論文審査の結果の要旨

論文提出者 向井晨人は、本提出博士論文において、N 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ 上の変数係数付き半線形熱方程式における type-II 爆発とよばれる爆発の型をもつ爆発解の構成とその解の漸近挙動の解析、ポテンシャル項付き熱方程式における解の高次漸近展開理論の構築およびその解の最大点挙動の分類を行った。

冪乗型非線形項をもつ半線形熱方程式、所謂、藤田型方程式

$$\partial_t u = \Delta u + |u|^{p-1}u, \qquad x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0$$

（ただし、$p > 1$）は 1966 年の藤田宏氏による時間大域可解性に関する藤田臨界指数の発見以来半世紀以上の長きに渡って多くの研究者の関心を集めてきた。特に、藤田型方程式の解は有限時間で解の L^∞ ノルムが無限に発散するという爆発現象を引き起こすことがあり、その爆発現象の解析には多くの研究者が力を注いできた。一般に、藤田型方程式の解 u が有限時間 $T > 0$ で爆発する場合、

$$\liminf_{t \to T-0} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} > 0$$

が成立することが知られる。これは解 u の L^∞-ノルムが発散する際の下からの評価を与えるが、上からの評価である

$$\limsup_{t \to T-0} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} < \infty$$

が成立する爆発を type-I 爆発という。この type-I 爆発は対応する常微分方程式や相似変換から類推できるものであるが、藤田型方程式における標準的な爆発として 1980 年代から広く研究されている。type-I 爆発以外の爆発は type-II 爆発と呼ばれ、1990 年初頭の M. A. Herrero、J. J. L. Velázquez の両氏らの研究に端を発する。彼らは $N \geq 11$ かつ

$$p > p_{\mathrm{JL}} := 1 + \frac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}}$$

の場合に type-II 爆発が起こるメカニズムを明らかにすると共に、様々な type-II 爆発解を構成とそれらの解の漸近挙動を解析した。この type-II 爆発解は様々な研究者によって詳細に研究され現在に至るが、今尚、様々な問題提起を与え続ける興味深い爆発解である。

一方、変数係数付き半線形熱方程式

$$\partial_t u = \Delta u + |x|^{2a} u^p, \qquad x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0,$$

（ただし、$p > 1$、$a > -1$）の爆発現象は変数係数 $|x|^{2a}$ に由来する困難さ故に、$a = 0$ に場合に相当する藤田型方程式と比べほとんどその解析は進んでいない。特に type-II 爆発解の研究は皆無である。本提出博士論文において、向井晨人は $N > 10 + 8a$ かつ

$$p > p_{\mathrm{JL}}(a) := 1 + \frac{4(1+a)}{N-2a-4-2\sqrt{(N+a-1)(a+1)}}$$

の場合に type-II 爆発解の構成およびその解の漸近挙動を詳細に調べることに成功した。この研究成果は接合漸近展開法を用いて得られたものであるが、その解析には爆発現象に関する深い洞察に支えられた繊細な議論が必要である。また、本提出博士論文の与えた type-II 爆発解の漸近挙動は、藤田型方程式の場合において M. A. Herrero、J. J. L. Velázquez の両氏らが与えた type-II 爆発解の漸近挙動よりも精緻であり、既存の結果よりも詳しい爆発点周りの解挙動を与えることが可能である。ここで、指数 $p_{\mathrm{JL}}(a)$ は変数係数付き半線形熱方程式を特異定常解の周りで線形化して得られる逆二次ポテンシャルをもつ熱方程式の可解性を通して Hardy の不等式の最良定数と関連し現れる。

ポテンシャル項付き熱方程式の研究では、劣臨界または零臨界となる場合における解の高次漸近理論の構築を行っている。ポテンシャル項付き熱方程式の解の漸近挙動には対応するシュレーディンガー作用素の臨界性や正値調和関数の挙動が大きく関わる。向井晨人は既存の理論を発展させ、初期関数を球対称関数と球面調和関数の積の和として表現し、球対称関数の部分が時間の変化とともにどのように変化するかを見ることによって漸近解析を行った。球対称性を利用した向井晨人の解析手法はシュレーディンガー作用素に対する正値調和関数を用いて方程式を重み付き熱方程式に変形、さらに相似変換を適応し、整数次とは限らない d 次元ポテンシャル項付き熱方程式を出現させて高次漸近解析を行うという手順を踏む。この d 次元ポテンシャル項付き熱方程式に高次漸近解析を行う手順が既存の研究と比べて新しく、向井晨人による解析手法の優位性を与える。向井晨人によるポテンシャル項付き熱方程式の解の漸近挙動の研究は画期的なものであり、既存の結果と比べてその精密さが優れている。さらに、本提出博士論文の中で向井晨人はこの漸近解析の応用としてポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動の分類を行い、シュレーディンガー作用素の正値調和関数が解の形状に影響を与える様を明らかにした。

以上より、向井晨人は本提出博士論文において今後の type-II 爆発解の研究の基礎となり得る変数係数付き半線形熱方程式における type-II 爆発解の構成およびその解の詳細な漸近挙動を得、さらに、既存の結果とは一線を画するポテンシャル項付き熱方程式の解の高次漸近挙動を明らかにしている。よって、論文提出者 向井晨人は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。