論文内容の要旨

博士論文題目

Bounded cohomology of volume-preserving diffeomorphism groups

(体積保存微分同相群の有界コホモロジー)

氏名 木村 満晃

Gromov の 1982 年の論文 [3] 以降, 有界コホモロジー (bounded cohomology) は盛んに研究されてる対象である. しかし一般に計算は難しく, 未知の部分が多い. 特に群の実数係数有界コホモロジーを考える. 1 次有界コホモロジーは常に自明である. 2 次有界コホモロジーは, 擬準同型 (quasimorphism) とよばれる群の上の実数値関数で理解される. 3 次有界コホモロジーについては, 吉田や相馬による初期の仕事を除き, しばらく結果が無かったが, ここ数年で研究が進展している.

本論文では, 微分同相群の擬準同型, 有界コホモロジーおよびその一般化について考察を行った. 本論文は三つの主結果からなる. 以下コホモロジーの係数は実係数とする.

第一に, G-不変擬準同型という概念を導入し, 考察を行った.

群 Γ 上の実数値関数 ϕ が擬準同型であるとは,

$$D(\phi) = \sup_{x,y\in\Gamma} |\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)| < +\infty$$

が成り立つことをいう.

G を群とし, H を G の正規部分群とする. H 上の擬準同型であって, G による共役で不変なものを, G-不変擬準同型とよぶことにする. この対象について川崎盛通氏と共同研究を行った. H 上の G-不変な同次擬準同型全体を $Q(H)^G$ とかく.

G-不変擬準同型に対し, Bavard の双対定理の類似が成り立つことを観察した. (G, H)-交換子 $[g, h]$ $(g \in G, h \in H)$ で生成される群を $[G, H]$ で表す. $x \in [G, H]$ に対し, x を (G, H)-交換子の積でかける最小個数を $\mathrm{cl}_{G,H}(x)$ で表し, $\mathrm{scl}_{G,H}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{cl}_{G,H}(x^n)/n$ とする. このとき以下が成り立つ.

定理 1 $H = [G, H]$ を仮定する. $x \in [G, H]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_{G,H}(x) = \frac{1}{2} \sup_{\phi\in Q(H)^G} \frac{|\phi(x)|}{D(\phi)}$$

なお, [5] において, $H = [G, H]$ という仮定を外した場合について証明されている.

H 上の同次擬準同型が G-不変であることは, G 上の同次擬準同型に拡張するための必要条件である. G-不変であって G 上に拡張しない擬準同型の例を見出した.

定理 2 Σ_g を種数 $g \geq 2$ の閉曲面とし, ω を Σ_g 上のシンプレクティック形式とする. Py の擬準同型 $\mu_P\colon \mathrm{Ham}(\Sigma_g, \omega) \to \mathbb{R}$ は $\mathrm{Symp}_0(\Sigma_g, \omega)$ 上に拡張しない.

定理 2 の応用として, 以下の主張が得られる.

定理 3 $g \geq 2$ とする. フラックス準同型 $\mathrm{Flux}\colon \mathrm{Symp}_0(\Sigma_g, \omega) \to H^1(\Sigma_g; \mathbb{R})$ は切断準同型をもたない.

第二に, ノルム制御コホモロジーという概念を導入し, Brandenbursky と Marcinkowski の結果 [1] の拡張を行った.

M を有限体積完備リーマン多様体とし, μ をリーマン計量から定まる M 上の測度とする. M の変換群 $\mathcal{T}_M$ を, 測度保存同相群 $\mathrm{Homeo}_0(M, \mu)$, 体積保存微分同相群 $\mathrm{Diff}_0(M, \mathrm{vol})$, シンプレクティック微分同相群 $\mathrm{Symp}_0(M, \omega)$ (M にシンプレクティック形式 ω が定まる場合) のいずれかとする.

Brandenbursky と Marcinkowski [1] は, 基本群 $\pi_1(M)$ が十分複雑なとき, $\mathcal{T}_M$ の 3 次有界コホモロジー $\overline{EH}_b^3(\mathcal{T}_M)$ が無限次元となることを示した. この結果を, 有限体積とは限らない場合について考察するために, 有界コホモロジーの一般化にあたるノルム制御コホモロジーという概念を導入した.

定義 4 G を群, ν を G 上のノルムとする. (非同次)n-コチェイン $\bar{c}\colon G^n \to \mathbb{R}$ が (レベル d) ノルム制御コチェインとは, ある定数 $C, D \geq 0$ が存在して, 任意の $g_1, \ldots, g_n \in G$ に対し,

$$|\bar{c}(g_1, \ldots, g_n)| \leq C \cdot \min_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\} \\ \# I = n-d}} \left\{ \sum_{i \in I} \nu(g_i) \right\} + D$$

をみたすことと定める. ただし $d \geq n$ のときは単に有界コチェインを表すとする. レベル d のノルム制御 n-コチェイン全体を $\bar{C}^n_{(d)}(G, \nu)$ すると, これはコチェイン複体を定める. この複体から定まるコホモロジー $H^n_{(d)}(G, \nu)$ をノルム制御コホモロジーとよぶ. 比較写像 $H^n_{(d)}(G, \nu) \to H^n(G)$ の核を $EH^n_{(d)}(G, \nu)$ とかく.

この設定の下, Brandenbursky–Marcinkowski の結果が以下のように拡張された.

定理 5 M を完備リーマン多様体とする. $\mathcal{T}_M$ を $\mathrm{Homeo}_0(M, \mu)$, $\mathrm{Diff}_0(M, \mathrm{vol})$, $\mathrm{Symp}_0(M, \omega)$ のいずれかとする. M の開集合 $U \subset M$ を, U に関する fragmentation norm ν_U が $\mathcal{T}_M$ 全体で定義されるよう十分大きくとる. $\pi_M = \pi_1(M)/Z(\pi_1(M))$ が以下のいずれかをみたすと仮定する.

- 全射 $\pi_M \to F_2$ が存在する
- π_M は非シリンダー的双曲群である

このとき, $EH^3_{(k)}(\mathcal{T}_M, \nu_U)$ は $k = 0, 1, 2$ に対し無限次元である.

第三に, 曲面の面積保存微分同相群の有界コホモロジーについて調べた.

Brandenbursky–Marcinkowski の結果は, M が 2 次元の場合はオイラー標数 $\chi(M)$ が負の場合をカバーしている. 残りの M が円板, 球面, トーラス, アニュラスの場合について考察を行った.

コンパクト有向曲面 Σ に対し, $\mathcal{G}_\Sigma = \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \partial\Sigma, \mathrm{area})$ を, Σ の面積保存微分同相群の単位元成分とする. $B_m(\Sigma)$ および $P_m(\Sigma)$ を Σ 上の m-ブレイド群および純ブレイド群とする. 群 G に対し, G^Z で $G/Z(G)$ を表すことにする. $i^Z\colon P_m(\Sigma)^Z \to B_m(\Sigma)^Z$ を, 標準的な単射 $i\colon P_m(\Sigma) \to B_m(\Sigma)$ が誘導する写像とする. Gambaudo–Ghys 構成 [2] を一般化した写像 $\overline{E\Gamma}_b^Z\colon \overline{EH}_b^n(P_m(\Sigma)^Z) \to \overline{EH}_b^n(\mathcal{G}_\Sigma)$ を定義し, 石田 [4] の結果の一般化にあたる以下の定理を示した.

定理 6 Σ を $\chi(\Sigma) \geq 0$ なるコンパクト有向曲面とする. $m = 2 + \chi(\Sigma)$ に対し, 写像 $\overline{E\Gamma}_b^Z \circ (i^Z)^*\colon \overline{EH}_b^n(B_m(\Sigma)^Z) \to \overline{EH}_b^n(\mathcal{G}_\Sigma)$ は単射である.

これと Brandenbursky–Marcinkowski [1] の結果を併せることにより以下を得る.

定理 7 Σ をコンパクト有向曲面とする. 面積保存微分同相群 $\mathcal{G}_\Sigma = \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \partial\Sigma, \mathrm{area})$ の 3 次有界コホモロジー $\overline{EH}_b^3(\mathcal{G}_\Sigma)$ は無限次元である.

参考文献

[1] M. Brandenbursky and M. Marcinkowski, *Bounded cohomology of transformation groups*, arXiv:1902.11067 (2019).

[2] J-M. Gambaudo and E. Ghys, *Commutators and diffeomorphisms of surfaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **24**(5) (2004), 1591–1617.

[3] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Publ. Math. IHÉS., (1982), 5–99.

[4] T. Ishida,*Quasi-morphisms on the group of area-preserving diffeomorphisms of the 2-disk via braid groups*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B, **1** (2014), 43–51.

[5] M. Kawasaki, M. Kimura, T. Matsushita, and M. Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, arXiv:2007.02257v2 (2021).