

論文の内容の要旨

論文題目 Spectral analysis on complete anti-de Sitter 3-manifolds
(完備な 3 次元反ド・ジッター多様体上のスペクトル解析)

氏 名 甘中 一輝

本博士論文では反ド・ジッター空間 $\text{AdS}^3 := \text{SO}_0(2, 2)/\text{SO}_0(2, 1)$ の不連続群 Γ に対して、

- Γ 軌道の数え上げの無限遠での増大度
- 反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ のラプラシアン of 離散スペクトラム

の研究を行う。反ド・ジッター空間 AdS^3 は断面曲率 -1 の定曲率ローレンツ多様体で、その等長変換群の連結成分はリー群 $\text{SO}_0(2, 2)$ となる。William Goldman, 小林俊行, Fanny Kassel 等の著名な研究者達によって AdS^3 の不連続群やその変形空間は特に詳細に研究されてきた。本博士論文の主結果 A, B, C は無限生成の不連続群, 主結果 D, E は有限生成の不連続群に関する結果である。

最初に用語を説明する。古典的な文献では、不連続群と (リー群の) 離散部分群は屡々同義に用いられていた。これはリーマン多様体では等長変換からなる離散群は常に固有不連続に作用するため、両者を区別する必要がなかった事による。リーマン多様体とは限らない一般の設定を扱うため、小林は不連続群という用語を (群としての性質ではなく) 作用としての性質として用いる事を提唱した。本博士論文ではこの現代的な用語を用いる。すなわち等質多様体 G/H に固有不連続かつ固定点自由に作用するリー群 G の離散部分群 Γ を G/H の不連続群と呼ぶ。不連続群 Γ の軌道は G/H のコンパクト部分集合と高々有限回だけ交わる為、その個数を数える事が出来る。Kassel・小林 [2] は反ド・ジッター空間, より一般に半単純対称空間 G/H において半径 $R > 0$ の擬球と呼ばれるコンパクト部分集合 $B(R)$ を導入し、 $x \in G/H$ を通る不連続群 Γ の軌道の数え上げ

$$N_\Gamma(x, R) := \#(\Gamma x \cap B(R))$$

の $R \rightarrow \infty$ での増大度を研究した。

反ド・ジッター空間 AdS^3 のように計量が正定値ではない場合、等長変換からなる離散部分群 Γ の G/H への作用は固有不連続になると限らない事に注意しておきたい。簡約型等質空間における作用の固有性を Cartan 射影で判定する小林 [Math. Ann. (1989)] の先駆的研究をさらに一般化することで、小林 [J. Lie Theory (1996)] と Benoist [Ann. of Math. (1996)] は G が簡約リー群の場合にその離散部分群 Γ の G/H への作用の固有不連続性の判定法を確立した。これらの判定法のア

イディアに基づき Kassel・小林 [2] は不連続群の (c, C) -強不連続性 ($c > 0, C \geq 0$) の概念を導入し, 固有不連続性の「強さ」を量的に評価した. ここで定数 c が 0 に近づくほど固有不連続性は弱まる. さらに AdS^3 の (より一般に半単対称空間の) 強不連続な不連続群の数え上げ $N_\Gamma(x, R)$ が $R \rightarrow \infty$ で x に関して一様に指数増大である事を証明した:

定理 1 ([2, Lem. 4.6]). 定数 $A_0 > 0$ が存在して, AdS^3 の振れ元を持たない任意の (c, C) -強不連続な不連続群 Γ に対して

$$\forall x \in \text{AdS}^3, \forall R > 0, N_\Gamma(x, R) \leq A_0 \exp\left(\frac{4(R+C)}{c}\right).$$

一方不連続群が強不連続でない ($c = 0$) 場合の数え上げについては研究が為されていない. 定理 1 で形式的に $c = 0$ を代入すると数え上げ $N_\Gamma(x, R)$ についての制約は現れない事に注意しよう.

本博士論文第二章では, まず Guéritaud・Kassel [1] による強不連続でない不連続群の例を一般化して, $\text{SO}_0(2, 2)$ の多くの無限生成の部分群を構成し, 次にその AdS^3 への作用が固有不連続か, また強不連続かどうかの判定法を与える (Propositions 2.22, 2.31). こうして得られる強不連続でない不連続群の軌道の数え上げについて起こり得る現象を研究した. 特に以下の定理を構成的に証明した:

主結果 A (Theorem 2.1). 強不連続でない AdS^3 の不連続群 Γ が存在して

$$\forall x \in \text{AdS}^3, \forall R > 0, N_\Gamma(x, R) \leq 4^R.$$

主結果 B (Theorem 2.2). 任意に単調増加関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ と $x \in \text{AdS}^3$ を選んだ時, AdS^3 の不連続群 $\Gamma \equiv \Gamma_{f,x}$ が存在して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_\Gamma(x, R)}{f(R)} = \infty.$$

例えば $f(R) = \exp(e^R)$ に主結果 B を適用する事で,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\#(\Gamma x \cap B(R))}{\text{vol}(B(R))} = \infty$$

となる不連続群を構成する事が出来る.

本博士論文第二章の後半では強不連続でない不連続群 Γ に付随する非コンパクト反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ の離散スペクトラムについて考察する. いくつかの基本的な用語を思い出す. 擬リーマン多様体とは符号数 (p, q) の滑らかな非退化対称双線形テンソルを有する可微分多様体であり, $q = 0$ の時リーマン多様体, $q = 1$ の時ローレンツ多様体と呼ばれる. リーマン多様体の場合と同様に擬リーマン多様体においても $\square = \text{div} \circ \text{grad}$ によって 2 階の微分作用素 (ラプラシアン) が定義される. リーマン多様体とは異なりローレンツ多様体においてはラプラシアンは楕円型ではなく双曲型微分作用素となり, 一般には固有関数が解析関数にならない.

M の擬リーマン体積要素に関して二乗可積分な関数のなすヒルベルト空間を $L^2(M)$ と表記し, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$L_\lambda^2(M) := \{f \in L^2(M) \mid \square_M f = \lambda f \text{ (弱解)}\}$$

とおく. L^2 固有値全体からなる集合

$$\text{Spec}_d(\square_M) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid L_\lambda^2(M) \neq \{0\}\}$$

を M のラプラシアン Δ_M の離散スペクトラムと呼ぶ.

反ド・ジッター空間 AdS^3 の不連続群 Γ に対して, 商空間 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ は可微分多様体となり, 被覆写像 $\text{AdS}^3 \rightarrow \Gamma \backslash \text{AdS}^3$ を通して断面曲率 -1 の定曲率ローレンツ多様体 (反ド・ジッター多様体) となる. Kassel・小林 [2] は反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ のラプラシアンの離散スペクトラム, より一般に局所半単純対称空間上の「内在的な微分作用素」の離散スペクトラムの研究を創始した.

彼らは離散スペクトラムの構成の為にポアンカレ級数の一般化として, 「非周期的な固有関数の Γ 平均」を導入した. 反ド・ジッター空間 AdS^3 には

$$\lambda_m := 4m(m-1) \quad (m \in \mathbb{Z} \text{ かつ } m \geq 2)$$

を固有値とするラプラシアンの L^2 固有関数が存在する事が知られている. この固有関数を不連続群 Γ の作用で平均化する事で, 反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ 上の固有値 λ_m の固有関数が構成出来る. 定理 1 の様な不連続群 Γ の軌道の数え上げ $N_\Gamma(x, R)$ の指数増大性が一つの鍵となり, 十分大きな λ_m を固有値に持つ固有関数の一般化ポアンカレ級数の収束性・非消滅が証明され, 特に反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ のラプラシアンの離散スペクトラムの構成定理が得られる:

定理 2 ([2]). AdS^3 の任意の強不連続な不連続群 Γ に対して正の実数 $m_0(\Gamma)$ が存在して,

$$\text{Spec}_d(\Delta_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}) \supset \{\lambda_m \mid m \in \mathbb{Z}, m > m_0(\Gamma)\}.$$

強不連続性を有さない不連続群 Γ に付随する反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ にはラプラシアンの離散スペクトラムが存在するかどうかという問は自然である. 主結果 A の様な数え上げの評価の応用として Kassel・小林 [2] の方法を用いる事で次を証明する:

主結果 C (Theorem 2.5). AdS^3 の強不連続でない不連続群 Γ と, Γ に依存する正の実数 $m'_0(\Gamma)$ が存在して

$$\text{Spec}_d(\Delta_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}) \supset \{\lambda_m \mid m \in \mathbb{Z}, m > m'_0(\Gamma)\}.$$

主結果 B で構成したような, 数え上げ $N_\Gamma(x, R)$ の増大度が極めて大きい不連続群に付随する非コンパクト反ド・ジッター多様体に対しても, そのラプラシアンの離散スペクトラムが存在するかどうかは現時点では不明である.

本論文第三章では一般化ポアンカレ級数で構成出来る反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ のラプラシアンの離散スペクトラム λ_m の重複度を研究する. ここで擬リーマン多様体 M に対して

$$\mathcal{N}_M(\lambda) := \dim_{\mathbb{C}} L^2_\lambda(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

を離散スペクトラム λ の重複度と呼ぶ. リーマン多様体の場合はラプラシアンは楕円型微分作用素となり, M がコンパクトならば固有値の重複度は必ず有限となるが, コンパクトローレンツ多様体の場合には重複度は有限にも無限にもなり得る.

反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ のラプラシアンの固有値の重複度については, 不連続群 Γ が振れ元をもたず, かつ standard ([2, Def. 1.4]) であるならば十分大きい $m \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{N}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}(\lambda_m) = \infty$ となる事が知られている ([3]). 一方で non-standard な不連続群 Γ , 例えば等長変換群の中でザリスキ稠密となる様な有限生成の不連続群 Γ も存在するが (小林, Klingler), この場合には反ド・ジッ

ター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ のラプラシアン の重複度が有限かどうかは現在の所知られていない. 本博士論文ではそのような反ド・ジッター多様体も含めて, 固有値 λ_m が大きくなった時の重複度 $\mathcal{N}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}(\lambda_m)$ の挙動を研究した. 次の定理はある一般化ポアンカレ級数の族の一次独立性を証明する事で重複度の非有界性を示すものである:

主結果 D (Theorem 3.1). AdS^3 の任意の有限生成の不連続群 Γ に対して,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}(\lambda_m) = \infty.$$

本博士論文第三章の後半では離散部分群の連続変形に対して, ラプラシアン の固有値の重複度がどのようなふるまいをするかを考察する. 非リーマン等質多様体の不連続群の局所剛性や安定性の研究は小林 [Math. Ann. (1998)] や小林・Nasrin により創始された. 特に AdS^3 の設定では, 余コンパクトな不連続群 Γ は局所剛性を持たず, またその作用の固有不連続性は Γ の任意の微小変形の下で安定である (小林, Klingler). さらに Kassel・小林 [2] はコンパクト反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ の Γ の微小変形に関する安定固有値を無限個構成した. より詳しく述べると, 十分大きい $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lambda_m \in \bigcap_{\Gamma'} \text{Spec}_d(\square_{\Gamma' \backslash \text{AdS}^3})$$

となる ([2, Cor. 9.10]). ここで \bigcap において Γ' は Γ にコンパクト開位相で十分近い離散群全体を動く. 本博士論文ではコンパクト反ド・ジッター多様体 $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$ に対して安定固有値としての重複度

$$\tilde{\mathcal{N}}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

を,

- $\tilde{\mathcal{N}}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}(\lambda) \neq 0$ である事と λ が安定固有値である事が同値
- Γ' が Γ に十分近い時, $\mathcal{N}_{\Gamma' \backslash \text{AdS}^3}(\lambda) \geq \tilde{\mathcal{N}}_{\Gamma \backslash \text{AdS}^3}(\lambda)$

となるように導入し (Definition 3.3), その非有界性を証明する:

主結果 E (Theorem 3.4). 3次元のコンパクト反ド・ジッター多様体 M に対して,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{N}}_M(\lambda_m) = \infty.$$

すなわちコンパクト反ド・ジッター多様体のラプラシアンには反ド・ジッター構造の任意の微小変形に関して安定な固有値が無限個存在するだけではなく, それらの安定固有値としての重複度が非有界となる事が分かる.

参考文献

- [1] F. Guéritaud and F. Kassel. Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds. *Geom. Topol.*, 21(2):693–840, 2017.
- [2] F. Kassel and T. Kobayashi. Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces. *Adv. Math.*, 287:123–236, 2016.
- [3] F. Kassel and T. Kobayashi. Spectral analysis on standard locally homogeneous spaces. arXiv:1912.12601, 2019.