論文の内容の要旨

論文題目: Finite element analysis for radially symmetric solutions of nonlinear heat equations
(非線形熱方程式の球対称解に対する有限要素解析)

氏名: 中西 徹

本論文の目的は, 次の特異的な移流項を含む半線形熱方程式に対する有限要素法を研究することである.

$$u_t = u_{xx} + \frac{N-1}{x}u_x + f(u), \qquad x \in I = (0,1),\ t > 0, \tag{1a}$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1b}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in I. \tag{1c}$$

ここで, $u = u(x,t)$, $x \in \overline{I} = [0,1]$, $t \geq 0$ は求めるべき関数を表し, f は局所 Lipschitz 連続関数で, u^0 は連続関数で既知とする．本論文を通して, N は 2 以上の整数と仮定する．まず, 本研究の動機を述べる．多くの工学的な問題において, 数理モデルの空間次元はせいぜい 3 次元である．一方, 空間 4 次元以上の偏微分方程式 (PDE) の研究は数学的な興味のみから研究されるのが普通である．実際, 一般的な設定の下で問題を考えることで PDE の隠れた本質が明らかになることがある. Fujita (1966) による解の爆発に対する臨界指数の発見は典型的な成功例である. 従って, 空間一般次元の場合を数値計算によりシミュレーションができれば, 解析学の研究に寄与が可能である．しかしながら, 空間 4 次元の非定常解を計算することは最新の計算機を用いても難しい．しかし, 空間 N 次元の領域が球対称ならば, 空間 1 次元の方程式に帰着される. 特に, (1) は非線形熱方程式の球対称解が満たす方程式である.
差分法を用いた (1) の研究は Chen (1992) や Cho-Okamoto (2020) で報告されている．とくに, 最適な収束率での誤差評価が証明されている. しかし, 解の解析的な性質を維持する為に, 原点付近で特別な近似を用いている. 結果として, 空間メッシュは一様でなければならない．これは原点付近で集中化を起こすような解を捉える際には不利である.

本論文では, (1) に対する有限要素法を研究する. 空間メッシュと時間メッシュは一般のものを考える.
(1) の解は, $f(u)$ の形によっては, 有限時間で爆発する. この解の爆発と空間次元 N の関係を数値的に調べることは興味深い. そこで, 有限要素法と Nakagawa の時間刻み幅制御の技巧を組み合わせることも考える.

第 1 章では, 標準的有限要素法を考える．線形な場合（$f(u)$ を $f(x,t)$ に置き換える）に対しては, (1) に対する FEM の研究は新しい話題ではない．Eriksson&Thomée (1984) によって, 楕円型方程式に対して 2 つのスキームが提案され, 収束性が研究された. 1 つは, 対称スキームであり, 重み付き L^2 ノルムにおける最適な収束率での誤差評価が得られている. もう 1 つは, 非対称スキームであり, 最適な収束率での L^∞ 誤差評価が得られている．この章の主目的は上述の対称, 非対称スキームを (1) に適用した際の様々な最適な収束率での誤差評価を得ることである．これらのスキームは以降 (Sym), (Non-Sym) で表す．まず, (1) の 2 つの弱形式を導く．$\chi \in \dot{H}^1 = \{v \in H^1(I) \mid v(1) = 0\}$ を任意として, (1a) の両辺に $x^{N-1}\chi$ を掛けて, I 上で部分積分するこ

とで以下を得る.

$$\int_I x^{N-1} u_t \chi \; dx + \int_I x^{N-1} u_x \chi_x \; dx = \int_I x^{N-1} f(u) \chi \; dx. \tag{2}$$

一方, $x^{N-1}\chi$ の代わりに (1a) の両辺に $x\chi$ を掛け I 上で積分することで, 以下を得る.

$$\int_I x u_t \chi \; dx + \int_I [x u_x \chi_x + (2-N) u_x \chi] \; dx = \int_I x f(u) \chi \; dx. \tag{3}$$

微分作用素 $u_{xx} + \frac{N-1}{x} u_x$ に対応する双線形形式が対称なので, (2) を**対称**弱形式と呼ぶ. 一方 (3) を**非対称**弱形式という. 2 つの形式は, $N=2$ のとき同じになる. これらの性質に基づいて, 有限要素スキームを構成する. 正整数 m に対して, 節点

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$$

とし, $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $h_j = x_j - x_{j-1}$, $h = \max_{1 \le j \le m} h_j$ とおく. (ただし $j = 1, \ldots, m$ とする.) P1 有限要素空間を次で定める. ただし, $\mathcal{P}_1(J)$ は区間 J 上で 1 次多項式の集合とする.

$$S_h = \{ v \in H^1(I) \mid v \in \mathcal{P}_1(I_j) \; (j = 1, \cdots, m), \; v(1) = 0 \}. \tag{4}$$

標準的基底関数を ϕ_j $(j = 0, 1, \cdots, m-1)$ で定め, 時間離散化に関しては非一様分割を導入する.

$$t_0 = 0, \quad t_n = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j \quad (n \ge 1).$$

ここで, $\tau_j > 0$ は時間増分を表す. 一般に, $\partial_{\tau_n} u_h^{n+1} = (u_h^{n+1} - u_h^n)/\tau_n$ と書く. これから考える有限要素スキームを述べよう.

(Sym)

$$\int_I x^{N-1} \partial_{\tau_n} u_h^{n+1} \chi \; dx + \int_I x^{N-1} (u_h^{n+1})_x \chi_x \; dx = \int_I x^{N-1} f(u_h^n) \chi \; dx \quad (\chi \in S_h). \tag{5}$$

(Non-Sym)

$$\int_I x \partial_{\tau_n} u_h^{n+1} \chi \; dx + \int_I x (u_h^{n+1})_x \chi_x \; dx + (2-N) \int_I (u_h^{n+1})_x \chi \; dx = \int_I x f(u_h^n) \chi \; dx \quad (\chi \in S_h). \tag{6}$$

1.3 節では, (Sym) と (Non-Sym) に対する well-posedness を示し, 時間増分の制約の下で, (Sym) の正値性保存を示す. 1.4 節では, (Sym) と (Non-Sym) に対する誤差評価を証明する. $\bar{I} = [0,1]$ の分割 $\{x_i\}_{j=0}^m$ が準一様で, β を準一様性を表す定数とする. f が**局所** Lipschitz 連続関数のとき, $N \le 3$ ならば, 十分小さい h に対して,

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \| x^{\frac{N-1}{2}} (u_h^n - u(\cdot, t_n)) \|_{L^2(I)} \le C_1 (h^2 + \tau) \tag{7}$$

が成り立つ (Theorem 1.4.3). ここで, τ は時間刻みの最大値であり, C_1 は h, τ に依存しない定数, u_h^n は (Sym) の解である.

次に, $f(s) = s|s|^\alpha$, $\alpha \ge 1$ とし, 時間刻みを一様と仮定する. このとき, 十分小さい h に対して,

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \| u_h^n - u(\cdot, t_n) \|_{L^\infty(I)} \le C_2 \left(\log \frac{1}{h} \right)^{\frac{1}{2}} (h^2 + \tau) \tag{8}$$

が成り立つ (Theorem 1.4.6). ここで, C_2 は h, τ に依存しない定数, u_h^n は (Non-Sym) の解である. 1.5 節では, 理論的な結果を正当化するいくつかの数値例を紹介し, 1.6 節では, (Non-Sym) に対する L^∞ 誤差評価の導出に必要な不等式を示す. 1.7 節では, (Sym) に対するエネルギー汎関数の減少性を示す.

第 1 章では標準的有限要素法を考察したが, それらを爆発問題に対する Nakagawa の時間刻みの技巧へ応用するにはいくつかの障壁がある. 実際, 非対称スキームは時間刻みが一様でなければならないため, Nakagawa の時間刻みと合わせることは難しそうである. すると, 対称スキームに対して制約 $N \leq 3$ は取り除くことはできるかという問いが生まれてくる. 実際, この制約は逆不等式に由来しているので, 有限要素解の有界性を得るために必要である. この困難を克服するため, L^∞ 評価を直接得られるように離散最大値原理 (DMP) を応用する. DMP は有限要素解の非負値性に基づくため, 時間微分項の近似には集中質量近似を採用する. 重み x^{N-1} つき L^2 内積に対する標準の集中質量近似は

$$\int_I x^{N-1} wv\ dx \approx w(x_0)v(x_0)\int_0^{x_{1/2}} x^{N-1}\ dx + \sum_{i=1}^{m-1} w(x_i)v(x_i)\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} x^{N-1}\ dx$$

となる. ここで, $x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2$ とする. しかし, これを使って有限要素法の収束性を得るのは難しい. そこで, 第 2 章では特別な集中質量近似

$$\int_I x^{N-1} wv\ dx \approx \sum_{i=0}^{m-1} w(x_i)v(x_i)\int_I x^{N-1}\phi_i\ dx = \int_I x^{N-1}\Pi_h(wv)\ dx$$

を提案する. ただし, Π_h は Lagrange 補間作用素である. そして, DMP と収束性が成り立つことを証明する. さらに爆発の解析を行う.

2.2 節では, 集中質量有限要素スキームと収束性の結果を述べる. 集中質量有限要素スキームは次のように定める.

(ML–1)

$$\int_I x^{N-1}\Pi_h(\partial_{\tau_n} u_h^{n+1}\chi)\ dx + \int_I x^{N-1}(u_h^{n+1})_x\chi_x\ dx = \int_I x^{N-1} f(u_h^n)\chi\ dx \quad (\chi \in S_h). \tag{9}$$

(ML–2)

$$\int_I x^{N-1}\Pi_h(\partial_{\tau_n} u_h^{n+1}\chi)\ dx + \int_I x^{N-1}(u_h^n)_x\chi_x\ dx = \int_I x^{N-1}\Pi_h(f(u_h^n)\chi)\ dx \quad (\chi \in S_h). \tag{10}$$

(ML-1) と (ML-2) は次の正値性保存が成り立つ. f に関する基本的な仮定に加え, f が $f(0) \geq 0$ で非減少関数とする. $u_h^n \geq 0$ ならば, (ML-1) の解 u_h^{n+1} は $u_h^{n+1} \geq 0$ を満たす. 上の仮定に加え,

$$\tau \leq \frac{\beta^2}{N+1} h^2 \tag{11}$$

も仮定すれば (ML-2) の解 u_h^{n+1} も正値性を保存する. 収束性の結果を述べよう. 十分小さい h に対して,

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} \| x^{\frac{N-1}{2}}(u_h^n - u(\cdot, t_n))\|_{L^2(I)} \leq C_3(h^2 + \tau), \tag{12}$$

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} \| u_h^n - u(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(I)} \leq C_3\,(h + \tau) \tag{13}$$

が成り立つ (Theorem 2.2.4, Theorem 2.2.5). ここで, C_3 は $h,\ \tau$ に依存しない定数で, u_h^n は（ML-1）の解である.

(ML-2) に対しては, (11) が成り立っているとすれば, 十分小さい h に対して,

$$\sup_{0\le t_n\le T}\|u_h^n-u(\cdot,t_n)\|_{L^\infty(I)}\le C_4\,(h+\tau) \tag{14}$$

が成り立つ (Theorem 2.2.6). ここで, C_4 は $h,\ \tau$ に依存しない定数である.

2.3 節で証明に必要な結果を説明した後で, 2.4 節で収束の証明を行う. 2.5 節では, 爆発の解析を報告する. 以下, $f(s)=s|s|^\alpha,\ \alpha\ge 0$ とし, u_h^n は (ML–2) の解とする. 離散エネルギー関数を述べるために, 固有値問題の有限要素版を導入する必要がある.

$$\int_I x^{N-1}(\hat\psi_h)_x\chi_x\ dx=\hat\mu_h\int_I x^{N-1}\Pi_h(\hat\psi_h\chi)\ dx \quad (\chi\in S_h). \tag{15}$$

そして, $\hat\psi_h\in S_h$ を (15) の最小固有値 $\hat\mu_h>0$ に対する固有関数とする. $v\in S_h$ に対して,

$$\begin{aligned}K_h(v)&=\frac12\|x^{\frac{N-1}{2}}v_x\|_{L^2(I)}^2-\frac{1}{\alpha+2}\sum_{i=0}^m|v(x_i)|^{\alpha+2}\int_I x^{N-1}\phi_i\ dx,\\ I_h(v)&=\int_I x^{N-1}\Pi_h(v\hat\psi_h)(x)\ dx\end{aligned}$$

とおく. 近似爆発時刻 $\hat T_\infty(h)$ と時間刻み幅の上限 τ を以下で定める.

$$\hat T_\infty(h)=\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\tau_j, \tag{16}$$

$$\tau=\delta\frac{\beta^2}{N+1}h^2. \tag{17}$$

ただし, $\delta\in(0,1]$ とする. 時間増分 τ_n は以下で定める.

$$\tau_n=\tau_n(h)=\tau\min\left\{1,\frac{1}{\left\{\int_I x^{N-1}\Pi_h((u_h^n)^2)\ dx\right\}^{\frac{\alpha}{2}}}\right\}. \tag{18}$$

K_h に対する収束性の仮定の下で次を得る (Theorem 2.5.6).

$$\lim_{h\to0}\hat T_\infty(h)=T_\infty, \tag{19}$$

ただし, T_∞ は u の爆発時間とする.

一方, 別の時間増分 τ_n を次で定める.

$$\tau_n=\tau_n(h)=\tau\min\left\{1,\frac{1}{I_h(u_h^n)^\alpha}\right\}. \tag{20}$$

このとき, 近似爆発時刻の収束 (19) を得る (Theorem 2.5.7).
2.6 節では数値例を紹介し, 2.7 節で固有値問題に対する補助的な結果の証明を行う.

第 3 章では, 有限要素スキーム (ML-2) を, Cho-Okamoto (2020), Chen (1992), Groisman (2006) で提案されている時間刻みに応用し, 有限要素解の爆発点の個数や, 爆発レートに関する結果を述べる.

第 4 章では, 走化性粘菌の凝集現象を記述する Keller-Segel 方程式および単純化 Keller-Segel 方程式に対して, 球対称問題を考え, 正値性や質量保存をみたす有限要素スキームを提案し, 数値例でその妥当性を検証する.