論文の内容の要旨

論文題目　Ray-Singer torsion and the Laplacians of the Rumin complex on lens spaces
(レンズ空間上の Ray-Singer 捩率と Rumin 複体のラプラシアン)

氏　　名　北岡　旦

(M,H) を $2n+1$ 次元接触多様体とし、E を M 上にユニモジュラーなホロノミーを持つ平坦ベクトル束とする。Rumin [9] は E の de Rham 複体の部分複体 $(\mathcal{E}^\bullet(M,E), d_{\mathrm{R}}^\bullet)$ を導入した。この複体の特徴として、$k \neq n$ では $d_{\mathrm{R}}^k \colon \mathcal{E}^k(M,E) \to \mathcal{E}^{k+1}(M,E)$ は 1 階の偏微分作用素であるのに対して、$k=n$、すなわち中央では $D = d_{\mathrm{R}}^n \colon \mathcal{E}^n(M,E) \to \mathcal{E}^{n+1}(M,E)$ は 2 階の偏微分作用素になる。パラメータを $a_k = 1/\max\{1, \sqrt{|n-k|}\}$ とし、$d_{\mathcal{E}}^k = a_k d_{\mathrm{R}}^k$ とすると、$(\mathcal{E}^\bullet(M,E), d_{\mathcal{E}}^\bullet)$ も複体になる。この複体を Rumin 複体と呼ぶことにする。3 次元の場合は $a_k = 1$ になることに注意する。このパラメータを考慮することにより、佐々木多様体で $d_{\mathcal{E}}^\bullet$ は Kähler 型の恒等式を持つ [11]。ここで、佐々木多様体は接触多様体であり、球面やレンズ空間を含む。

Rumin 複体には主に二つの側面が知られている。第一に、Rumin 複体は、接触多様体に関して平坦ベクトル束の de Rham 複体の Bernstein-Gelfand-Gelfand 複体 (BGG 複体) に一致する (e.g. [12, §5.3], [2, §4])。BGG 複体は放物型幾何 [1] や、良いクラスのフィルター多様体で定義される [2]。典型的な定理として、BGG 複体のコホモロジーは de Rham コホモロジーに一致することが挙げられる [10, Theorem 1], [1, Theorem 4.13], [2, Corollary 4.20]。

第二に、Rumin 複体は sub-Riemann 極限を考えた際に現れる。Sub-Riemann 幾何への自然な手法として、sub-Riemann 極限を取ったときに Riemmann 多様体で定義されるものがどのような振る舞いをするかが挙げられる。コンパクトなファイブレションに対して Mazzeo と Melrose [8] が Hodge-de Rham ラプラシアンに対する sub-Riemann 極限の挙動の一部が BGG 複体を用いて書けることを示した。また、Riemann 葉層構造に対して Forman [3] が de Rham 複体の Dirac 作用素に対する sub-Riemann 極限の振る舞いの一部が BGG 複体を使って表せることを発見した。接触多様体では、Hodge-de Rham ラプラシアンに対する sub-Riemann 極限が Rumin 複体で記述できることを Rumin は突き止めた [11]。

Rumin と Seshadri はパラメータを $a_k = 1$ とした Rumin 複体に付随する解析的捩率 (Rumin-Seshadri 捩率) 導入した [13]。S^1 作用つき 3 次元佐々木多様体において、Rumin-Seshadri 捩率と Ray-Singer 捩率が一致することを証明した。この定理が 5 次元以上でも成り立つかどうかは自然な問である。

本論文では、この問をレンズ空間の場合に対して調べる。まず、CR 球面 $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 上の自明束で、パラメータ a_k を考慮した Rumin 複体のラプラシアン $\Delta_{\mathcal{E}}$ の固有値を具体的に求める。特に、S^{2n+1} に作用する $\mathrm{U}(n+1)$ の最高ウェイトのみで $\Delta_{\mathcal{E}}$ の固有値が決定される。これは池田と谷口 [4, Proposition 2.3] による次の Hodge-de Rham ラプラシアンの定理に類する性質を持つ：対称空間で Hodge-de Rham ラプラシアンの固有値は、k-形式に自然に作用する Lie 群で既約分解したときに現れる最高ウェイトのみで具体的に決定される。また、すべてのパラメータが $a_k = 1$ 場合については、この性質が起きないことを示す。

次に、$\Delta_{\mathcal{E}}$ の固有値の結果を用いて、レンズ空間上のユニモジュラーなホロノミーから誘導される平坦ベクトル束をに対して、Rumin 複体に付随する解析的捩率関数

(接触捩率関数) を Hurwitz ゼータ関数を用いて明示的に書けることを示す。接触捩率は接触捩率関数の原点での微分を用いて定義されるが、系として、接触捩率の値を決定する。特に、接触捩率を決定し、Betti 数と Ray-Singer 捩率を用いて表せることを示す。つまり、パラメータを導入することにより、問を一般のレンズ空間の場合に拡張できることを意味する。これらについては、著者が [6,7] で発表している。

最後に、一般のパラメータ $\{a_k\}$ に対する Rumin 複体に付随する解析的捩率を 3 次元および 5 次元 CR 球面上で求める。ここで、g_{std} を CR 球面上の標準計量とする。Weng と You[14] は球面 $(S^{2n+1}, 4g_{\mathrm{std}})$ の自明束に対して、Ray-Singer 捩率が $(4\pi)^{n+1}/n!$ であることを決定した。Rumin と Seshadri の 3 次元での結果により、Rumin-Seshadri 捩率はこの値に似た値になると期待されていた。しかしこの論文では、5 次元 CR 球面において Rumin-Seshadri 捩率が $(4\pi)^3 2^{-5/4+\pi^2/18}$ になるを示す。3,5 次元 CR 球面上で全てのパラメータ $\{a_k\}$ に対して解析的捩率の値を Theorem 2.1.1 で与える。

References

[1] A. Čap, J. Slovák, and V. Souček, *Bernstein-Gelfand-Geldand sequences*, Ann. of Math. **154** (2001), no. 1, 97–113.

[2] S. Dave and S. Haller, *Graded hypoelliptic of BGG sequences*, `arXiv:1705.01659` (2017).

[3] R. Forman, *Spectral sequences and adiabatic limits*, Comm. Math. Phys. **168** (1995), no. 1, 57–116.

[4] A. Ikeda and Y. Taniguchi, *Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$*, Osaka J. Math. **15** (1978), no. 3, 515–546.

[5] P. Julg and G. Kasparov, *Operator K-theory fo the group* $\mathrm{SU}(n,1)$, J. Reine Angew. Math. **463** (1995), 99–152.

[6] A. Kitaoka, *Analytic torsions associated with the Rumin complex on contact spheres*, Internat. J. Math. **31** (2020), no. 13, 2050112.

[7] ———, *Ray-Singer Torsion and the Rumin Laplacian on lens spaces*, available online at arXiv:2009.03276 (2020).

[8] R. R. Mazzeo and R. B. Melrose, *The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 1, 185–213.

[9] M. Rumin, *Formes différentielles sur les variétés de contact*, J. Differential Geom. **39** (1994), no. 2, 281–330.

[10] ———, *Differential geometry on C-C spaces and application to the Novikov-Shubin numbers of nilpotent Lie groups*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. **329** (1999), 985–990.

[11] ———, *Sub-Riemannian limit of the differential form spectrum of contact manifods*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), no. 2, 407–452.

[12] ———, *An introdoction to spectral and differential geometry in Carnot-Carathéodory spaces*, Rendiconti fdel Circolo Matematico di Palermo Serie II suppl. **75** (2005), 139–196.

[13] M. Rumin and N. Seshadri, *Analytic torsions on contact manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **62** (2012), 727–782.

[14] L. Weng and Y. You, *Analytic torsions of spheres*, Internat. J. Math. **7** (1996), no. 1, 109–125.