論文の内容の要旨

論文題目　On the epsilon factors of ℓ-adic sheaves on varieties
（多様体上の ℓ 進層のイプシロン因子について）

氏名　竹内　大智

k を正標数の完全体とする。k 上の滑らかな多様体上の ℓ 進層に対し、Beilinson[1] は特異台を構成し、Saito[4] はその上のサイクルとして特性サイクルを構成した。特性サイクルとは交点理論的に、Euler–Poincaré 標数や消失輪体複体の全次元などの分岐理論的な不変量を計算するものである。本論文では特性サイクルの精密化としてイプシロンサイクルを定義し、ℓ 進層のイプシロン因子を捉えることを目標とする。

以下では k は有限体として論じるが、Yasuda[5] や Guignard[3] で独立に定義された局所イプシロン因子を用いることにより一般の正標数完全体に拡張できる（Part II では素体上有限生成体の完全化を仮定する必要があるが、標数は 0 でもよい）。

本論文は 3 つの部分（Part I, II, III）からなる。Part I では局所イプシロン因子の連続性という性質について論じている。これは残りの部分の技術的な核心部分である。なお、この結果は Yasuda[6] を用いることにより、有限局所環係数の構成可能複体（ℓ 進層の mod ℓ^n）を扱うこともできる。

S を $\mathbb{F}_p$ 上の有限型スキームとし、次のような S 上のスキームの可換図式を考える：

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{A}^1_S \arrow[dl] \\ & & S & \end{tikzcd} \tag{1}$$

ここで X は S 上の滑らかなスキーム、Z は X の部分スキームで S 上有限と仮定する。さらに X 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ が与えられているとし、次を仮定する：

1) π は $\mathcal{F}$ に関して普遍的に局所非輪状的。

2) f は Z の外で、$\mathcal{F}$ に関して普遍的に局所非輪状的。

局所非輪状性は滑らかさの概念の位相幾何的類似である。従って (1) を、S でパラメータ付けられた、$\mathcal{F}$ に関する孤立特異点の族と見做す。S の閉点 s で底変換をすることにより有限体 $k(s)$ 上の滑らかな多様体 X_s 上の関数 $f_s\colon X_s \to \mathbb{A}^1_s$ で、Z_s の外で $\mathcal{F}|_{X_s}$ に関して普遍的に局所非輪状なものが得られる。各点 $z \in Z_s$ の像 $f(z)$ での $\mathbb{A}^1_s$ の Hensel 化を $\mathbb{A}^1_{s,(f(z))}$ と表し、剰余体の拡大 $k(z)/k(s)$ に対応するその不分岐拡大を $\mathbb{A}^1_{s,(z)}$ で表すことにする。点 z での消失輪体複体の茎は $\mathbb{A}^1_{s,(z)}$ の函数体の ℓ 進 Galois 表現を定め、その局所イプシロン因子 $\varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{s,(z)}, R\Phi_{f_s}(\mathcal{F})_z, dt) \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ が定義される。この時、次で定義される、S の閉点の集合 $|S|$ 上の函数を考える：

$$\theta_{\mathrm{ep}}\colon |S| \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times, \quad s \mapsto \prod_{z \in Z_s} (-1)^{a_z} \varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{s,(z)}, R\Phi_{f_s}(\mathcal{F})_z, dt)$$

ここで $a_z = [k(z)\colon k(s)] \cdot \mathrm{dimtot}_z(R\Phi_{f_s}(\mathcal{F})_z) = [k(z)\colon k(s)] \cdot (\dim(R\Phi_{f_s}(\mathcal{F})_z) + \mathrm{Sw}_z(R\Phi_{f_s}(\mathcal{F})_z))$ とおいた。Part I での主結果はこの函数が Artin の相互法則を満たすということである：

定理 1 S は連結とすると、次の図式を可換にする連続指標 $\rho_{\mathcal{F},t}\colon \pi_1^{ab}(S) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} {|S|} \arrow[rr, "\theta_{\mathrm{ep}}"] \arrow[dr] & & \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \\ & \pi_1^{ab}(S) \arrow[ur, "\rho_{\mathcal{F},t}"'] & \end{tikzcd}$$

ここで $|S| \to \pi_1^{ab}(S)$ は閉点をその点の定める幾何的 Frobenius 元に送る写像である。

この局所イプシロン因子の連続性は [4, 2.16] で証明された消失輪体の全次元の局所定数性、すなわち写像

$$|S| \to \mathbb{Z}, \quad s \mapsto \sum_{z \in Z_s} a_z = \sum_{z \in Z_s} [k(z) : k(s)] \mathrm{dimtot}_z (R\Phi_{f_s}(\mathcal{F})_z)$$

は局所定数、の類似である。

定理 1 の証明について説明する。論文ではより精密に、消失輪体複体の局所 Fourier 変換の「連続性」を証明する。Laumon の公式により、局所イプシロン因子は局所 Fourier 変換の行列式表現から求められるので、この「連続性」から定理 1 が従う。また、局所 Fourier 変換の階数を取ることで、全次元の局所定数性の別証明を得ることもできる。

証明では oriented product を用いた消失輪体函手の理論を用いる。oriented product を用いることにより S でパラメータ付けられた消失輪体の族を扱うことができる。具体的には $\infty_S \overleftarrow{\times}_{\mathbb{P}^1_S} \mathbb{A}^1_S$ という oriented product を考える。S が体 k のアファインスペクトラムの時は、これは射影直線 $\mathbb{P}^1_k$ の無限遠点での Hensel 化の商体のエタールトポスと標準同型で、局所 Fourier 変換はこのようなトポスの上の ℓ 進層と見做すことができる。ここでは $\infty_S \overleftarrow{\times}_{\mathbb{P}^1_S} \mathbb{A}^1_S$ をそのようなトポスの、S でパラメータ付けられた族と考え、この上にスムースな ℓ 進層を構成して局所 Fourier 変換の連続性を定式化、証明した。

Part II の結果について説明する。ここでは定理 1 の帰結として、滑らかな多様体上の ℓ 進層に対して、イプシロンサイクルを構成した。

X を有限体 k 上の滑らかな n 次元多様体、$\mathcal{F}$ をその上の ℓ 進層とし、$SS(\mathcal{F})$ を Beilinson[1] により定義された $\mathcal{F}$ の特異台とする。$SS(\mathcal{F})$ は乗法群 $\mathbb{G}_{m,k}$ の作用で閉じた、余接束 T^*X の閉部分集合で

$$SS(\mathcal{F}) = \cup_a C_a$$

を既約分解とするとき、各既約成分 C_a の次元は X の次元 n と等しい。イプシロンサイクル $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ はこの特異台に台を持つサイクルで $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に係数を持つものとして定義される：

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}) = \sum_a \xi_a \otimes [C_a] \qquad \xi_a \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

このサイクルは局所イプシロン因子に対する、Milnor 型の公式により特徴付けられる。すなわち、k 上の多様体の図式

$$X \xleftarrow{j} U \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1_k \tag{2}$$

で j はエタールで、閉点 $u \in U$ は f に関する孤立 $SS(\mathcal{F})$-特性点であるとする。この時、局所イプシロン因子 $\varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{k,(u)}, R\Phi_f(\mathcal{F})_u, dt)$ が定まる。また、微分形式 $df = f^*dt$ （t は $\mathbb{A}^1_k$ の標準座標）は u の近傍で $SS(\mathcal{F})$ とただ一点 u のみで交わるので既約成分との交点数 $(C_a, df)_u$ も定義される。

定理 2 *j がエタールであるような図式 (2) と f に関する孤立 $SS(\mathcal{F})$-特性点 $u \in U$ に対して次が成り立つ：*

$$\varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{k,(u)}, R\Phi_f(\mathcal{F})_u, dt)^{-1} = (\mathcal{E}(\mathcal{F}), df)_u^{[k(u):k]} := \prod_a \xi_a^{[k(u):k]\cdot(C_a, df)_u}$$

ただしこれは $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ の剰余群 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ での等号である。

イプシロンサイクルは特性サイクルと類似の性質を多く持っている。以下に顕著なものを 2 つ挙げる。証明は特性サイクルの場合と同様に出来る。

定理 3 *X を滑らかな n 次元多様体、$\mathcal{F}$ をその上の ℓ 進層とする。*

1) *(引き戻しとの整合性） $h \colon W \to X$ を滑らかな多様体 W からの分離的有限型射とし、properly $SS(\mathcal{F})$-transversal とする。W は m 次元であるとすると、次が成り立つ：*

$$\mathcal{E}(h^*\mathcal{F}) = h^!(\mathcal{E}(\mathcal{F})(\frac{n-m}{2}))$$

ここで $h^!$ は properly $SS(\mathcal{F})$-transversal な射に対して定義されるサイクルの引き戻しであり、$(\frac{n-m}{2})$ は Tate 捻りを表す。

2) （積公式）X が射影的とすると、次の等号が $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ で成り立つ：

$$\varepsilon(X,\mathcal{F})^{-1} = (\mathcal{E}(\mathcal{F}), T^*_X X)_{T^*X} := \prod_a \xi_a^{(C_a, T^*_X X)_{T^*X}}$$

ここで左辺の $\varepsilon(X,\mathcal{F})$ は大域イプシロン因子 $\prod_i \det(-\mathrm{Frob}_k, H^i(X_{\bar{k}},\mathcal{F}))^{(-1)^{i+1}}$ であり、右辺の $T^*_X X \subset T^*X$ は零切断である。$C_a, T^*_X X \cong X$ が共に n 次元で T^*X が $2n$ 次元であることから交点数 $(C_a, T^*_X X)_{T^*X}$ が定義される。

定理 2 の証明は特性サイクルの時と同様に行われる。主張はエタール局所的なので X は準射影的としてよい。X を十分大きな射影空間に埋め込んで作られたペンシルの普遍族に対し、定理 1 を適用する。Katz–Lang の有限性の定理より、S が正規な $\mathbb{F}_p$ 上の有限型スキームならば連続指標 $\rho\colon \pi_1^{ab}(S) \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ に対して合成 $\pi_1^{ab}(S) \xrightarrow{\rho} \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は構造射から誘導される写像 $\pi_1^{ab}(S) \to \pi_1^{ab}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p))$ を経由する。従って局所イプシロン因子は $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の世界では局所定数的に振る舞うことが分かり、定理が示される。

Part III では定理 2 の精密化を考えている。考える層 $\mathcal{F}$ を定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ に限定する代わりに局所イプシロン因子 $\varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{k,(u)}, R\Phi_f(\mathbb{Q}_\ell)_u, dt)$ を一の冪根を無視せずに正確に求める。この結果は（正標数の場合の）全次元に対する Milnor 公式の、局所イプシロン因子への精密化と見做せる。

$\mathcal{F} = \mathbb{Q}_\ell$ の時は特異台は零切断 $T^*_X X$ に等しく、定理 2 の右辺に現れる交点数 $(T^*_X X, df)_u$ は孤立特異点の Milnor 数 $\mu(f,u)$ である。古くから知られているように、Milnor 数の線形代数的精密化として、孤立特異点から k 上の対称双線型形式 $(\varphi_f, B_{f,dt})$ を構成できる。Part III ではその判別式を用いて孤立特異点の局所イプシロン因子を表示する。

まずは $(\varphi_f, B_{f,dt})$ の構成について説明する。スキームの図式 (1) を考える。ただし今回は S は正標数とは限らない一般のスキーム、X は S 上の滑らかなスキームで、Z を f の singular locus（すなわち、df と零切断の共通部分として定義される X の閉部分スキーム）とする。Z は S 上有限であると仮定する。$i\colon Z \hookrightarrow X$ を閉埋め込み、$g\colon Z \to S$、$\pi\colon X \to S$ を構造射とする。連接層に対する Grothendieck 双対の、合成との整合性より標準同型

$$g^!\mathcal{O}_S \cong i^!\pi^!\mathcal{O}_S$$

が存在する。π は滑らかなので $\pi^!\mathcal{O}_S \cong \omega_{X/S}[n]$（$\omega_{X/S}$ は標準束、$n = \dim X$）となり、i は閉埋め込みなので $\mathcal{O}_X$-加群の複体の擬同型

$$i_*g^!\mathcal{O}_S \cong i_*i^!\pi^!\mathcal{O}_S \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(i_*\mathcal{O}_Z, \omega_{X/S}[n]) \tag{3}$$

が得られる。$Z \to S$ が有限であるという仮定から局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群 $\Omega^1_{X/S}$ の切断 df から定まる Koszul 複体は $i_*\mathcal{O}_Z$ の $\mathcal{O}_X$-局所自由分解を定める。この分解を用いて (3) を計算することで次の標準的な同型を得る：

$$g_*g^!\mathcal{O}_S \cong g_*(i^*\omega_{X/S}^{\otimes 2})$$

$\varphi_f = g_*i^*\omega_{X/S}$ とおく。これは局所自由 $\mathcal{O}_S$-加群である。その上の非退化対称双線形形式 $B_{f,dt}$ を

$$\varphi_f \times \varphi_f \to g_*(i^*\omega_{X/S}^{\otimes 2}) \cong g_*g^!\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S$$

の合成で定義する。ただし最後の射 $g_*g^!\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S$ は $(g^!, g_*)$ の定める随伴の余単位射である。

k の標数が奇数の時の Part III の主結果を述べる。

定理 4 X を k 上の滑らかな n 次元多様体、$f\colon X \to \mathbb{A}^1_k$ を k 上の射とし、$x \in X$ を f の孤立特異点とする。$\mathrm{disc}B_{f,dt} \in k^\times/(k^\times)^2$ を上で定義した双線形形式 $(\varphi_f, B_{f,dt})$ の判別式とする。k の標数が奇数の時、次が成り立つ：

$$(-1)^{[k(x):k]\mathrm{dimtot}R\Phi_f(\mathbb{Q}_\ell)_x} \cdot \varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{k,(x)}, R\Phi_f(\mathbb{Q}_\ell)_x, dt) = \left(\frac{(-2)^{n\mu(f,x)}\mathrm{disc}B_{f,dt}}{k}\right) \cdot \tau_\psi^{(-1)^{n+1}n\mu(f,x)}$$

ここで $\mu(f,x)$ は Milnor 数、$\left(\frac{}{k}\right)$ は Legendre 記号、$\tau_\psi = -\sum_{a\in k}\psi(a^2)$ は局所イプシロン因子の定義で用いられた非自明加法指標 $\psi\colon k \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ の平方 Gauss 和である。

最後に k の標数が 2 の場合の結果について説明する。標数が 2 の時は Witt 環への持ち上げを考える。$W_3(k)$ を長さ 3 の Witt 環とし、

$$\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbb{A}^1_{W_3(k)}$$

を $f\colon X \to \mathbb{A}^1_k$ の持ち上げとする。すなわち $\tilde{X}$ は $W_3(k)$ 上の滑らかなスキームで $\tilde{f} \otimes_{W_3(k)} k$ が f と同型なものとする。図式 (1) で $(f, S) = (\tilde{f}, \mathrm{Spec}(W_3(k)))$ とすることで $W_3(k)$ 上の双線形形式を得、判別式を取って $W_3(k)^\times/(W_3(k)^\times)^2$ の元 $\mathrm{disc}B_{\tilde{f},dt}$ を得る。$W_3(k)^\times/(W_3(k)^\times)^2$ は

$$\alpha\colon k/\wp(k) \hookrightarrow W_3(k)^\times/(W_3(k)^\times)^2, \quad x \mapsto 1 + 4[x] \tag{4}$$

により $k/\wp(k)$ を部分加群として含むことに注意する。ここで $\wp(x) = x^2 - x$ である。

定理 5 k の標数は 2 とする。この時、$N = n\mu(f, z)$ は偶数であり、持ち上げ $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \mathbb{A}^1_{W_3(k)}$ に対して構成した $\mathrm{disc}B_{\tilde{f},dt} \in W_3(k)^\times/(W_3(k)^\times)^2$ は次を満たす。

1) $(-1)^{\frac{N}{2}}\mathrm{disc}B_{\tilde{f},dt}$ は (4) の α の像に入る。

2) $(-1)^{\frac{N}{2}}\mathrm{disc}B_{\tilde{f},dt}$ は持ち上げ $\tilde{f}$ の取り方に依らない。

従って $(-1)^{\frac{N}{2}}\mathrm{disc}B_{\tilde{f},dt}$ はただ一つの $a \in k/\wp(k)$ を用いて $(-1)^{\frac{N}{2}}\mathrm{disc}B_{\tilde{f},dt} = 1 + 4[a]$ と表せる。この a を f の Arf 不変量と呼び、$\mathrm{Arf}(f, x)$ と表す。f が非退化二次特異点の時にはこれは古典的な意味での、非退化二次形式の Arf 不変量と一致する（cf. [2]）。

この Arf 不変量を用いて、局所イプシロン因子は次のように表示できる。

定理 6 定理 4 の記号のもと、k の元の数 q は 2 の冪とする。この時、

$$(-1)^{[k(x):k]\mathrm{dimtot}R\Phi_f(\mathbb{Q}_\ell)_x} \cdot \varepsilon_0(\mathbb{A}^1_{k,(x)}, R\Phi_f(\mathbb{Q}_\ell)_x, dt)/q^{\frac{(-1)^{n+1}n\mu(f,x)}{2}}$$

は ± 1 に等しい。さらにこの符号が 1 となるのは、Arf 不変量 $\mathrm{Arf}(f, x) \in k/\wp(k)$ が自明の時、かつその時に限る。

定理 4、5、6 は Milnor 数についての帰納法で証明される。(f, x) を含む特異点の滑らかな族 (1) であって、一般のファイバーが Milnor 数が 1、2 の通常二次特異点を含むようなものを構成する。局所イプシロン因子の連続性（定理 1）等を用いることで、定理の証明を (f, x) がそのような通常二次特異点の場合に帰着でき、この場合は直接計算して確かめられる。

参考文献

[1] Beilinson, A.: Constructible sheaves are holonomic, Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), no. 4, 1797-1819.

[2] Bergé, A.-M., Martinet, J.: Formes quadratiques et extensions en caractéristique 2, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 35 (1985), no. 2, 57-77.

[3] Guignard, Q.: Geometric local epsilon factors, arXiv:1902.06523.

[4] Saito, T.: The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf, Inventiones Mathematicae, 207(2) (2017), 597-695.

[5] Yasuda, S.: Local ε_0-characters in torsion rings, J. Théor. Nombres Bordeaux 19 (2007), no. 3, 763-797.

[6] Yasuda, S.: Local constants in torsion rings, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 16 (2009), no. 2, 125-197.