

## 論文審査の結果の要旨

氏名 甘中一輝

1980 年代後半, “リーマン幾何の枠組を超えた不連続群の理論” が本学の小林俊行教授によって創始された. 古典的なリーマン幾何における不連続群論では, 等長変換からなる群  $\Gamma$  に対し

$$\begin{array}{ccc} \text{群の性質} & & \text{作用の性質} \\ \Gamma \text{ は離散群} & \iff & \Gamma \text{ 作用が固有不連続} \end{array}$$

という同値性があった. しかし, リーマン幾何の枠組を超えた場合, 例えば, 相対論の時空の幾何学であるローレンツ幾何, あるいは, より一般の不定符号  $(p, q)$  をもつ擬リーマン多様体においては, 新しい“ファクター”  $\alpha$  が加わり,

$$\text{離散部分群} + \alpha = \text{不連続群}$$

という構図になっている. リーマン幾何では現れない以下のような新しい現象

- ド・ジッター群には無限不連続群が存在しない (Calabi–Markus 現象)
- 高次元の既約な対称空間にも連続変形が可能な格子が存在する (小林 '98)

はこのファクター  $\alpha$  に起因する. 小林によるファクター  $\alpha$  の解明 (1989–1992) 以降, リーマン幾何の枠組を超えた不連続群の理論は, 力学系, リー群論, 表現論, エルゴード理論, 幾何学群論などと結びつき, 現在, 活発に研究されている.

本博士論文では甘中一輝氏は 3 次元の反ド・ジッター空間  $\text{AdS}^3$  (負の定曲率をもつローレンツ多様体) に焦点を当て, その不連続群  $\Gamma$  に関し

- $\Gamma$  軌道の数え上げの無限遠での増大度
- 反ド・ジッター多様体  $\Gamma \backslash \text{AdS}^3$  のラプラシアン of 離散スペクトラム

の研究を行った.

$x \in \text{AdS}^3$  を通る  $\Gamma$  の軌道  $\Gamma x$  の内,  $\text{AdS}^3$  の半径  $R$  の擬球  $B(R)$  に含まれる点の個数 (数え上げ) を

$$N_\Gamma(x, R) := \#(\Gamma x \cap B(R))$$

と表記する.  $\Gamma$  が強不連続性をみたす場合には, 以下のように, 数え上げ  $N_\Gamma(x, R)$  は高々指数増大の漸近挙動をとることが知られている.

定理 (Kassel–小林, 2016). ある定数  $A > 0$  が存在し,  $\text{AdS}^3$  の任意の強不連続群  $\Gamma$ , 任意の点  $x \in \text{AdS}^3$ , 任意の  $R > 0$  に対して

$$N_\Gamma(x, R) \leq A \exp\left(\frac{4(R+C)}{c}\right)$$

が成り立つ. ここで  $(c, C)$  は  $\Gamma$  の強不連続指数である.

論文提出者は,  $N_\Gamma(x, R)$  が指数増大であるが,  $\Gamma$  が強不連続ではない例も存在することを証明した.

定理 A (甘中). 任意の  $x \in \text{AdS}^3$ , 任意の  $R > 0$  に対して

$$N_\Gamma(x, R) \leq 4^R$$

となるような強不連続でない不連続群  $\Gamma$  が存在する.

さて, リーマン多様体  $X$  においては, 等長変換からなる不連続群  $\Gamma$  の数え上げの増大度は体積の増大度を越えない, 正確には, 次の定理が成り立つ:

$$\forall x \in X, \exists c > 0, \quad \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\#(\Gamma x \cap B(R))}{\text{vol}(B(R+c))} < \infty.$$

ところが, 反ド・ジッター多様体では, 様相が大きく異なることを論文提出者は発見した. すなわち, 数え上げの増大度が体積の増大度を上回るケースが発生する.

定理 B (甘中). 任意の  $x \in \text{AdS}^3$  と任意の単調増加関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  に対して

$$N_\Gamma(x, R) > f(R) \quad (\forall R \gg 0)$$

をみたすような  $\text{AdS}^3$  の等長変換からなる不連続群  $\Gamma$  が存在する.

定理 B は新しい現象であり, 定理 A はラプシアン安定固有値の存在定理 (Kassel–小林) の拡張に用いられる. 論文提出者は定理 A と定理 B をより一般的な結果から導いた. すなわち, まず, 4 つの数列を “パラメータ” とする Schottky 群を構成し, 小林–Benoist の properness criterion (1996) を  $\text{AdS}^3$  に適用することによって, その  $\text{AdS}^3$  への等長作用が固有不連続となるための必要十分条件を 4 つの数列の漸近挙動で与え, さらに強固有不連続に関する判定法も明示的に与えた. これらの必要十分条件と, 数え上げの評価式とを組み合わせることによって, 甘中氏は定理 A と定理 B を構成的に証明したのである.

さて, Kassel–小林 (2016) は半単純対称空間の不連続群の変形に関して安定な固有値の存在問題を提起し, 特に, 3 次元のコンパクト反ド・ジッター多様体に対しては反ド・ジッター構造の微小変形 ( $\Leftrightarrow$  不連続群の微小変形) に関して,  $\lambda_m = 4(m-1)m$  ( $m \gg 0$ ) が安定な固有値として現れることを発見した. その証明には数え上げの一樣評価が用いられる. 甘中一輝氏は安定固有値の重複度  $\widetilde{N}_M(\lambda)$  という量を定義し, 次の評価を証明した.

定理 C (甘中). 3 次元のコンパクト反ド・ジッター多様体  $M$  に対し,  $M$  に依存するある定数  $B$  が存在し, 次の評価式をみたす:

$$\widetilde{N}_M(\lambda_m) \geq \log_3 m + B.$$

以上のように, 当該論文は, 現在, 活発な研究が行われている反ド・ジッター多様体の基本群と大域解析について, 時宜を得た新しい知見を与えたものである. 論文提出者 甘中一輝氏は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.