審査の結果の要旨

氏　名　中 西　徹

偏微分方程式の近似的な数値計算に基づくコンピュータ・シミュレーションは、現代における最も強力な科学技術の一つである。その中で、有限要素法の収束解析などに代表される、数学的な立場からの計算方法の研究は、科学技術の屋台骨を支える基盤と言える。現実的な理工学の問題に現れる偏微分方程式の空間次元はせいぜい 3 である一方で、数学では、一般の空間次元を考えることが多い。これは、単なる数学的興味に留まらず、一般の空間次元を考えることで、その偏微分方程式の持つ隠れた数学的構造を明確に捉えられるからである。実際、多くの非線形偏微分方程式では、空間次元に関連した臨界現象が知られており、多くの数学者の関心をひいている。したがって、理工学を超えて、純粋数学にもコンピュータによる実験的な研究手法を提供する意味で、一般の空間次元の偏微分方程式の数値計算手法を開発することには大きな価値がある。しかしながら、現代のスーパーコンピュータをもってしても、空間 4 次元以上の時間非定常問題を計算することは困難である。一方で、非線形放物型方程式や非線形分散型方程式を考える限り、空間領域を原点対称な領域に限定して、球対称な解を考えることで、方程式は、空間 1 次元の問題に帰着される。ただし、その空間 1 次元方程式は、一般には、原点で非有界な係数をもつ。この様な問題を、差分法で研究した先行研究は散見されるが、近似性だけでなく、性質の保存のために、原点付近で作為的な近似を採用しており、結果として、空間メッシュは一様である必要がある。したがって、空間のある部分を細かく検討したい場合には、不利である。また、形の異なる方程式を扱う際の適用方法が自明でなく、個別の工夫が必要になる点も不満である。これらの難点を克服するため、本論文では一貫して、数値計算手法としては有限要素法が採用されている。

以下、各章の内容を具体的に説明する。

第 1 章では、半線形熱方程式を原点を中心とする N 次元球状領域で考え、この球対称解を計算するための有限要素法が考察されている。この方程式は、非線形性が多項式的な増大度を持つ場合、いわゆる藤田型の場合、解が有限時間で爆発することが知られている。また、爆発を特徴付ける空間次元についての様々な臨界指数が知られている。すなわち、それらの臨界現象、特に爆発現象に対する、数値計算による実験的な研究を可能にする有限要素スキームの開発と解析が最終目標である。本章では先行研究に基づき、対称スキームと非対称スキームの 2 つを提案し、様々な非線形性に応じた、詳細な誤差

評価を導出した。もっとも関心のある非線形性が局所 Lipschitz 連続関数である場合には、対称スキームでは空間次元が 3 以下の場合に、重み付き L2 ノルムに関して最適な誤差評価の証明に成功している。非対称スキームに関しては、時間刻み幅が一定であるという条件のもとで、最大値ノルムに関して最適な誤差評価が導出されている。これらの成果は、数値解析の結果として質が高い一方で、先行研究に基づくスキームでは、一般の空間次元の場合に爆発現象を数値計算することはできないことを示しており、価値がある。

第 2 章では、同様の問題を考察し、独自に集中質量近似を提案し、新しい対称スキームを考案することで、標準的なスキームの難点を全て克服した。集中質量近似自体は、時間発展方程式の有限要素解析において、よく用いられる手法であるが、変数係数の場合に、その定義は自明ではない。本章で導入された集中質量近似の定義は、球対称問題を超えて、もっと一般の変数係数の方程式に対しても適用できる優れたものである。この集中質量近似に対して、近似性能や単調性を詳細に研究し、応用として、2 つのスキーム(ML-1)と(ML-2)を提案している。(ML-1)については、一般の空間次元で重み付き L2 ノルムに関して最適な誤差評価が証明されている。(ML-2)については、一般の空間次元で最大値ノルムに関して準最適な誤差評価が証明されている。(ML-2)では、さらに、時間刻み幅を適切に選ぶことにより、解の爆発時刻が正確に近似できることが証明されている。また、これらの解析的な事実を数値計算によって検証している。

第 3 章では、藤田型方程式に第 2 章の結果を応用し、様々な時間刻み幅の設定のもとで、有限要素解の漸近挙動に関して詳細な研究がなされている。特に、一点爆発や多点爆発の結果が、空間非一様メッシュの場合に対して証明されたのは、この論文が初めてであり、価値が高い。有限次元では Type I の爆発しか起こり得ないことも、多くの数学者の予想を肯定するものであり、数学的価値が高い。また、関連した数値例を多く報告している。

第 4 章では、細胞性粘菌の凝集現象を記述する Keller-Segel 系に対して、第 2 章の結果を応用している。一般次元の問題に対して、正値性と質量保存を再現するスキームを考案し、数値計算によってその妥当性を検証している。

総括すれば、本論文で報告された結果は、それ自体の数学的な価値だけでなく、純粋数学、特に非線形偏微分方程式論に対して、数値計算による実験的な方法を提供した点においても高く評価できる。

よって、論文提出者 中西徹 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。