論文の内容の要旨

論文題目.

Two-dimensional conformal field theory, current-current deformation and mass formula
(二次元共形場理論のカレントカレント変形と重み公式)

氏名　森脇 湧登

場の量子論の変形は、理論物理において場の量子論を調べる主要な道具である。しかしながら変形は多くの場合、結合定数 g (変形のパラメータ) に関する有限階の近似 (摂動計算) に過ぎない。そのため摂動計算では、強結合領域 $g >> 0$ を調べることは難しく、非摂動的な場の量子論の変形を構成することは物理的に重要である。また数学的に厳密な場の量子論の例が作れない理由の一つは変形が摂動的にしか構成できないことにある。

この研究では二次元の共形対称性を持つ場の量子論 (二次元共形場理論) の数学的定式化を与え、その非摂動的な変形を構成した。また変形を頂点作用素代数と呼ばれる数学的対象に応用し、頂点作用素代数の分類や構成に関する新たな結果を得た。

(1) 二次元共形場理論の定式化

二次元共形場理論の場は作用素値の実解析的関数である。任意の場が正則な共形場理論は、カイラル共形場理論と呼ばれている。その代数は Borcherds 氏によって数学的に公理化されており、頂点代数 (または頂点作用素代数) と呼ばれている。散在型有限単純群であるモンスター群を自己同型群に持つモンスター頂点作用素代数 $V^\natural$ はその一例であり、他にもアファインリー代数や二次形式などを用いて数多くの頂点作用素代数が数学的に構成され、その表現論や分類などが調べられてきた。

カイラルでない二次元共形場理論は、正則部分と反正則部分の頂点作用素代数を決めると、その代数的拡大として構成できる。正則反正則部分の (半単純な) 有限拡大になる共形場理論は有理的共形場理論と呼ばれ、Huang-Kong において数学的に定式化され調べられた。ただし有理的共形場理論のエネルギースペクトラムは有理数になることが知られており、理論の変形を考えるには非有理的な共形場理論を考える必要がある。私は (有理的とは限らない非カイラルな) 共形場理論を数学的に定式化し、full 頂点代数 (および full 頂点作用素代数) という代数を定義した。

(2) current-current 変形の数学的構成

共形場理論は大域的共形対称性 SO(3, 1) から定まる $\mathbb{R}^2$ の次数付けを持つ $F = \bigoplus_{h,\bar{h}\in\mathbb{R}} F_{h,\bar{h}}$。物理では共形場理論の共形対称性を保つ任意の変形は、「可積分」な (1,1) 場 $a \in F_{1,1}$ によって生成されると信じられている。とくに $F_{1,0} \otimes F_{0,1} \subset F_{1,1}$ (正則な current と反正則な current の積) の元から生成される共形場理論の変形は current-current 変形と呼ばれ、Chaudhuri-Schwartz や Förste-Roggenkamp らにより理論物

理において調べられてきた。しかし、その研究は経路積分によっており、数学的に厳密に構成する必要があった。私は、この current-current 変形を full 頂点代数の変形として定式化した。full 頂点代数が正則及び反正則なランク n と m の Heisenberg 頂点代数を部分代数として含むとき、それを full $\mathcal{H}$ 頂点代数と呼ぶ。正則 (resp. 反正則)Heisenberg 頂点代数は、上記の $F_{1,0}$ (resp. $F_{0,1}$) の元が生成する代数に対応する。このとき、私は full $\mathcal{H}$ 頂点代数が多様体 $O(n,m)/O(n)\times O(m)$ でパラメトライズされた変形族を持つことを示した (ここで $O(n,m)$ は符号数 (n,m) の直交群、$O(n), O(m)$ は n,m 次元のユークリッド空間の直交群)。また Heisenberg 頂点代数の作用に関する F の最低ウェイト空間には代数構造が入り、その自己同型群を D_F とおくと、変形族の同型類は、$D_F\backslash O(n,m)/O(n)\times O(m)$ と書けることを示した (この論文で構成した変形は強結合領域まで厳密であり、そのことから大域的な表示が得られる)。群 D_F を duality 群と呼ぶ。たとえば、full $\mathcal{H}$ 頂点代数をレベル 1 の SU(2) WZW モデル $F_{\mathrm{SU}(2)}$ に取ると、current-current 変形は実数 $R\in O(1,1)/O(1)\times O(1)\cong\mathbb{R}_{>0}$ でパラメトライズされる。この共形場理論は、ターゲット空間が一次元の弦理論の半径 R のコンパクト化から生じる共形場理論である。duality 群 $D_{F_{\mathrm{SU}(2)}}$ の作用は R と R^{-1} を入れ替える。物理では弦理論の双対性 $R\leftrightarrow R^{-1}$ は T 双対と呼ばれ、duality 群はその一般化になっている。このとき同型類は半直線 $[1,\infty)$ でパラメトライズされる。この半直線は、物理において Ginsparg および Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde らによって予想された中心電荷 $(c,\bar{c})=(1,1)$ の共形場理論のモジュライ空間 (図 1 参照) における横線に対応している。

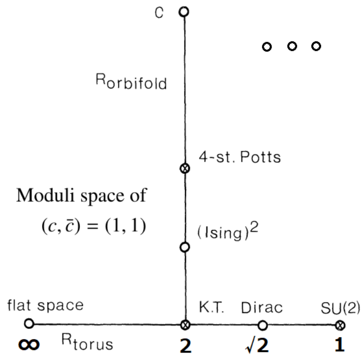

図 1:

(3) 変形によって生じる新しい頂点代数の数え上げ

また上記の結果を頂点作用素代数 (カイラルな共形場理論) の分類に応用した。頂点作用素代数はエネルギーが整数であり連続変形をすることはできないが、full 頂点作用素代数をテンソルすることで変形できるようになる。私は先述した WZW モデル $F_{\mathrm{SU}(2)}$ を頂点作用素代数にテンソルした時に、current-current 変形によって生じる新しい頂点作用素代数の同型類の個数を数え上げる公式 (重み公式) を証明した。

最後に重み公式の「正則型」頂点作用素代数への応用を述べる。モンスター頂点作用素代数 $V^\natural$ は、既約表現を一つ (自分自身) しか持たない。そのような頂点作用素代数は「正則型」と呼ばれ、数学において良く研究されている。とくに中心電荷 24 (頂点作用素代数の不変量) の正則型頂点作用素代数の同型類は、全部で 71 個あると予想されている。私は上記の重み公式を用いることでたとえば 71 個のうちの 17 個は current-current 変形によって互いに移りあうことを証明した。

変形による結び付きはカイラルな共形場理論 (頂点作用素代数) だけを考えていては見えなかったものである。今後も非カイラルな共形場理論とその変形を考えることで、頂点作用素代数に様々な応用が得られると考えている。