論文の内容の要旨

論文題目: Feigin-Semikhatov conjecture and its applications
(Feigin-Semikhatov 予想とその応用)
氏　名: 中塚　成徳

本論文では，Feigin と Semikhatov により予想された，Lie 環 $\mathfrak{sl}_n$ とその副正則冪零元に付随する副正則 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と，スーパー Lie 環 $\mathfrak{sl}_{1|n}$ とその正則冪零元に付随する正則スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ の間の双対性を調べた．その応用として，すでに知られている $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ に関する結果を用いて，$\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ の表現論を調べた．

背景と主結果　一般に（スーパー）頂点（作用素）代数の表現論でもっとも重要なものは有理的超共形場理論を定めるもので，数学的には（自然な）表現圏が完全可約であり，代数が C_2 余有限（特に，既約表現が同型類を除いて有限個）になるものである．$\mathcal{W}$ 代数の場合，最も簡単な例はアフィン頂点代数や Virasoro 頂点代数であり，それらは無限次元 Lie 環の表現論を用いて調べられ，Wess-Zumino-Witten 模型や Virasoro ユニタリ極小系列模型として知られている．これまでに，頂点代数に付随して定義される随伴多様体の理論の登場，主許容レベルのアフィン頂点代数の表現論の整備，有限 $\mathcal{W}$ 代数の表現論の発展に伴い，スーパーではない $\mathcal{W}$ 代数の表現論は例外型 $\mathcal{W}$ 代数，特に正則 $\mathcal{W}$ 代数の場合に整備された．

その一方で，スーパー $\mathcal{W}$ 代数は超共形代数とよばれる無限次元 Lie 環を用いて調べる場合を除いて，これまでその表現論は分かっていなかった．その理由はスーパーでない場合に鍵となった上で挙げた 3 つの内容がすべて難しいからと考えられる．とくに正則スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ については $n = 2$ の場合 (このときは $\mathcal{N} = 2$ 超共形代数と呼ばれる) を除き分かっていなかった．本論文では $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と代数的に直接結びつけ，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ に関する既存の結果から，$\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ が有理的超共形場理論を定めるレベル ℓ や，そのレベルでの表現論を調べた．本論文の主結果は以下のようにまとめられる．

(1) $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ と $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ のそれぞれの Heisenberg コセット頂点代数の間の同型．
(2) $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と，ある格子スーパー頂点代数のテンソル積の，対角に埋め込まれた Heisenberg 部分代数によるコセットスーパー頂点代数と $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ の間の同型．さらに，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ を入れ替えた場合の同様の同型．
(3) $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ が正則 $\mathcal{W}$ 代数と格子頂点代数の単純カレント拡大としてかける場合の $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ に関する類似の主張．
(4) ブレイドスーパー圏 $\mathcal{C}$ とその中の単純カレント（対象）に関する基礎理論の整備及び，$\mathcal{C}$ の単純カレント拡大対象 $\mathcal{E}$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(\mathcal{E})$ ともとの圏 $\mathcal{C}$ の比較．
(5) $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ と $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ が有理的 (超) 共形場理論を定めるときの既約表現の分類および，フュージョン則の決定．

以下，それぞれの内容について詳しく述べる．

(I) Feigin-Semikhatov 予想.

副正則 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ あるいは正則スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{1|n})$ は共形次元 1 の場から生成される Heisenberg 部分頂点代数をそれぞれ持ち，それらを順に π_{H_1}，π_{H_2} とおく．一般に部分頂点代数 $W \subset V$ が与えられると，W と可換な場で生成されるコセット（スーパー）頂点代数 $\mathrm{Com}(W, V)$ が定義される．Feigin と Semikhatov により次が予想された．

予想． (Feigin-Semikhatov, 2004) 複素数の組 (k, ℓ) が関係式

$$(k+n)(\ell+n-1) = 1 \tag{1}$$

をみたし，一般のレベルにあるとき，次のコセット頂点代数の間の同型が存在する

$$\mathrm{Com}\left(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})\right) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})\right). \tag{2}$$

本論文の主結果の 1 つ目 (1) はこの予想より強い以下の定理である．

定理 A． 複素数の組 (k, ℓ) が (1) をみたし，$\left(-n + \frac{n}{n-1}, \frac{(n-1)^2}{n}\right)$ でないならば予想 (2) は正しい．更に，この同型は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ をそれらの唯一つの単純商 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と $\mathcal{W}_\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ にそれぞれ置き換えても成立する．

証明には，まず 2 つの（スーパー）$\mathcal{W}$ 代数を Miura 写像によりアフィン (スーパー) 頂点代数の部分代数として実現する (cf. Nakatsuka arXiv:2005.10472)．一般のレベルではそれらの像は遮蔽作用素の共通核として実現することができる (Genra 2017)．さらに，アフィン（スーパー）頂点代数を脇本実現 (cf. Appendix A) により自由場表示することにより，（スーパー）$\mathcal{W}$ 代数を自由場表示する．それらの Heisenberg コセット代数はこれによりある Heisenberg 頂点代数の部分代数として実現される．一般のレベルにおいてはそれらはある遮蔽作用素の共通核として特徴づけられ，Virasoro 頂点代数の場合の遮蔽作用素に関する Feigin-Frenkel 双対性を適用し一般のレベルが証明される．さらにこれらの部分代数はレベルについて連続に依存するため Heisenberg 部分代数が退化しないレベルでの同型が証明される．単純商に関する主張は「単純商ととる操作」と「Heisenberg コセットをとる操作」の可換性を証明することで得られる．また，本論文の §2 では，$\mathcal{W}$ 代数の遮蔽作用素を有限次元単純 Lie 代数の BGG 分解の射から誘導されることを示し，その自然な意味を明らかにした．

定理 A の証明と同様の議論により，次の 2 つ目の主結果が証明される．

定理 B． 複素数の組 (k, ℓ) が関係式 (1) を満たすとき以下の頂点代数の同型が存在する．

$$\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\widetilde{H}_1}, \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}\right), \tag{3}$$

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\widetilde{H}_2}, \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n}) \otimes V_{\mathbb{Z}\sqrt{-1}}\right). \tag{4}$$

ここで，V_L ($L = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\sqrt{-1}$) は格子 L に付随する格子スーパー頂点代数であり，$\pi_{\widetilde{H}_i}$ ($i=1,2$) はそれぞれ，テンソル積に対角に埋め込まれた，ある *Heisenberg* 頂点代数である．更に上の同型は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ と $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ をそれぞれの単純商に置き換えても成立する．

とくに，$n=2$ の場合は (3) は $\mathcal{N}=2$ 超共形代数の風間-鈴木コセット構成になり，(4) は Feigin-Semikhatov-Tipunin によるアフィン頂点代数 $V^\ell(\mathfrak{sl}_2)$ の逆構成になる．

さて，単純な 副正則 $\mathcal{W}$ 代数について，次の単純カレント拡大の記述が知られている (Creutzig-Linshaw arXiv:2005.10234)：

$$\mathcal{W}_{-n+\frac{n+r}{n-1}}(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_r} \mathbf{L}_{\mathcal{W}}(n\varpi_i) \otimes V_{\frac{ni}{\sqrt{nr}}+\sqrt{nr}\,\mathbb{Z}}, \quad (r \geq 3). \tag{5}$$

ここで，$\mathbf{L}_{\mathcal{W}}(n\varpi_i)$ は単純な正則 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_{-r+\frac{n+r}{n+1}}(\mathfrak{sl}_r)$ の単純カレント加群である．拡大のもととなる $\mathcal{W}_{-r+\frac{n+r}{n+1}}(\mathfrak{sl}_r)$ と $V_{\sqrt{nr}\,\mathbb{Z}}$ はそれぞれ有理的共形場理論を定める．単純カレント拡大の一般論により，上から $\mathcal{W}_{-n+\frac{n+r}{n-1}}(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ もまた有理的共形場理論を定める．（これは荒川-van Ekeren arXiv:1905.11473 による副正則 $\mathcal{W}$ 代数が有理的共形場理論を定めることの別証明を与える．）定理 B と上を組み合わせることで，次の 3 つ目の主結果が得る．

定理 C. 単純な正則スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_{-(n-1)+\frac{n-1}{n+r}}(\mathfrak{sl}_{1|n})$ は $n \geq 2$，$r \geq 3$ の時，次の単純カレント拡大の表示を持つ：

$$\mathcal{W}_{-(n-1)+\frac{n-1}{n+r}}(\mathfrak{sl}_{1|n}) \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_r} \mathbf{L}_{\mathcal{W}}(n\varpi_i) \otimes V_{\frac{(n+r)i}{\sqrt{(n+r)r}}+\sqrt{(n+r)r}\,\mathbb{Z}}. \tag{6}$$

特に，$\mathcal{W}_{-(n-1)+\frac{n-1}{n+r}}(\mathfrak{sl}_{1|n})$ は有理的超共形場理論を定める．

これは $n=2$ の場合，$\mathcal{N}=2$ 超共形代数が上のレベルで有理的超共形場理論を定めるというよく知られた結果（cf. Adamović 1999）の拡張になっている．以下，

$$\mathcal{W}^{\mathrm{sub}}_{(r)}(\mathfrak{sl}_n) := \mathcal{W}_{-n+\frac{n+r}{n-1}}(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}}), \quad \mathcal{W}_{(r)}(\mathfrak{sl}_{1|n}) := \mathcal{W}_{-(n-1)+\frac{n-1}{n+r}}(\mathfrak{sl}_{1|n})$$

とおく．

(II) 単純カレント拡大に関する一般論．

正則スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_{(r)}(\mathfrak{sl}_{1|n})$ の表現論を調べるには定理 C により単純カレント拡大に関する表現論の一般論を適用すればよい．そのためにより一般に，V を単純な CFT 型 C_2 余有限 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-graded スーパー頂点作用素代数，V_L を正定値格子 L に付随した格子スーパー頂点（作用素）代数として

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{a\in N/L} S_a \otimes V_{a+L}$$

の形をする単純カレント拡大を考える．ここで N は L を含む，L の双対格子 L' の部分格子であり，S_a は単純カレント V 加群である．このとき，スーパー頂点作用素代数 V およ

び $\mathcal{E}$ の表現圏の構造について，既約表現の同値類やそれらの間のフュージョン則（とくに Grothndieck 環 $\mathcal{K}(V)$ と $\mathcal{K}(\mathcal{E})$）は緩い条件のもと，互いにもう一方から完全に復元することができる．この事実はスーパーではない設定での有理的共形場理論の場合 (Yamauchi-Yamada 2020) また V や $\mathcal{E}$ が有理的超共形場理論を定める場合 (Creutzig-Kanade-McRae arXiv:1705.05017) では知られている．しかしながら，スーパー頂点代数の表現圏はこれまで精密に扱わられてこなかったため，その整備を行うとともに，抽象的に一般のブレイドスーパー圏およびその中の単純カレント対象，単純カレント拡大の基礎理論の整備を行い (§6，Appendix B)，上記の一般的な枠組みのもとスーパー頂点代数の表現圏に対して次の 4 つ目の主結果を得た．

定理 D. フュージョン積が完全関手の時，$\mathcal{K}(V)$ と $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ の間には次の関係がある：

$$\mathcal{K}(\mathcal{E}) \simeq \left(\mathcal{K}(V) \bigotimes_{\mathbb{Z}[N/L]} \mathbb{Z}[L'/L]\right)^{N/L}, \qquad \mathcal{K}(V) \simeq \left(\mathcal{K}(\mathcal{E}) \bigotimes_{\mathbb{Z}[N'/L]} \mathbb{Z}[L'/L]\right)^{N'/L}.$$

ここで，テンソル積は単純カレントのなす群のフュージョン積の作用，不変環をとる操作は自明なモノドロミー作用から誘導されるものである．さらに V および $\mathcal{E}$ が有理的超共形場理論を定めるとき，既約表現の同型類からなる自然な $\mathbb{Z}$ 基底をとることで，フュージョン則は上の同型により一方のフュージョン則から他方のフュージョン則が決定される．

またこのような Grothendieck 環での双対性を明示した公式はこれまでないと思われる．この定理を単純カレント拡大 (5) と (6) に適用することにより，正則 $\mathcal{W}$ 代数の Grothendieck 環に関する同型 $\mathcal{K}\left(\mathcal{W}_{-r+\frac{n+r}{n+1}}(\mathfrak{sl}_r)\right) \simeq \mathcal{K}(L_n(\mathfrak{sl}_r))$ (荒川-van Ekeren 2019, Creutzig 2019) から次の結果を得る：

定理 E. 自然数 n，r が $n \geq 2$，$r \geq 3$ を満たすとき次の自然な環同型がある*:*

$$\mathcal{K}\left(\mathcal{W}^{\mathrm{sub}}_{(r)}(\mathfrak{sl}_n)\right) \simeq \left(\mathcal{K}(L_n(\mathfrak{sl}_r)) \bigotimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r]} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{nr}]\right)^{\mathbb{Z}_r}, \; \mathcal{K}(\mathcal{W}_{(r)}(\mathfrak{sl}_{1|n})) \simeq \left(\mathcal{K}(L_n(\mathfrak{sl}_r)) \bigotimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_r]} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{(n+r)r}]\right)^{\mathbb{Z}_r}.$$

さらに，アフィン頂点代数の Grothendieck 環 $\mathcal{K}(L_m(\mathfrak{sl}_n))$ の間の Level ー Rank 双対性 (Proposition 7.1) を用いることで，次の 5 つ目の主結果を得る

系 F. 自然数 n，r が $n \geq 2$，$r \geq 3$ を満たすとき次の自然な環同型がある*:*

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}^{\mathrm{sub}}_{(r)}(\mathfrak{sl}_n)) \simeq \mathcal{K}(L_r(\mathfrak{sl}_n)), \quad \mathcal{K}(\mathcal{W}_{(r)}(\mathfrak{sl}_{1|n})) \simeq \left(\mathcal{K}(L_r(\mathfrak{sl}_n)) \bigotimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{n(n+r)}]\right)^{\mathbb{Z}_n}.$$

副正則 $\mathcal{W}$ 代数に関する主張は n が奇数の場合の既存の結果 (荒川-van Ekeren arXiv:1905.11473)，正則スーパー $\mathcal{W}$ 代数関する主張は $n = 2$ の場合の既存の結果 (Adamović 2001) の拡張にそれぞれなっている．