論文の内容の要旨

論文題目　On the geometry of projections of von Neumann algebras
（ von Neumann 環の射影束の幾何構造について ）

氏　　名　森 迪也

von Neumann 環に対し、その射影全体からなる順序集合は束をなす。これを射影束（projection lattice）と呼ぶ。射影束の幾何構造の研究は、von Neumann 環論の 80 年以上に及ぶ歴史において中心的な役割を果たしてきた。その証左として、von Neumann 環に関する最古の研究の一つである Murray と von Neumann による 1936 年出版の論文においても、射影束の幾何構造を用いて von Neumann 環の分類がなされたことが挙げられる。本博士論文は二つのパートからなる。それぞれにおいて、射影束の持つ特定の幾何構造に着目し、その構造に関する同型写像の記述を与えた。

Part 1 では、射影束の距離構造に関して考察した。より具体的には、射影束を単なる距離空間と考え、射影束二つのあいだの等距離全単射について調べた。射影束を連結成分に分けると、相異なる連結成分に属する射影の距離は常に 1 であることがわかる。したがって、射影束のあいだの等距離全単射を調べるには、連結成分のあいだの等距離全単射を決定することが本質となる。

有限次元 I 型因子環の場合を考えると、射影束の連結成分は、固定された階数の射影全体の集合に他ならないことがわかる。各射影をその像（Hilbert 空間の閉部分空間）と同一視すれば、連結成分は複素 Grassmann 多様体と同一視される。そこで、言葉を流用して、一般の von Neumann 環における射影束の連結成分を Grassmann 空間と呼ぶことにする。

von Neumann 環の*同型や*反同型は、明らかに Grassmann 空間の等距離全単射を与える。また、射影に対しその像の直交補空間への射影を対応させる写像も、Grassmann 空間の等距離全単射を与える。Part 1 の主定理では、逆に、Grassmann 空間二つのあいだの等距離全単射が、上に挙げた形の写像の合成・直和で表されるものに限ることを示した。

I 型因子環の場合を再考しよう。階数 1 の射影全体からなる集合は Grassmann 空間の一例である。主定理の系として、この Grassmann 空間からそれ自身への等距離全単射が、ユニタリまたは反ユニタリを用いて表されることがわかる。この事実は、Wigner のユニタリ反ユニタリ定理として古くから知られる定理である。Gehér, Šemrl は Wigner の定理の

一般化として、I 型因子環について、Grassmann 空間二つのあいだの等距離全単射を完全に決定した。Part 1 の主定理は、この結果を一般の von Neumann 環の場合まで拡張したものと見なせる。

主定理の証明においては、以下の道具を組み合わせた。

- Halmos の 2 射影定理の von Neumann 環論的解釈
- Gehér と Šemrl による Grassmann 空間上の測地線を用いるアイデア
- 羽鳥と Molnár による von Neumann 環のユニタリ群の等距離全単射に関する結果
- Dye による射影束の直交性を保つ全単射に関する定理

主定理の応用として、可換な直和成分を持たない二つの von Neumann 環の射影束が等距離であれば、それらは Jordan *同型であることがわかる。また、因子環の射影束のあいだの等距離全単射を具体的に記述すると、型によってその様相が異なることが観察される。

Part 2 においては、射影束の束（順序）構造について考察した。より具体的には、射影束を単なる束と考え、二つの射影束のあいだの束としての（あるいは順序集合としての）同型写像の特徴づけを与えた。

有限次元 I 型因子環の場合を考えよう。射影束は、有限次元複素ベクトル空間 V の部分空間全体のなす束と同一視される。このような束二つのあいだの束同型は、V が 2 次元以下の場合は面白くないが、3 次元以上であれば射影幾何学の基本定理から一般形を導くことができる。

von Neumann は 1930 年代、von Neumann 環の研究と並行して、抽象的な束や環に関する研究を深めた。特に、II_1 型 von Neumann 環の射影束を抽象化した概念である可補 modular 束という束のクラスと、（von Neumann）正則環と呼ばれる環のクラスに対応関係が成り立つことを導いた。II_1 型 von Neumann 環の射影束を考えると、対応する正則環は付属作用素全体のなす環に一致する。von Neumann の理論より、II_1 型 von Neumann 環に対し、射影束二つのあいだの束同型は、付属作用素全体のなす環の環同型（加法的かつ乗法的な全単射、但し線形とは限らない）に一対一に対応することがわかる。

しかし、有限型でない（特に III 型の）von Neumann 環については、可補 modular 束の手法は直接適用できないため、射影束の束同型の特徴づけは過去には知られていなかった。Part 2 の Theorem A では、I_1 型と I_2 型を除く一般の von Neumann 環に対し、射影束の束同型が、局所可測作用素全体のなす環の環同型に一対一に対応することを導いた。Theorem A のポイントは、付属作用素全体ではなく、局所可測な作用素を考える点である。一般の von Neumann 環の設定では、付属作用素全体のなす集合は環構造を持ちえないが、局所可測作用素全体は環の構造を持つ。一方、有限型 von Neumann 環に対しては、付属作用素は局所可測であるため、Theorem A は von Neumann の結果を拡張している。Theorem A の証明では、上記の Halmos の定理を用いて、射影束における LS 直交性という二項関係を導入した。その束論的特徴づけを与えることで、可補 modular 束に対する von Neumann による技法を、一般の von Neumann 環の射影束へ適用することが可能と

なった。Theorem A は強力であり、たとえば上に述べた Dye の定理は Theorem A の系として得られる。

Theorem A より、射影束の束同型を調べることは、局所可測作用素環の環同型を調べることと等価となる。Theorem B では、I_∞ 型および III 型の von Neumann 環について、局所可測作用素環の環同型が実*同型に相似であることを示した。これにより、I_∞ 型および III 型 von Neumann 環に対し、射影束の束同型を作用素環論的に記述できる。（一方、有限 I 型 von Neumann 環に対し、局所可測作用素環の環同型は、その中心の環同型により表される。しかし、中心の環同型には非常にワイルドな例が存在するため、作用素環論的な記述は困難である。）最終節においては、von Neumann の理論と私の成果を比較し、今後の研究の展望について述べた。