論文の内容の要旨

論文題目　Asymptotic analysis for solutions to semilinear heat equations
(半線形熱方程式の解に対する漸近解析)

氏　　名　向井　晨人

本論文では, 半線形放物型方程式の漸近解析及び関連する幾つかの問題について考察する. 半線形放物型方程式の典型例である藤田型方程式

$$u_t = \Delta u + u^p \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+, \quad p > 1,\, N \geq 1 \tag{F}$$

は固形燃料の燃焼現象に対する物理モデルとして知られ, 優線形な反応項 u^p は化学反応速度の温度に対する依存性（アレニウスの法則）により生ずる. 拡散項 Δu と反応項 u^p の相互作用により方程式 (F) は豊かな数学的構造を備えており, その中の一つとして知られるのが解の爆発（L^∞-ノルムの有限時刻での発散）である. 先の物理モデルの観点から見た場合, 解が爆発する時刻は固形燃料の発火した時刻を表しており, 爆発解の挙動を調べることは燃焼に至る過程の観測に対応する. 半線形熱方程式は Fujita [2] による先駆的研究の後, 数多の研究者によって膨大な数の研究成果が得られており, 爆発解の解析に於いて自然な研究対象の一つとして挙げられるのが爆発する速度の決定である. 半線形熱方程式 (F) の爆発解は遅くとも速度 $(T-t)^{-1/(p-1)}$ で発散することが知られている. この爆発速度は方程式 (F) の持つ相似性と深い関連があり, この速度での爆発は type I と呼ばれる. 又, それ以外の速度での爆発を type II と呼ぶ. Giga–Kohn '87, Giga–Matsui–Sasayama '04 は指数 p が Sobolev 劣臨界の場合に type I 爆発しか起こらないことを示した. 更に, Matano–Merle '04,'09, Mizoguchi '11 は Sobolev 優臨界且つ Joseph–Lundgren 劣臨界のとき正値球対称爆発解は全て type I 爆発であることを示した. 一方, Joseph–Lundgren 優臨界の場合には type II 爆発解の存在が知られており, その先駆的研究が Herrero–Velázquez [3, 4] である. 彼らは接合漸近展開法を用いて

$$\|u_{\ell,\mathrm{HV}}(t)\|_\infty \asymp (T-t)^{-(1+2\omega_\ell)/(p-1)} \quad \text{as} \quad t \to T$$

（但し, ω_ℓ は方程式 (F) に付随したある線形化作用素の固有値から定まる正定数）となる可算個の正値球対称 type II 爆発解の族 $\{u_{\ell,\mathrm{HV}}\}$ を構成し, 更に, $|x| = o(1)$ as $t \to T$ となる集合上での解 $u_{\ell,\mathrm{HV}}$ の漸近解析をも行った. Mizoguchi '04 は解の漸近型に一部制限を与えた状況下で証明を簡略化させ, Matano '07, Mizoguchi '11 は組み紐群理論を応用して線形化作用素の固有値が 0 を含まない場合には, 球対称 type II 爆発解の爆発速度は Herrero–Velázquez が与えた正値球対称 type II 爆発解の爆発速度のいずれかになることを示した. その後, Seki [6, 7] が Joseph–Lundgren 臨界に於ける type II 爆発解の構成,

Lepin 臨界に於ける type II 爆発解の構成をぞれぞれ行いつつ, Herrero–Velázquez [3, 4] の議論を精密化した.

方程式 (F) に於いて時間大域解の存在や type II 爆発の発現は次元 N と指数 p の関係性に依存するが, 反応項を $|x|^{2a}u^p$, $a > -1$ に取り替えた方程式

$$u_t = \Delta u + |x|^{2a}u^p \quad \text{in} \quad \big(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}\big) \times \mathbf{R}_+ \tag{PF}$$

はポテンシャル $|x|^{2a}$ の影響も受ける. 実際, Pinsky '97 は藤田指数に相当する臨界指数, Wang '93 は時間大域解の存在性に関する初期値の十分条件を a に依存する形で与えている. このポテンシャル $|x|^{2a}$ の存在は爆発現象の解析を困難にすることが多く, 爆発現象の解析において基本的な情報を与えるであろう爆発速度の研究でもそれを免れない. 実際, type I 爆発解の爆発速度は方程式 (PF) の相似性より $(T-t)^{-(1+a)/(p-1)}$ となることが想定されるが, $a = 0$ の場合と比べ type I 爆発に関する結果も不十分であり, type II 爆発解についてはその存在すら不明である.

本論文第 1 章では関行宏氏との共同研究に基づき, 方程式 (PF) に於ける未開拓領域とも言える type II 爆発解を取り扱う. 特に, 我々は Herrero–Velázquez [3] 及び Seki [6] の理論を発展させ, 方程式 (PF) における Joseph–Lundgren 優臨界, つまり $N > 10 + 8a$ 且つ

$$p > p_{\mathrm{JL}}(a) := 1 + \frac{4(1+a)}{N - 2a - 4 - 2\sqrt{(N+a-1)(a+1)}}$$

の場合に対して原点で爆発する type II 爆発解の構成及びその爆発解の詳細な漸近解析を行う.

この type II 爆発解の構成は方程式 (PF) の爆発現象の研究において基本的かつ重要な一歩となる情報を与えるが, 更に, 我々の type II 爆発解の漸近解析も原点近傍における解の漸近形を与え, $a = 0$ の場合を含めて爆発解の新しい知見を与える. この漸近解析の結果の応用として, 我々が構成した爆発解の爆発時刻に於けるプロファイルが原点の周りで特異定常解として記述できることを導く.

本論文に於ける type II 爆発解の構成は後方相似変換によって得られる非線型放物型方程式に対して接合漸近展開を行うことでなされる. 接合漸近展開法を用いるにあたり, その解析を困難にするのは

$$v_\tau = v'' + \left(\frac{N-1}{r} - \frac{r}{2}\right)v' - \frac{1}{p-1}v + \frac{C_*}{r^2}v + f(v) \quad \big(f(v):\text{非線型項}\big) \tag{LF}$$

の解の固有関数展開を行った際に現れる不安定なモードであるが, これらの問題点を回避するためには初期値関数をパラメーター付きで上手く構成することが肝要である. 更に, その上で安定なモードが type II 爆発解の詳細な漸近型を決定する様を証明する必要がある. 我々はこれらの条件をみたす解を探す第一段階として, 接合漸近展開を通して方程式 (PF) の近似解を得る（第 2 節）. 次に, 第 2 節で得た近似解から type II 爆発解を構成す

ることになるが, 第 3 節ではその準備として第 2 節で得た近似解の挙動に沿った関数空間と初期値関数の候補たり得る族をパラメータ付きで上手く設定する. 第4–6 節では type II 爆発解の先験的評価を求め, 更に, 写像度の議論により初期値に付随するパラメーターを適切に決定する. このとき, 近似解の極限として方程式 (PF) の type II 爆発解を構成及びその解の詳細な漸近挙動を得ることが可能になる.

第 2 章では, 石毛和弘氏との共同研究に基づき, 方程式 (PF) の type-II 爆発の解析にしばしば現れる逆二乗型ポテンシャル付き熱方程式

$$u_t + Lu = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}_+ \quad \text{with} \quad L := -\Delta + V(|x|) \tag{P}$$

の解に対する時間大域的漸近解析を行う. 但し, $N \geq 2$,

$$V(r) \sim \begin{cases} \lambda_1 r^{-2} & \text{as} \quad r \to 0, \\ \lambda_2 r^{-2} & \text{as} \quad r \to \infty, \end{cases} \quad \text{with} \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_* := -\frac{(N-2)^2}{4}.$$

定数 $-\lambda_*$ は Hardy の不等式の最良定数であり, 方程式 (PF) に対する Joseph–Lundgren 指数の決定に紐付く. 方程式 (P) の解の挙動にはシュレディンガー作用素 L の臨界性が関連しており, 劣臨界, 零臨界, 正臨界, 優臨界と呼ばれる 4 つの状況に分けられる. Pinchover '04 は $\lambda_1 = 0$ のときに基本解の時間大域挙動に対して大まかに類別を与え, Ishige–Kabeya–Ouhabaz [5] は劣臨界と零臨界に対して正値調和関数の無限遠点での挙動を類別及び基本解に対する上からの評価（Gauss 型評価）を与えている. 第 2 章では, 論文 [5] で与えられた基本解に対する Gauss 型評価を基に, 既存のものとは一線を画する新しい漸近解析の手法を導入することによって, 劣臨界及び零臨界の場合に於ける方程式 (P) の解の高次漸近展開を行う.

本論文第 2 章に於ける漸近解析の特徴の一つは方程式 (P) の解そのものの漸近解析を行うのではなく, 解を正値調和関数やその遠点の挙動に現れる多項式で割って得られる関数の漸近解析を行う点にある. これにより, 従来扱えずにいた零臨界の場合まで解析が可能となる. しかしながら, その弊害としてある種 "実数次元" の方程式を扱うことになるが, 解を球対称関数と球面調和関数で展開して球対称関数への議論に帰着させることでこの問題を回避する. 方程式の実数次元化は第 1 章で type II 爆発解の先験的評価を求める際にも生じており, 本博士論文を通して重要な解析手法の一つとなっている.

第 3 章では第 2 章の応用として方程式 (P) の解 u の最大点集合 (Hot Spots)

$$H(u(t)) := \left\{ x \in \mathbf{R}^N \,;\, u(x,t) = \sup_{y \in \mathbf{R}^N} u(y,t) \right\}$$

の時間大域挙動を考察する. 第 3 章は石毛和弘及び壁谷喜継の両氏との共同研究に基づく. 第 2 章に於ける解の漸近展開では主要項が球対称関数であり Hot Spots の漸近解析には第

2 章より詳細な議論が必要となる．実際, Hot Spots の漸近解析には非球対称関数がその展開に現れる（少なくとも）3 次の項まで解の漸近形を解析する必要がある．Chavel–Karp は論文 [1] において非有界領域上放物型方程式に対する Hot Spots の挙動に関して先駆的な研究を行い, 特に有界, 非負, サポートコンパクトな初期値関数 φ を持つ $\mathbf{R}^N$ 上の熱方程式に対して以下を示した：

1. $H(e^{t\Delta}\varphi)$ はすべての時刻 $t > 0$ に於いて初期値関数 φ のサポートの閉凸包に含まれる；
2. ある時刻以降 $H(e^{t\Delta}\varphi)$ は一点集合となり, その集合は滑らかな曲線に沿って動く；
3. $H(e^{t\Delta}\varphi)$ は時間大域的に初期値の重心に近づく．

方程式 (P) に於いて Hot Spots の挙動は（臨界性を含め）ポテンシャル項 V の形状により類別され, λ_1 が負の場合は解を正の方向に押し上げる力が原点に強く働く為十分時刻が経過したとき Hot Spots は原点のみとなる．一方, λ_1 が非負の場合は Hot Spots は正値調和関数の空間遠方の挙動に強く依存し, 無限遠点に逃げる, もしくは有界領域上に留まる状況が発生する．本研究では Hot Spots の逃げる速さとその方向, 個数, 漸近する点の特徴付けを行うに加え, Hot Spots が一点となり滑らかに動く為の十分条件の導出をしている．

参考文献

[1] I. Chavel and L. Karp, Large time behavior of the heat kernel: the parabolic λ-potential alternative, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 541–556.

[2] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124.

[3] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *A blow up result for semilinear heat equations in the supercritical case*, unpublished preprint.

[4] ———, *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 141–145.

[5] K. Ishige, Y. Kabeya and E. M. Ouhabaz, The heat kernel of a Schrödinger operator with inverse square potential, Proc. Lond. Math. Soc. **115** (2017), 381–410.

[6] Y. Seki, *Type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with critical Joseph–Lundgren exponent*, J. Funct. Anal. **275** (2018), 3380–3456.

[7] ———, *Type II blow-up mechanisms in a semilinear heat equation with Lepin exponent*, J. Differential Equations **268** (2020), 853–900.