama, Hiromichi Ebisawa, and Toshio Tsuzuki. Fluctuation of the Order Parameter and Hall Effect. Progress of Theoretical Physics, Vol. 46, No. 4, pp. 1028–1041, 1971.
- [52] Hiromichi Ebisawa and Hidetoshi Fukuyama. Wave Character of the Time Dependent Ginzburg Landau Equation and the Fluctuating Pair Propagator in Superconductors. Progress of Theoretical Physics, Vol. 46, No. 4, pp. 1042–1053, 1971.

- [53] 加藤雄介. 超伝導量子渦のダイナミクス (その 6). 固体物理, Vol. 51, No. 5, p. 275, May 2016.