

博士論文

非線形伝達マトリックス法による
圧電材料のハイパワー特性解析

三宅 奏

目次

第 1 章 序論	1
1.1 研究背景	2
1.2 圧電材料のハイパワー特性について	6
1.3 圧電ハイパワー特性に関する先行研究	9
1.4 本研究の目的	13
1.5 本論文の構成	14
第 2 章 圧電振動の非線形モデル	17
2.1 序論	18
2.2 圧電振動の線形モデル	19
2.2.1 圧電方程式	19
2.2.2 LCR 等価回路	23
2.3 圧電振動の非線形モデルに関する先行研究	30
2.3.1 圧電体のハイパワー特性に関する先行研究	30
2.3.2 電氣的過渡応答測定	33
2.3.3 非線形 LCR 等価回路	35
2.4 高次弾性定数の導入	42
2.4.1 高次弾性に関する先行研究	42
2.4.2 高次弾性定数	47
2.5 非線形伝達マトリックス	58
2.6 結論	69
第 3 章 高次弾性定数測定による圧電非線形振動解析	72
3.1 序論	73
3.2 測定方法	74
3.2.1 アドミッタンス測定	74
3.2.2 電氣的過渡応答測定	76
3.3 測定試料	77
3.3.1 チタン酸ジルコン酸鉛	77

3.3.2 ニオブ酸カリウムナトリウム	79
3.3.3 チタン酸ジルコン酸バリウム-チタン酸バリウムカルシウム	82
3.3.4 チタン酸ビスマスナトリウムーチタン酸バリウム	83
3.3.5 ビスマス層状構造強誘電体	84
3.3.6 ニオブ酸リチウム単結晶	86
3.3.7 測定試料の特性	87
3.4 アドミッタンス測定	91
3.5 電氣的過渡応答測定	96
3.6 測定結果の考察	104
3.7 結論	112
第 4 章 圧電縦効果振動子の測定	116
4.1 序論	117
4.2 圧電縦効果での圧電非線形振動モデル	118
4.3 アドミッタンス測定による高次弾性定数の算出	127
4.4 5 次弾性項の影響についての考察	129
4.5 結論	132
第 5 章 自己発熱を考慮した圧電非線形振動モデル	134
5.1 序論	135
5.2 圧電体の物性値の温度依存性測定	136
5.3 非線形振動と温度上昇の相互影響のモデル化	143
5.4 単板振動子のアドミッタンス計算	149
5.5 単板振動子のハイパワー駆動実験	151
5.6 結論	154
第 6 章 結論	156
6.1 本論文のまとめ	157

第1章 序論

1.1 研究背景	2
1.2 圧電材料のハイパワー特性について	6
1.3 圧電ハイパワー特性に関する先行研究	9
1.4 本研究の目的	13
1.5 本論文の構成	14

1.1 研究背景

圧電材料は外部電界によって電界誘起歪みを生じる逆圧電効果、圧力によって電荷を発生する正圧電効果の電気-機械変換特性を持つ機能材料である。1880年代初めにキュリー兄弟によって圧電効果が発見されて以来、圧電材料の開拓とそのアプリケーションの探求は続いており、圧電材料はその特性を生かして、超音波モータ、圧電トランス、触覚提示デバイス、魚群探知、超音波探傷、医用超音波診断、インクジェットプリンター、エネルギーハーベスティング技術、超音波加工、MEMS アクチュエータ・センサなど幅広い分野に応用されている。このような圧電応用デバイスにおいて、圧電材料として最も広く使われているのがチタン酸ジルコン酸鉛 $\text{Pb}(\text{Zr},\text{Ti})\text{O}_3$ [PZT] 系セラミックスである。PZT 系セラミックスが用いられる理由としては、高い圧電性と、温度特性が安定であることが挙げられる。例えば PZT と同じ ABO_3 型のペロブスカイト構造を持つ圧電材料として世界で初めて発見されたチタン酸バリウム BaTiO_3 の圧電定数 d_{33} は $d_{33} = 190 \text{ pC/N}$ である一方、PZT の圧電定数は、添加物や第3成分によって様々な値をとるため一例ではあるが、 $d_{33} = 450 \text{ pC/N}$ と高い^[1-2]。また、キュリー温度 T_c (相転移によって結晶の異方性がなくなり、圧電性を喪失する温度) はチタン酸バリウムでは $T_c = 130^\circ\text{C}$ 、PZT では $T_c = 340^\circ\text{C}$ である^[1-2]。また、PZT の高い圧電特性は2つの結晶構造が共存し、結晶構造が不安定になる組成(MPB 組成)を利用したものであるが、他の材料に類を見ない特性として、温度が上昇しても MPB 組成が崩れないことが挙げられ、これにより優れた圧電性を高温まで安定して利用することができる。以上のような優れた特性に加え、原料の価格が安いこと、添加物や組成変更によって多様な応用先に即した特性を実現できることなど実用に適した理由から、圧電応用技術は PZT 系セラミックスに支えられてきた。

しかし、近年では鉛の健康被害を問題視する動きが欧州を中心に強くなっている。鉛は人体に蓄積し、多量に摂取されることで腎不全や発がんのおそれがある^[3]。2006年7月から施行された RoHS 指令では、一定量以上の鉛を含んだ電子部品は規制の対象とされている。ただし、圧電材料に関しては PZT の性能に匹敵する非鉛圧電材料が発見できておらず、現状では例外的に規制の適用を免れている。しかしながら、健康被害の可能性のあることは事実であり、鉛フリー社会の実現を目指して、近年では様々な非鉛圧電材料が活発に研究開発されてきた。これにより、新たな圧電材料(アルカリニオブ酸 $(\text{K},\text{Na})\text{NbO}_3$ 系セラミックス、チタン酸ビスマズナトリウム $(\text{Bi}_{1/2},\text{Na}_{1/2})\text{TiO}_3$ 系セラミックス等)が開発されたが、PZT に勝る圧電性・温度安定性・低コストの並立を実現できた非鉛圧電材料は未だ報告されていない。

一方で、非鉛圧電材料にもそれぞれの材料の長所があることが確認されている。特に、圧電材料を高い駆動電圧で共振駆動するハイパワー駆動の場合には、一部の非鉛圧電材料では PZT よりも高い振動速度が得られることが明らかになっている。圧電材料のハイパワー駆動時には入力電圧や内部応力の増加に伴う振動速度の飽和が問題となるが、非鉛圧電材料では振動速度が飽和しにくく、入力パワーを増加させることで大きな出力パワーを得られる可能性がある。図 1.1 は東京理科大学の Himura らによる実験結果であり、チタン酸ビスマスナトリウム($\text{Bi}_{1/2}\text{Na}_{1/2}\text{TiO}_3$)系セラミックスの特定の組成(図中 BNLKT4-8Mn0.6)では、ハード系 PZT セラミックス(図中 PZT-H)に比べ単板振動子のハイパワー駆動時の振動速度が高くなることを示している^[4]。BNLKT 振動子の振動速度の線形性もさることながら、PZT 振動子の振動速度が印加電界 $E_a = 15 \text{ V/mm}$ 付近から著しく飽和していることが見て取れる。すなわち、PZT は低電圧駆動では BNLKT に比べて高い圧電定数や Q 値を持つため振動効率に優れ、またそれらを優れた特性と評価されて圧電デバイスに広く応用されているが、高電圧駆動時にはその効率を保つことができない。

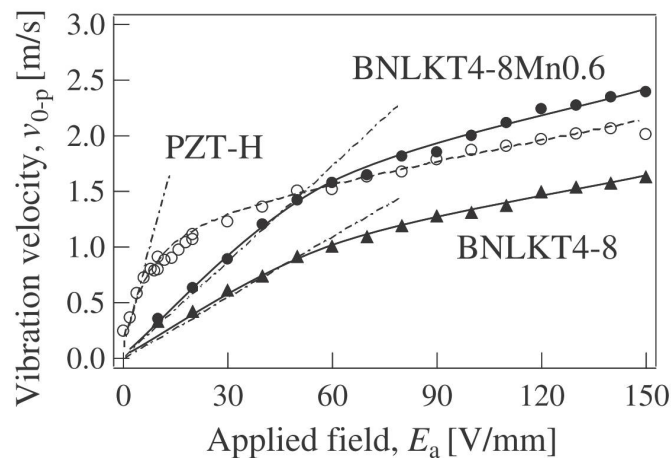


図 1.1 BNLKT4-8、BNLKT4-8Mn0.6、PZT の振動速度 v_{0-p} の印加電界 E_a 依存性^[4]

また、図 1.2 は PZT の代わりに非鉛圧電材料である LiNbO_3 単結晶を用いたランジュバン振動子である^[5]。図 1.3 に PZT を用いた場合との振動速度特性の比較を示す。こちらでも同様に、低電圧駆動では PZT を用いた場合に敵わないものの、駆動電圧が高くなるにつれて PZT の場合振動速度が急激に飽和してしまうのに対して、 LiNbO_3 では飽和せずに振動速度が増加していくことが明らかになった。



図 1.2 LiNbO₃ 単結晶を用いたボルト締めランジュバン振動子^[5]

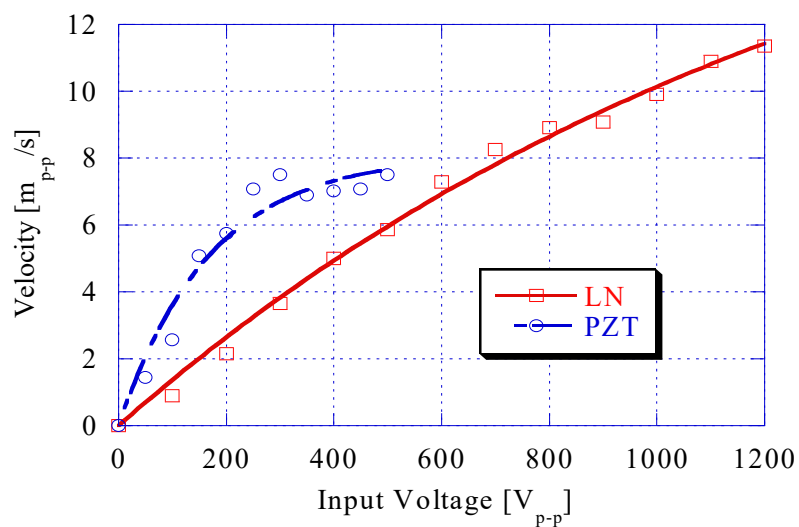


図 1.3 LiNbO₃ 単結晶と PZT セラミックスを用いたランジュバン振動子の振動速度特性^[5]

以上の例のように、ハイパワー特性は非鉛圧電材料の実用化を考える上で重要なポイントであると共に、高い圧電性・温度安定性・低コストを兼ね備えた PZT のこれまで考慮されてこなかった欠点でもある。そのため、圧電材料のハイパワー特性の検討は、環境に配慮した非鉛圧電材料の実用化に近づくと同時に、これまで 50 年以上にわたって PZT セラミックスばかりが用いられていた圧電デバイスの今以上の高性能化のために、性能の面でも圧電材料を見直す契機になると考える。

しかしながら、圧電材料のハイパワー特性については研究例が少なく、こ

れまでその要因は十分に解明されておらず、その特性の定量的な評価方法も未だ考案されていない。この理由として、圧電振動子のハイパワー駆動時には大振幅の振動による発熱が生じるため、これを切り分けた測定方法が必要であることと、圧電体は弾性的性質、誘電的性質、圧電的性質を併せ持ち、ハイパワー特性に影響を及ぼす要因を特定することが難しいことが挙げられる。上述したように、これまでは一部の研究で振動子を試作し振動速度を測定することで、圧電材料のハイパワー特性が評価されてきた。これに対して、圧電性の評価指標としては圧電定数が、温度安定性についてはキュリー温度が存在し、近年の圧電材料の研究の大部分も圧電定数やキュリー温度を上昇させることを目標に進められている。共振振動の性能を表す指標としてはエネルギーの損失しにくさを表す機械的品質係数 Q_m が存在するが、ハイパワー駆動時には Q_m も変動するため指標とならない。このように評価指標がないため、ハイパワー向け圧電材料の検討はごく少数となっているのが現状である。

以上の理由から、非鉛圧電材料のハイパワー応用分野での実用化と、それを目標とした材料開発の促進のためには、圧電材料のハイパワー特性の定量的な評価方法を考案することが求められている。

1.2 圧電材料のハイパワー特性について

前節では圧電材料のハイパワー駆動時の振動速度飽和について述べたが、そこには様々な現象が伴う。ハイパワー駆動時の圧電振動特性について、本節ではより詳しく述べる。

図 1.4 のように、板状の圧電振動子に交流電圧を印加して振動させた際のアドミッタンス曲線を図 1.5 に示す。図中の黒の曲線で描かれているのは、低電圧($500 \text{ mV}_{\text{pp}}$)で駆動した際のアドミッタンス曲線である。共振周波数付近で駆動しているため、約 35.55 kHz で振動子が共振し、アドミッタンスがピークを持っているが、これに対して、高電圧(10 V_{pp})で駆動した際には、共振周波数付近において振動状態がその周波数変化の経路に依存するようになる。そのため、図中の 10V_{pp} DOWN と 10V_{pp} UP で示したように、周波数を上昇させていった場合(UP スイープ)と、周波数を下降させていった場合(DOWN スイープ)でヒステリシスを示し、一つの駆動周波数に対して二つの振動状態を持つようになる。また、図中に矢印で示してあるように、ある周波数でアドミッタンスが急激に変化するようになり、これによって圧電体に流れる電流が急激に変化することになる。これを跳躍現象と呼ぶ^[5-7]。アドミッタンスの最大値に着目すると、 $500 \text{ mV}_{\text{pp}}$ 駆動の場合と比べて 10 V_{pp} 駆動時のアドミッタンス最大値が小さくなっている。アドミッタンスの低下は駆動電流の低下を意味し、共振近傍での駆動電流の低下は圧電振動子の振動振幅が低下していることを意味する。そのため、前節で述べたような振動速度の飽和が生じる。またアドミッタンスが最大となる共振周波数も変化しており、常に共振周波数で駆動することで最大の効率を得ている共振駆動型のデバイスでは、共振周波数を追従するなどしなければならず、またこの共振周波数は不安定で少しの周波数の変化で跳躍現象が生じるため、強力超音波デバイスの制御の上でも問題となる。

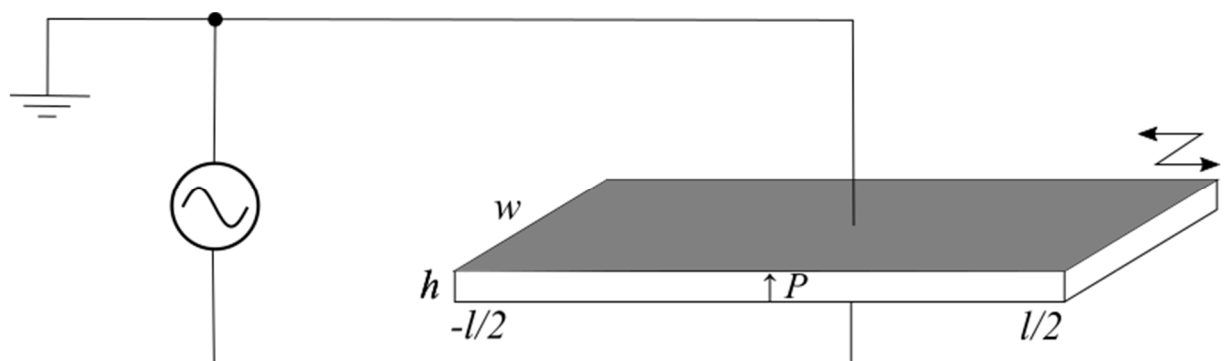


図 1.4 圧電板状振動子の図

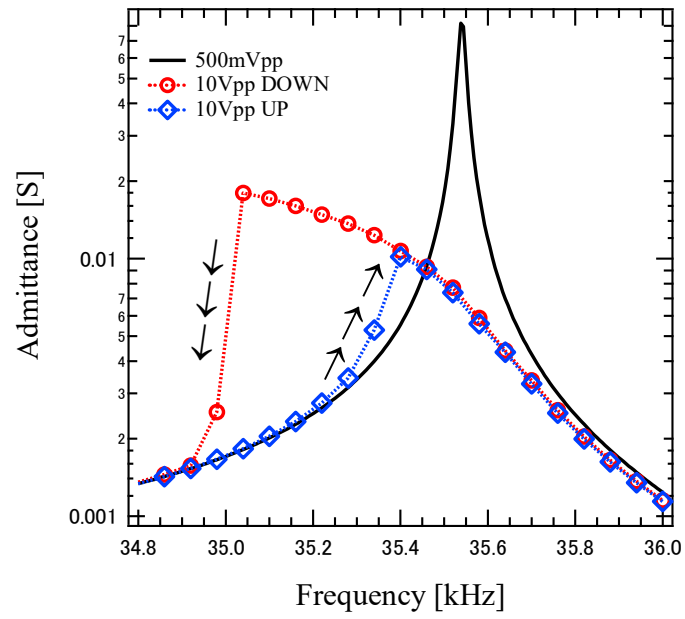


図 1.5 共振周波数周辺での圧電振動子のアドミッタンス曲線

以上のような圧電材料のハイパワー駆動に伴う現象は、これまで強誘電体の非線形現象と関連させて議論されてきた。

強誘電体材料の粉末を焼き固めて作る強誘電体セラミックスでは、代表的な非線形現象として、図 1.6 に示すような電束密度 D と電界 E の間の D - E ヒステリシスが存在する。外部電界によって結晶格子ごとに自発分極が徐々に反転していくため、このような非線形な関係が現れる。自発分極の向きは結晶格子中の正イオンと負イオンの相対的な位置によって決まり、材料としての誘電率、圧電定数、弾性定数等の物性値は様々な分極方向を持った結晶の集まりとして発現するため、強誘電体は外部電界によって誘電率や圧電定数、弾性定数などが変化する。以上のような非線形現象が存在することは広く知られており、ハイパワー駆動時にも非線形現象が影響を及ぼしていると考えられてきた。

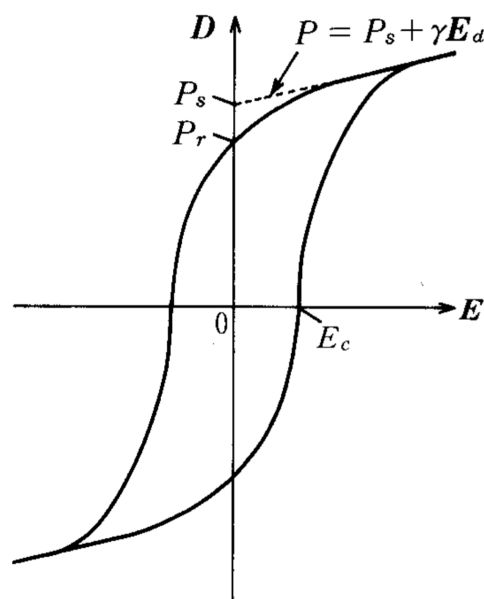


図 1.6 強誘電体の D - E ヒステリシス曲線^[6]

1.3 圧電ハイパワー特性に関する先行研究

前節で述べたように、圧電体のハイパワー駆動時に引き起こされる非線形現象については、 D - E ヒステリシスと同じく、圧電体内部の自発分極が原因と考えられてきた。しかし近年、圧電体の電気端子を短絡し機械的な振動を測定する電氣的過渡応答測定法を用いた圧電材料のハイパワー特性測定により、ハイパワー駆動時の非線形振動には誘電率の非線形性、圧電定数の非線形性に比べ、弾性定数の非線形性の影響が大きいことが明らかとなった^[7]。これは、ハイパワー駆動には共振周波数での駆動を行うため、比較的低い印加電界で大振幅の振動を励振することができることによる。圧電材料に分極反転を引き起こすほどの高電界がかかっていないため、誘電率や圧電定数は変化しないが、大振幅で振動することによって、歪み一応力間には非弾性的な関係を想定する必要が生じる。例えば、PZT の場合では印加電界 5kV/m でも上述したようなアドミッタンスのヒステリシスなどが生じるが、これに比べて PZT の抗電界(外部電界と逆向きの分極が反転する電界)は数 kV/mm と非常に高い。Y. Liu らは誘電率と圧電定数を定数とし、高次弾性のみを考慮したシンプルな等価回路モデルを用いて、ハイパワー駆動時のアドミッタンスカーブのヒステリシスや跳躍現象を説明することに成功している^[8-9]。図 1.7 に等価回路モデルを、図 1.8 にアドミッタンス測定結果と等価回路モデルによる計算結果を示す。この等価回路モデルについては 2 章でも詳しく説明を行うが、高次弾性を考慮するため等価ダンパ定数 r と等価弾性コンプライアンス s を振動速度に依存した非線形パラメータとし、上述の理由により誘電率や圧電定数は変化しないとして、誘電的性質を表す制動容量 C_d 、圧電的性質を表す力係数 A は定数としている。

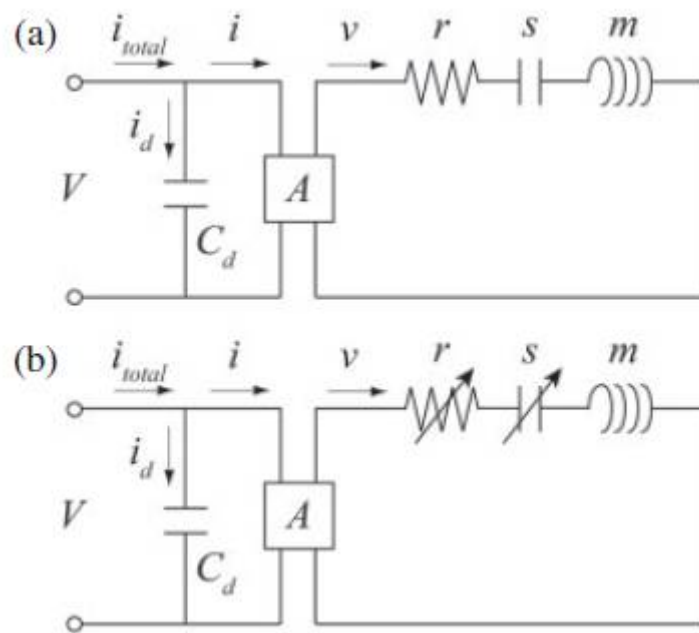


図 1.7 圧電振動子の等価回路：(a)低電圧駆動の場合(b)高電圧駆動の場合^[8]

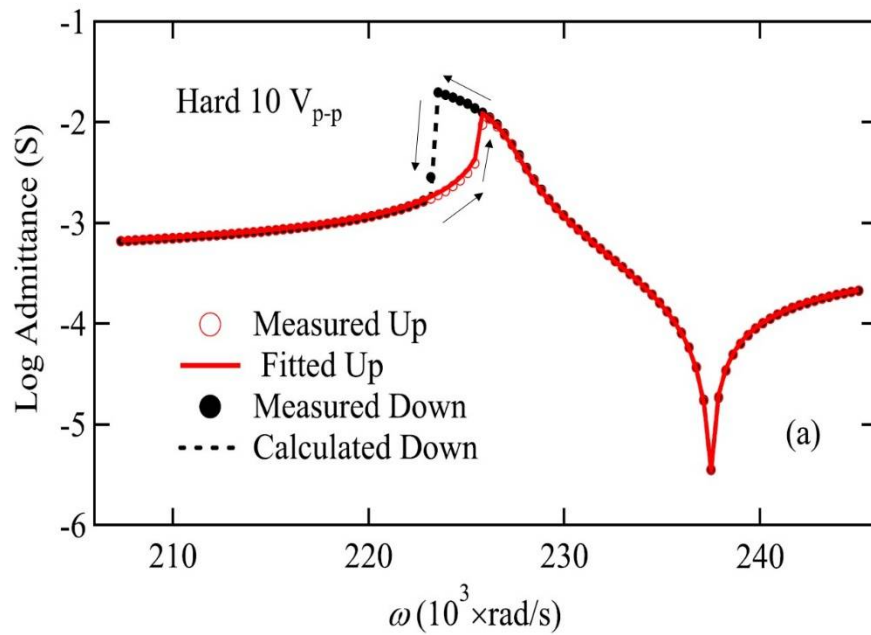


図 1.8 測定されたアドミッタンス曲線と等価回路モデルによる計算結果^[9]

以上のような研究成果によって、ハイパワー駆動時には誘電率や圧電定数の変化を考慮する必要がない一方で、歪み一応力間には非線形な関係を想定する必要があることが明らかとなった。しかし、前述したような等価回路を用いる手法の場合には、集中定数系のモデルであるために、非線形振動に加えて重大な問題となる自己発熱を考慮することができない。

圧電振動子が大幅で振動した場合、図 1.9 に示すように歪み分布に応じた発熱が生じる。このような発熱は圧電材料の振動損失を増加させ、損失の増加によってさらに発熱量が増加していき、図 1.10 に示すように急激な発熱へとつながる。これにより、発熱は非線形振動と同様に、振動効率の低下および振動速度の飽和を引き起こす。しかし、ハイパワー駆動時の発熱による振動効率低下のメカニズムについても、未だ明らかにされていない。これも非線形振動と発熱が同時に生じることが困難さとなっている。

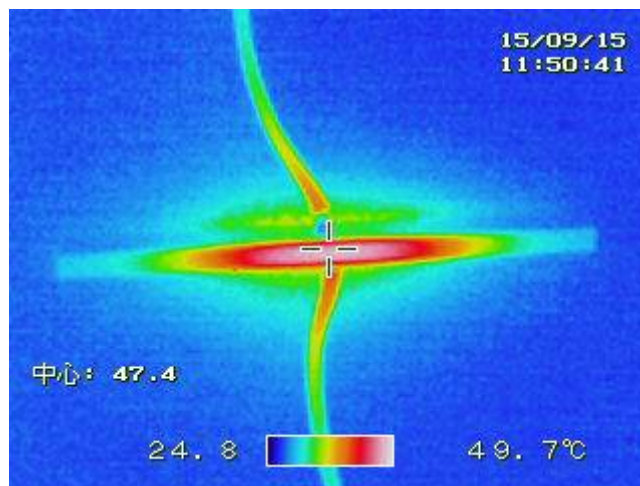


図 1.9 圧電振動子の自己発熱

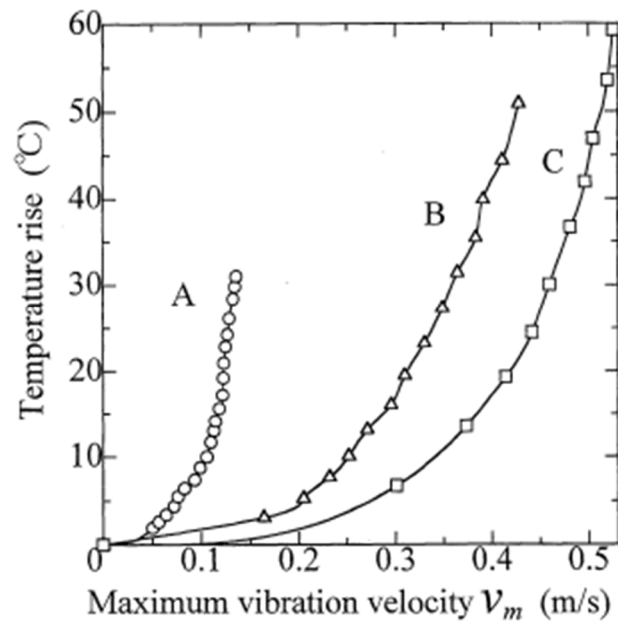


図 1.10 圧電振動子の温度上昇^[10]

1.4 本研究の目的

非線形振動と自己発熱の2つの要因が影響を与える圧電材料のハイパワー特性を評価するためには、まず双方の現象をモデル化する必要がある。そこで本研究では、高次弾性定数を圧電方程式に導入し、要素分割での非線形振動モデルとして、非線形伝達マトリックスを導出することを目指す。前述した等価回路と同様の非線形振動解析を要素分割で行うことができれば、温度分布が発生した場合でも計算が可能になるためである。

また、要素分割での非線形振動のモデルを構築することができれば、等価回路では不可能であった圧電デバイスの設計・解析も可能になる。圧電デバイスは、現状では歪み一応力間の線形関係を想定した有限要素法によって設計されているが、ハイパワー駆動時のデバイスの実際の特性はこのような手法で計算された特性とは全く異なる。非線形振動や発熱の影響を考慮しなければ、共振周波数が変化し、損失の増加によって想定していたよりも低い出力パワーしか得られない。また、実際のデバイスでは圧電材料は様々な材料と接続され、予圧の影響下や様々な境界条件の下で駆動されるが、その際にハイパワー特性にどのような影響が表れるかも明らかにされておらず、このような外部の要因がハイパワー特性に与える影響を明らかにすることで、圧電デバイスの性能向上につながると期待される。以上のような理由から、ハイパワー特性を考慮したデバイス設計手法の確立も課題となっている。最終的には、高次弾性を考慮した非線形有限要素法が確立され、有限要素法ソフトウェア上で設計を行えるようになることが求められているが、本研究ではその第一歩として、圧電振動子の非線形振動を要素分割で計算し、振動モードの解析などができる手法を開発する。

圧電効果の発見以降、圧電材料は様々な組成が研究・開発されてきたが、このような高次弾性定数の測定はほぼなされていない。そこで本研究では、圧電材料での高次弾性定数を測定する方法を考案し、それを用いてハイパワー駆動時の特性を評価する方法を考案する。これまで、圧電材料の開発においては圧電定数が評価指標とされてきた。しかし、圧電定数は圧電材料を直流駆動した場合の歪みの大きさを表す指標であり、共振駆動するデバイスには適していない。よって、本研究ではハイパワー特性の定量的な評価方法を考案することで、これまで評価されてこなかったハイパワー特性という側面から非鉛圧電材料の再評価を行い、今後のハイパワー向け圧電材料開発の指針を示すことで圧電材料の特性向上に貢献することを目的とする。

1.5 本論文の構成

本論文は以下のような構成になっている。

まず第1章で本研究の研究背景並びに研究目的について説明した。

第2章では、まず圧電振動を論ずるための基礎となる理論と、従来の非線形振動解析手法について述べる。次に、高次弾性定数を圧電方程式に導入することで非線形現象が説明できることを述べ、非線形伝達マトリックスの導出と計算手法について論じる。

第3章では、高次弾性定数を評価指標とした圧電材料の非線形振動特性の定量的評価方法について述べ、組成や添加物の異なる材料を提案手法で比較することにより、ハイパワー特性に優れる圧電材料の開発指針を明らかにする。

第4章では、圧電縦効果での高次弾性定数測定の方法について述べる。

第5章では、非線形伝達マトリックスと熱伝導方程式を用いて、非線形振動と発熱の相互影響をモデル化する手法について述べる。

第6章では、本論文の結果をまとめ、結論を述べる。

参考文献

- [1] (株)ティー・アイ・シー 編集部：“注目の誘電体セラミックス材料(1) シリーズ「ナノからテラへ」 応用に根ざした非鉛圧電材料の設計”, ティー・アイ・シー, 2014
- [2] 中村僖良(監修): “圧電材料の高性能化と先端応用技術”, サイエンス&テクノロジー, 2007
- [3] 内山巖雄, 東賢一: “環境中の鉛による健康被害について”, モダンメディア, 55 巻 4 号, pp.91-98, 2009
- [4] Y. Himura, T. Watanabe, H. Nagata and T. Takenaka: “Piezoelectric Properties of $(\text{Bi}_{1/2}\text{Na}_{1/2})\text{TiO}_3$ -Based Solid Solution for Lead-Free High Power Applications”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol.47, No. 9, pp.7659-7663, 2008
- [5] 五十部学, 前田孝文, 森田剛, Peter Bornmann, Tobias Hemsel: ” LiNbO_3 単結晶を用いた高温対応振動子に関する研究”, 2011 年度精密工学会秋季大会学術講演会, pp.573-574, 2011
- [6] 株式会社富士セラミックス: "圧電セラミック テクニカル・ハンドブック"
- [7] M. Umeda, K. Nakamura and S. Ueha: “The Measurement of High-Power Characteristics for a Piezoelectric Transducer Based on the Electrical Transient Response”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol.37, pp.5322-5325, 1998
- [8] Y. Liu, R. Ozaki and T. Morita: “Investigation of nonlinearity in piezoelectric transducers”, *Sensors and Actuators A*, Vol.277, pp.31-38, 2015
- [9] Y. Liu and T. Morita: “Simplified determination of nonlinear coefficients in piezoelectric transducers”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol.54, 10ND01, 2015
- [10] S. Tashiro, M. Ikehiro and H. Igarashi: “Influence of Temperature Rise and

Vibration Level on Electromechanical Properties of High-Power Piezoelectric Ceramics”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 36, pp. 3004-3009, 1997

第2章 圧電振動の非線形モデル

2.1 序論	18
2.2 圧電振動の線形モデル	19
2.2.1 圧電方程式	19
2.2.2 LCR 等価回路	23
2.3 圧電振動の非線形モデルに関する先行研究	30
2.3.1 圧電体のハイパワー特性に関する先行研究	30
2.3.2 電氣的過渡応答測定	33
2.3.3 非線形 LCR 等価回路	35
2.4 高次弾性定数の導入	42
2.4.1 高次弾性に関する先行研究	42
2.4.2 高次弾性定数	47
2.5 非線形伝達マトリックス	58
2.6 結論	69

2.1 序論

前章において、非鉛圧電材料のハイパワー応用分野での実用化や強力超音波デバイスの性能向上のため、ハイパワー駆動条件下での圧電振動特性を定量的に評価する手法が必要であることを述べた。

これまで、圧電振動による自己発熱と非線形圧電振動を切り離して測定・解析するための手法として、電氣的過渡応答測定法や非線形 LCR 等価回路による検討が行われてきた。しかし、実際の駆動に際しては発熱は避けられない問題である。また、等価回路を用いた手法では境界条件が限定されるため、圧電デバイスのような複雑な構造の解析は困難であった。そこで本研究では、要素分割で非線形振動を考慮できるよう、非線形伝達マトリックスを考案した。これにより、より実際のハイパワー駆動条件に近い解析を行うことが可能になる。

本章では、まず圧電振動を論じるために必要な一般的な線形圧電振動の理論として、圧電方程式と LCR 等価回路について述べる。さらに、先行研究で提案されている非線形振動の解析手法について述べた後、非線形伝達マトリックスについて論じる。

2.2 圧電振動の線形モデル

本節では、圧電振動を取り扱うための基本的な手法として、圧電方程式と LCR 等価回路について述べる。

2.2.1 圧電方程式

非圧電体の場合、応力 \mathbf{T} と歪み \mathbf{S} の関係はスティフネス $[\mathbf{c}]$ を用いて

$$\mathbf{T} = [\mathbf{c}]\mathbf{S} \quad (2-1)$$

となる。ここで、応力 \mathbf{T} と歪み \mathbf{S} は図 2.1 のような向きで各成分が構成され

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

とする。

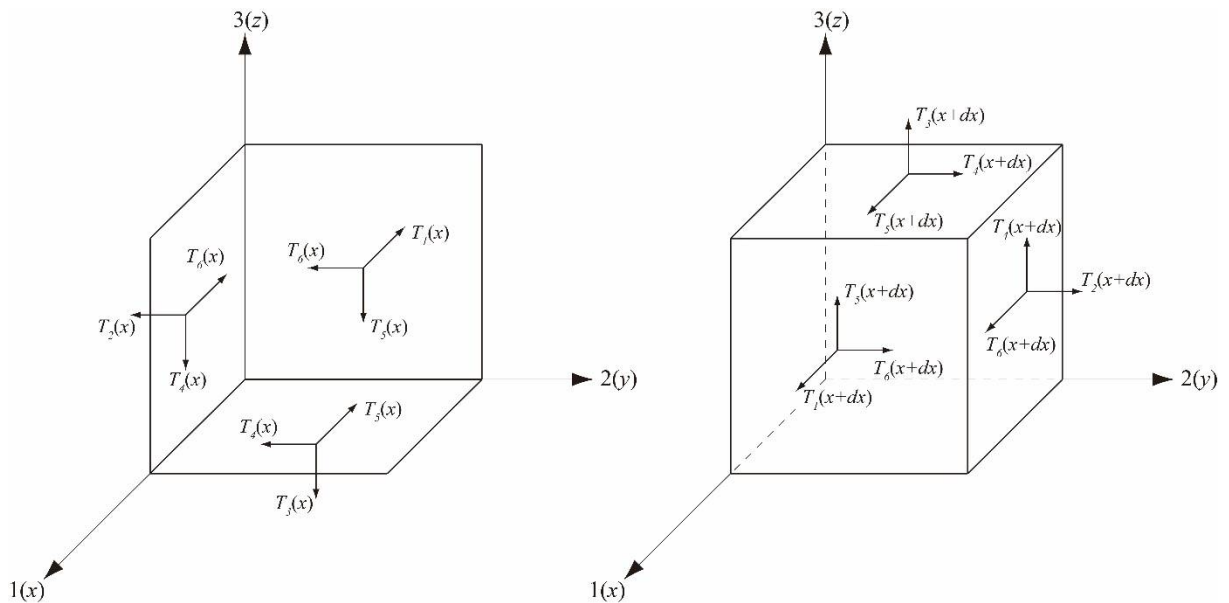


図 2.1 応力の向き

スティフネス $[c]$ は

$$[c] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

とする。

また、電束密度 \mathbf{D} と電界 \mathbf{E} の関係は誘電率 $[\varepsilon]$ を用いて

$$\mathbf{D} = [\varepsilon] \mathbf{E} \quad (2-5)$$

となる。ここで電束密度 \mathbf{D} と電界 \mathbf{E} は各軸方向の成分を持ち、

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

とする。

誘電率 $[\varepsilon]$ は

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

とする。

圧電体の場合、圧電効果によって電束密度 \mathbf{D} 、電界 \mathbf{E} と応力 \mathbf{T} 、歪み \mathbf{S} が相互に影響を与える。すなわち、非圧電体での(2-1)の関係式は圧電定数 $[e]$ を用いて

$$\mathbf{T} = [c^E] \mathbf{S} - [e_t] \mathbf{E} \quad (2-9)$$

と表される。ただし、圧電定数 $[e]$ は

$$[e] = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

となっており、 $[e_t]$ は $[e]$ の転置であることを表す。

また、歪み \mathbf{S} によっても電束密度 \mathbf{D} が生じる為、非圧電体での(2-5)の関係式は同様に圧電定数 $[e]$ を用いて

$$\mathbf{D} = [e] \mathbf{S} + [\varepsilon^S] \mathbf{E} \quad (2-11)$$

と表され、(2-9)と(2-11)の2式を合わせて圧電方程式と呼ぶ^[1]。右辺のスティフネスと誘電率には測定条件を示す添え字が付けられている。それぞれス

ティフネス $[c^E]$ は電界 \mathbf{E} 一定、誘電率 $[\varepsilon^S]$ は歪み \mathbf{S} 一定で測定した誘電率であることを表す。

式(2-9)(2-11)は圧電定数として $[e]$ を用いているため、 $[e]$ 形式と呼ばれる。さらにこの2式は式変形を行うことにより次のように書き換えられる。

$$\begin{cases} \mathbf{S} = [s^E]\mathbf{T} + [d]\mathbf{E} \\ \mathbf{D} = [d]\mathbf{T} + [\varepsilon^T]\mathbf{E} \end{cases} \quad (2-12)$$

$$\begin{cases} \mathbf{S} = [s^D]\mathbf{T} - [g]\mathbf{D} \\ \mathbf{E} = -[g]\mathbf{T} + [\beta^T]\mathbf{D} \end{cases} \quad (2-13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T} = [c^D]\mathbf{S} + [h]\mathbf{D} \\ \mathbf{E} = -[h]\mathbf{S} + [\beta^S]\mathbf{D} \end{cases} \quad (2-14)$$

ただし $[s]$ は弾性コンプライアンス、 $[\beta]$ は逆誘電率であり、添え字は測定条件を表す。それぞれ圧電定数として $[d]$ 、 $[g]$ 、 $[h]$ を用いており、上から $[d]$ 形式、 $[g]$ 形式、 $[h]$ 形式と呼ばれる。

また、3軸方向に分極処理された圧電セラミックスの場合、数種類の成分については打ち消されるため、スティフネス $[c]$ は

$$[c] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

誘電率 $[\varepsilon]$ は

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

圧電定数 $[e]$ は

$$[e] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

と表される^[2]。 $[s]$ 、 $[\beta]$ 、 $[d]$ 、 $[g]$ 、 $[h]$ も同様に、

$$[s] = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

$$[\beta] = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

$$[d] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

$$[g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{24} & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

$$[h] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{24} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

と表される。

2.2.2 LCR 等価回路

圧電体の振動について、本研究では板状振動子で測定が行いやすい圧電横効果(31 効果)と、実用上用いられることの多い圧電縦効果(33 効果)に着目する。そこで本節では、圧電横効果の振動について述べ、圧電体の基本的な性質を理解するために有用であり、非線形 LCR 等価回路の基礎となる LCR 等価回路を導出する。圧電縦効果については第 4 章にて詳しく述べる。

図 2.2 に示すような幅 w 、高さ h 、長さ l の厚み方向に分極処理された振動子の分極に沿う方向に電圧を印加し、両端自由で長手方向に励振する。

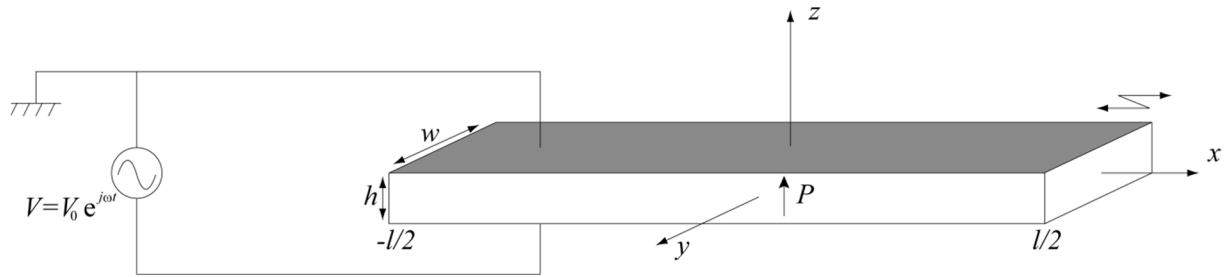


図 2.2 圧電横効果の振動の図

圧電横効果振動の波動方程式を考える。圧電方程式として d 形式(2-12)を採用すると、長手方向(1 方向)の長さに対して幅(2 方向)、厚み(3 方向)は十分小さいので、 $T_2 = T_3 = 0$ とでき、式(2-16)(2-18)(2-20)から、テンソルの成分が 0 でない部分を抜き出すと

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} T_1 + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{cases} \quad (2-23)$$

となる。これを用いて e 形式への変換を行うと、

$$\begin{cases} T_1 = \overline{c_{11}^E} S_1 - \overline{e_{31}} E_3 \\ D_3 = \overline{e_{31}} S_1 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \end{cases} \quad (2-24)$$

となる。ただし、

$$\overline{c_{11}^E} = \frac{1}{s_{11}^E} \quad (2-25)$$

$$\overline{e_{31}} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \quad (2-26)$$

$$\overline{\varepsilon_{33}^S} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad (2-27)$$

である。圧電体の微小部分の運動方程式を考えると、 u を x 軸方向の変位と

して、

$$\rho wh dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = wh \{T_1(x+dx) - T_1(x)\} = wh \frac{\partial T_1}{\partial x} dx \quad (2-28)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_1}{\partial x} \quad (2-29)$$

となる。ここで、右辺の T_1 に圧電方程式(2-24)の上式を代入して、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \overline{c_{11}^E} \frac{\partial S_1}{\partial x} - \overline{e_{31}} \frac{\partial E_3}{\partial x} \quad (2-30)$$

となる。ここで、長手方向(x 軸方向)に電界 E_3 は一様に分布する(すなわち $\frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$)ことを用いると、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \overline{c_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-32)$$

$$\text{ただし } c = \sqrt{\frac{\overline{c_{11}^E}}{\rho}}$$

として圧電横効果の波動方程式が得られる。

また、印加電圧 $V = V_0 e^{j\omega t}$ のとき、

$$E_3 = \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \quad (2-33)$$

として電界 E_3 が求められる。

次に振動変位を表す式を求める。波動方程式(2-32)の一般解は、

$$u(x, t) = \{A \cos kx + B \sin kx\} e^{j\omega t} \quad (2-34)$$

$$\text{ただし } k = \frac{\omega}{c}$$

となる。境界条件は両端自由であるため、 $T_{1(x=-\frac{1}{2})} = T_{1(x=\frac{1}{2})} = 0$ となるように

定数 A 、 B を決定すればよく、圧電方程式(2-24)より、

$$\begin{aligned} T_1 &= \overline{c_{11}^E} S_1 - \overline{e_{31}} E_3 \\ &= \overline{c_{11}^E} \frac{\partial u}{\partial x} - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \\ &= \overline{c_{11}^E} k \{-A \sin kx + B \cos kx\} e^{j\omega t} - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2-35)$$

となるので、

$$T_{1(x=-\frac{1}{2})} = \overline{c_{11}^E} k \left\{ A \sin \frac{kl}{2} + B \cos \frac{kl}{2} \right\} e^{j\omega t} - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} = 0 \quad (2-36)$$

$$T_{1(x=\frac{l}{2})} = \overline{c_{11}^E} k \left\{ -A \sin \frac{kl}{2} + B \cos \frac{kl}{2} \right\} e^{j\omega t} - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} = 0 \quad (2-37)$$

より、定数 A、B はそれぞれ

$$A = 0 \quad (2-38)$$

$$B = \overline{e_{31}} \frac{V_0}{\overline{c_{11}^E} k h \cos \frac{kl}{2}} \quad (2-39)$$

となるので、式(2-34)に代入して、振動変位は

$$u(x, t) = \overline{e_{31}} \frac{1}{\overline{c_{11}^E} k h \cos \frac{kl}{2}} \sin kx V_0 e^{j\omega t} \quad (2-40)$$

と表される。このとき、右辺分母に着目すると、

$$\cos \frac{kl}{2} = 0 \quad (2-41)$$

が成り立つとき、すなわち

$$\frac{kl}{2} = \frac{\omega l}{2c} = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (2-42)$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{l} \quad (2-43)$$

で表される駆動角周波数において、振動変位は無限大となり、圧電体は共振振動する。

次にアドミッタンスを導出する。圧電方程式(2-24)および式(2-33)より、

$$\begin{aligned} D_3 &= \overline{e_{31}} S_1 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \\ &= \overline{e_{31}} \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\varepsilon_{33}^S} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2-44)$$

である。ここで式(2-40)を代入して、

$$D_3 = \overline{e_{31}}^2 \frac{1}{\overline{c_{11}^E} h \cos \frac{kl}{2}} \cos kx V_0 e^{j\omega t} + \overline{\varepsilon_{33}^S} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \quad (2-45)$$

となる。したがって圧電体に流れる電流 I は、

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} D_3 dx dy \\
 &= j\omega \left\{ \frac{\overline{e}_{31}^2}{c_{11}^E h \cos \frac{kl}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (\cos kx) dx dy + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{\overline{\varepsilon}_{33}^S}{h} dx dy \right\} V_0 e^{j\omega t} \\
 &= j\omega \left\{ \frac{2\overline{e}_{31}^2}{c_{11}^E h \cos \frac{kl}{2}} \frac{w}{k} \sin \frac{kl}{2} + \frac{\overline{\varepsilon}_{33}^S}{h} wl \right\} V_0 e^{j\omega t} \\
 &= \left\{ j \frac{2\overline{e}_{31}^2 w}{\rho ch} \tan \frac{kl}{2} + j\omega \frac{\overline{\varepsilon}_{33}^S}{h} wl \right\} V_0 e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{2-46}$$

となる。ここで $c = \sqrt{\frac{c_{11}^E}{\rho}}$ および $k = \frac{\omega}{c}$ の関係式を用いた。よってアドミッタンス Y は、

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{I}{V} \\
 &= j \frac{2\overline{e}_{31}^2 w}{\rho ch} \tan \frac{kl}{2} + j\omega \frac{\overline{\varepsilon}_{33}^S}{h} wl \\
 &= Y_m + j\omega C_d
 \end{aligned} \tag{2-47}$$

$$\text{ただし } Y_m = j \frac{2\overline{e}_{31}^2 w}{\rho ch} \tan \frac{kl}{2}, \quad C_d = \frac{\overline{\varepsilon}_{33}^S}{h} wl$$

となる。 Y_m は動アドミッタンスと呼ばれ、圧電体の振動により生じるアドミッタンスを表す。 C_d は制動容量と呼ばれ、歪みを一定にした状態で圧電体をキャパシタとして見た際の容量であり、誘電体としての性質由来のアドミッタンスを表す。

ここで、 $\tan \frac{kl}{2}$ のローラン展開を考えると、

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{kl}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}{kl} - \frac{kl}{4}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{(2n-1)^2 \pi^2 c}{4} \frac{\omega l}{\omega l} - \frac{\omega l}{4c}}
 \end{aligned} \tag{2-48}$$

となることから、アドミッタンス Y は

$$\begin{aligned}
Y &= j \frac{2\overline{e}_{31}^2 w}{\rho c h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{(2n-1)^2 \pi^2 c}{4} \frac{\omega l}{\omega l} - \frac{\omega l}{4c}} + j\omega C_d \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{(2n-1)^2 \pi^2 \rho c^2 h}{j\omega 8\overline{e}_{31}^2 w l} + j\omega \frac{\rho h l}{8\overline{e}_{31}^2 w}} + j\omega C_d \\
&= (2\overline{e}_{31} w)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{j\omega \frac{2l}{(2n-1)^2 \pi^2 c_{11}^E w h}} + j\omega \frac{\rho w h l}{2}} + j\omega C_d \\
&= A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{s_n}{j\omega} + j\omega m} + j\omega C_d
\end{aligned} \tag{2-49}$$

と表すことができる。

ただし

$$A = 2\overline{e}_{31} w \tag{2-50}$$

$$\frac{1}{s_n} = \frac{2l}{(2n-1)^2 \pi^2 c_{11}^E w h} \tag{2-51}$$

$$m = \frac{\rho w h l}{2} \tag{2-52}$$

であり、ここで m は等価質量、 s_n は等価コンプライアンスである。式(2-49)の形から、圧電横効果振動の等価回路は図 2.3 のような各振動モードに対応する LC 直列回路が並列に並んだ動アドミッタンス部分と、制動容量 C_d がトランスの役割を果たす力係数 A を介して並列接続された形になっていることが分かる。

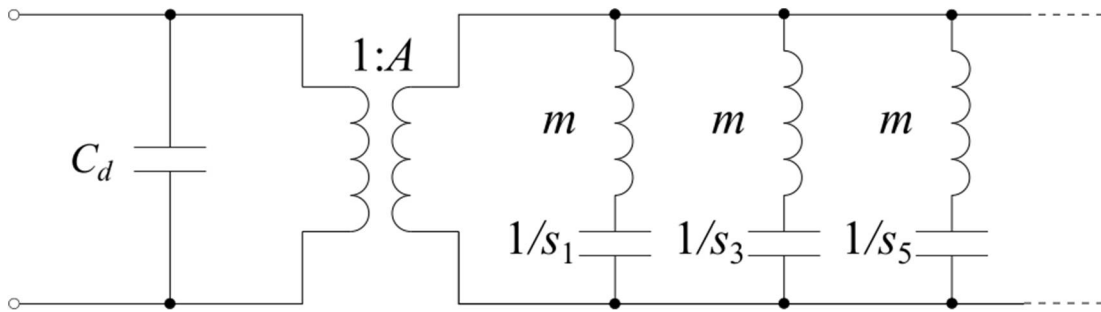


図 2.3 圧電等価回路

導出した等価回路は全ての振動モードに対応した LC 直列部分が含まれているが、実用上はある振動モードに着目し、対応する LC 直列部分のみを抜き出して用いられる場合が多い。そこで、1次の振動モードに着目し、損失を含めた LCR 等価回路を用いて圧電体のアドミタンス特性について述べる。図 2.3 の等価回路から 1 次の振動モードに対応する部分のみを抜き出し損失を表す抵抗 r を含めた LCR 等価回路を図 2.4 に示す。

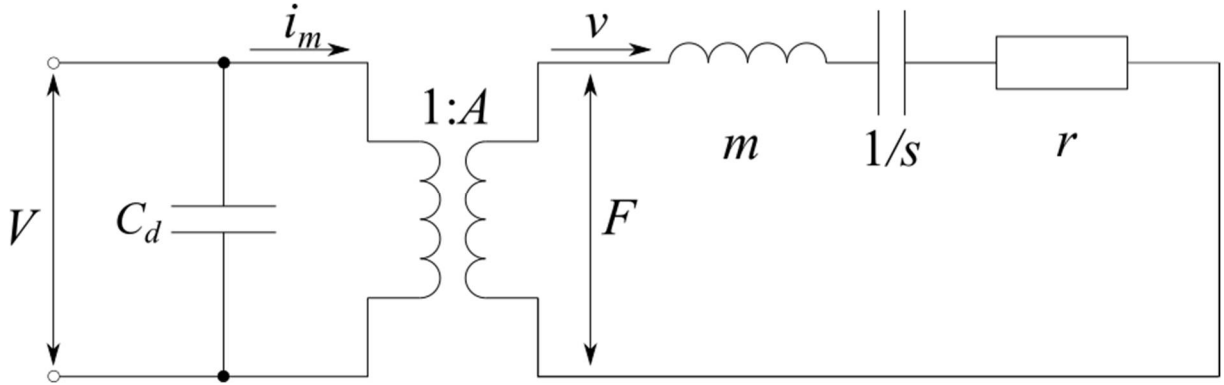


図 2.4 LCR 等価回路

この等価回路において、 C_d を含む左側の部分は電気端子、 LCR 直列回路を含む右側の部分は機械端子と呼ばれ、力係数 A は理想トランスとして電気的なパラメータと機械的なパラメータを変換する役割を担っている。電気-機械端子間で電圧 V と振動子両端にかかる力 F 、動電流 i_m と先端速度 v は等価な関係となっており、力係数 A を用いてその関係は以下のように表される。

$$F = AV \quad (2-53)$$

$$i_m = \frac{v}{A} \quad (2-54)$$

両端自由条件で用いる場合、 $F = 0$ であることを表すため機械端子側を短絡する。このとき、電気端子側から見たアドミタンス Y は以下ようになる。

$$Y = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} + j\omega C_d \quad (2-55)$$

$$\text{ただし } R = \frac{r}{A^2}, \quad L = \frac{m}{A^2}, \quad C = \frac{A^2}{s}$$

この式から、駆動角周波数 $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ で共振状態となりアドミタンス Y は極大となり、 $\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L\frac{CC_d}{C+C_d}}}$ で反共振状態となりアドミタンス Y は 0 に近づく。

板状圧電セラミックス振動子(富士セラミックス PZT C-203 44mm×2mm

×7mm)の圧電横効果の 1 次振動モード付近のアドミッタンス特性は図 2.5 のようになる。圧電体の物性値(圧電定数、ステイフネス、誘電率、機械的 Q 値等)を求める場合、アドミッタンス測定を行って図 2.5 のようなアドミッタンスカーブを得た後、式(2-55)を用いてカーブフィッティングを行うことで等価回路パラメータを推定することができる。さらに式(2-50)-(2-52)を用いて各物性値を求めることができる。

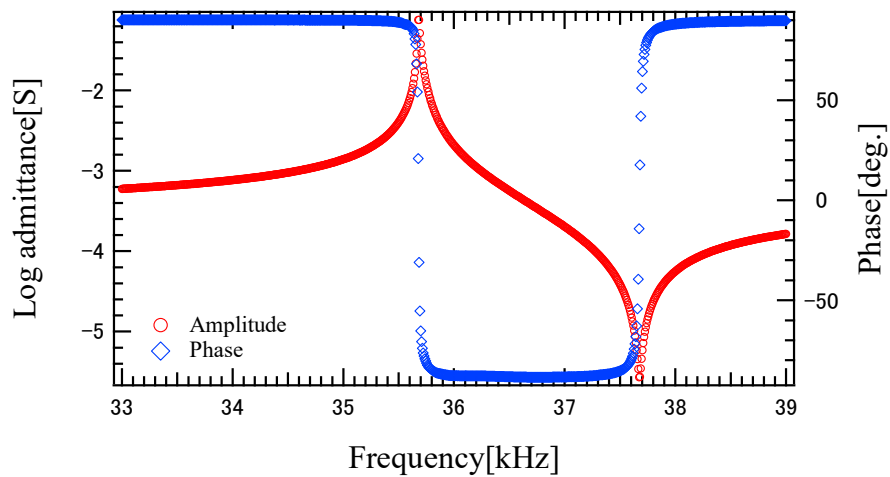


図 2.5 板状圧電セラミックス振動子(PZT)のアドミッタンス特性

2.3 圧電振動の非線形モデルに関する先行研究

2.3.1 圧電体のハイパワー特性に関する先行研究

超音波モータや医療用超音波プローブ、キャビテーション発生用の超音波振動子等では、高い変位、推力、トルクを発生させるために、圧電振動子を数十～数百 V/mm の高入力電界で共振駆動する場合が多い。このような駆動条件においては第1章で述べたように、圧電振動が共振周波数変化、振動速度飽和、自己発熱のような非線形現象を伴う。圧電材料の特性は、一般的には数 V/mm 程度の低電界で評価されており、前述したような高い入力パワーでの圧電振動特性はハイパワー特性と称して低電界・DC 電界・非共振での駆動と区別され、その測定方法や解析手法について研究が行われている。

まず、図 2.6 に示すように、圧電振動子を駆動した際に、駆動電流や変位の周波数特性が測定され、駆動電圧の上昇によってヒステリシスと跳躍現象が現れることが明らかになった^[3]。以上のような現象は入力電圧を固定した定電圧測定により測定されるものであった。これに対して、図 2.7 に示すように、駆動中の動電流と変位振幅は比例することを用いて、測定中の電流を一定に保ったまま測定を行う定電流駆動が考案された。図 2.8 に定電流駆動によって測定された電圧の周波数特性を示す。定電流駆動の場合には、左右対称な周波数特性が得られることが明らかとなっており、それぞれの電流・振動速度に対応した曲線を解析することで、各振動速度における等価回路定数等を導くことができる。ただし、圧電材料の共振・反共振特性を測定するために一般的に用いられている定電圧駆動と比べて、大規模な制御系が必要となる点が問題であった。また、図 2.9 に示すように、共振駆動中には急激な温度上昇が生じ、温度上昇によって、特に機械的品質係数 Q_m の高い圧電材料は Q_m が急激に減少することが示された^[5]。駆動中の発熱はハイパワー特性の測定上の重要な問題であり、これを抑えるための測定法として、次節で述べる電氣的過渡応答測定法が用いられるようになった。

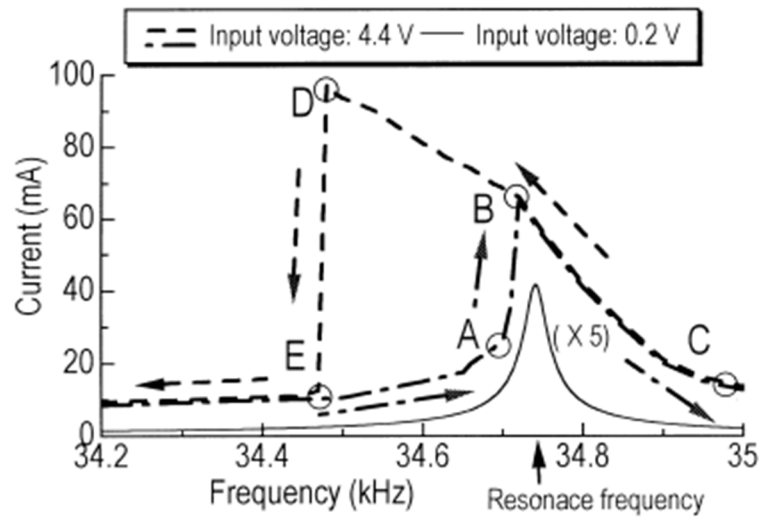


図 2.6 PZT 振動子の駆動電流の周波数特性^[3]

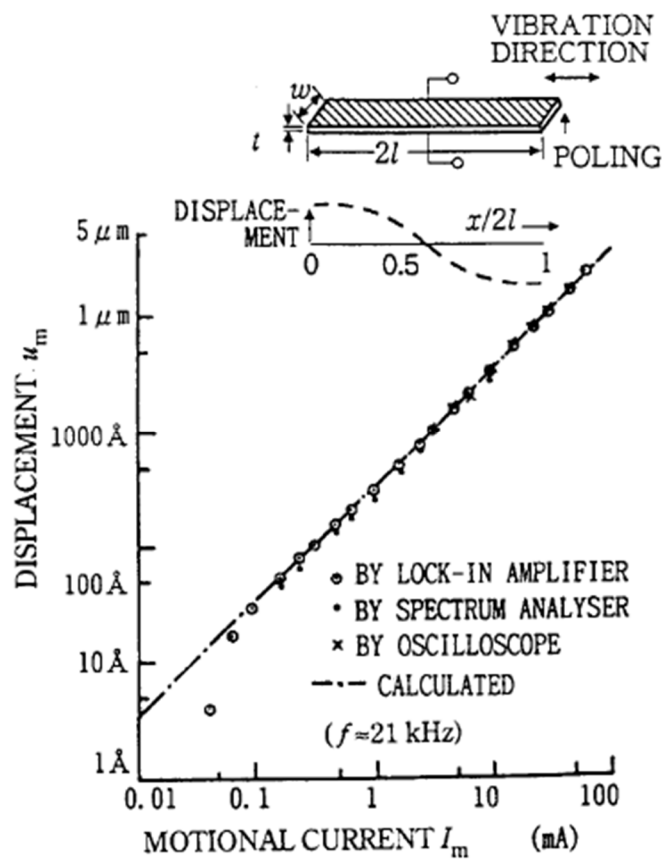


図 2.7 PZT 振動子の動電流と変位の関係^[4]

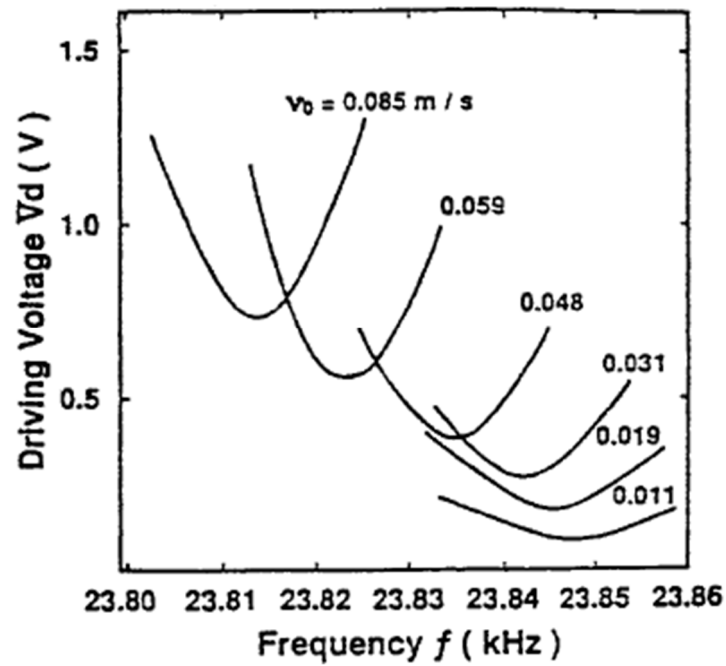


図 2.8 定電流測定により得られた駆動電圧の周波数特性^[4]

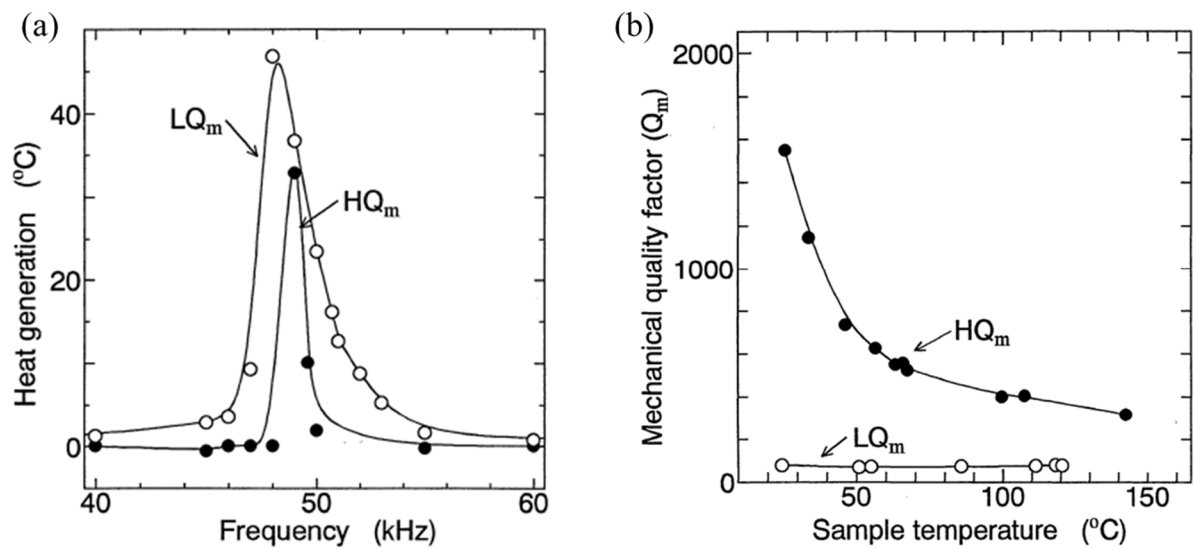


図 2.9 (a)PZT 振動子の温度上昇の周波数特性 (b)PZT 振動子の機械的 Q 値の温度依存性^[5]

2.3.2 電氣的過渡応答測定

圧電体のハイパワー駆動においては、非線形振動と同時に大振幅の振動に伴う振動損失によって、発熱が生じるという問題が存在する。発熱は圧電材料の物性値を変化させるため、測定された共振周波数の変化や振動速度等の変化が、発熱に由来するものか非線形振動に由来するものか判別が難しく、ハイパワー駆動時の特性を評価する困難さの一因となっている。そのため、非線形振動の測定を行うためには、温度上昇を防ぐ工夫が必要である。電氣的過渡応答測定法^[6-8]は、温度上昇の影響を排除し非線形振動の特性のみを測定する為に用いられる。図 2.10 に示されるように短時間の電圧印加を行い、その後入力電氣端子を短絡し電流測定や速度測定を行う。

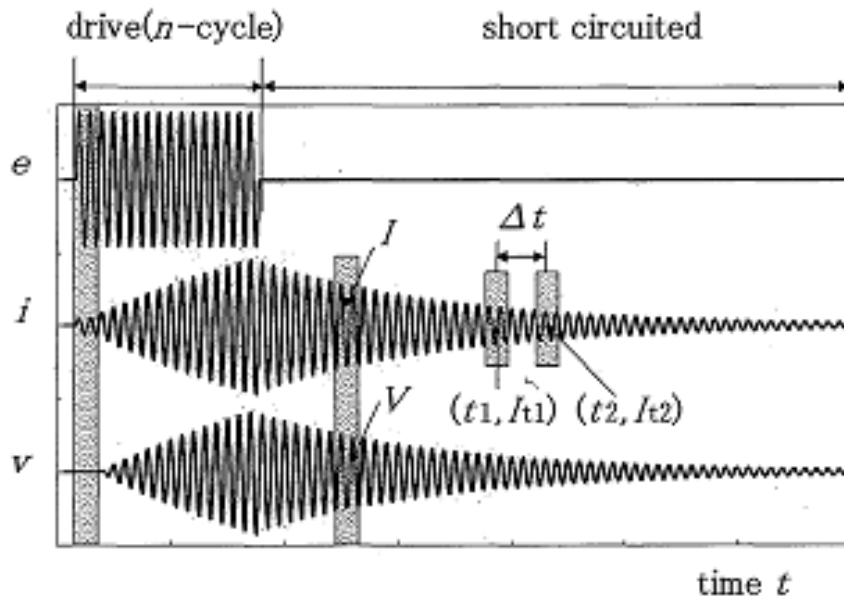


図 2.10 電氣的過渡応答測定法(e : 印加電界, i : 駆動電流, v : 振動速度)^[6]

時刻 $t = \tau$ に電氣端子を短絡したとする。その後の減衰自由振動において、先端振動速度 v は以下の式で表される。

$$v = v_0 \sin[\omega_r t + \varphi] e^{-\beta(t-\tau)} \quad (2-56)$$

ここで ω_r は共振角周波数、 φ は $t = \tau$ での位相、 β は減衰比である。電氣的過渡応答測定法を用いて圧電体の大振幅領域からの速度減衰特性を測定することにより、減衰比 β 、共振角周波数 ω_r と速度 v_0 の間に次のような関係があることが示された^[9]。

$$\beta = \beta_0 + p \frac{v_0^2}{l} \quad (2-57)$$

$$\omega_r = \omega_0 + q \frac{v_0^2}{l} \quad (2-58)$$

ここで p 、 q は非線形係数として導入された値であり、 p の絶対値が大きいほど、振動速度が上昇した際に損失が増加(機械的 Q 値が低下)し、 q の絶対値が大きいほど、共振周波数の変化が大きくなる。図 2.11 に電氣的過渡応答測定から算出された PZT 振動子の減衰比 β 、共振角周波数 ω_r と先端振動速度の関係を示す^[10]。

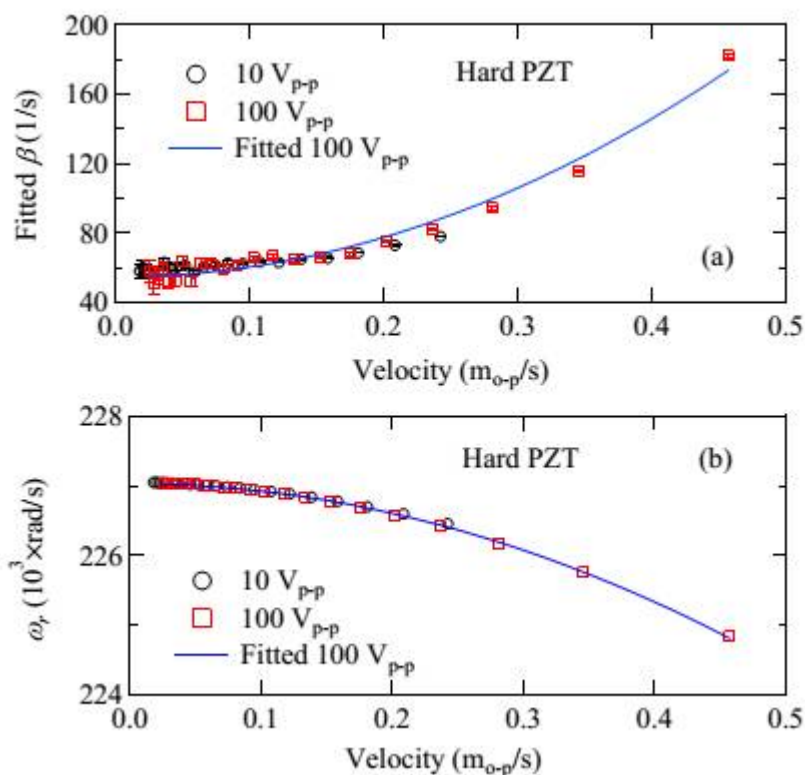


図 2.11 減衰比 β 、共振周波数 ω_r の振動速度依存性^[10]

振動速度の上昇に従って減衰比が増加し、共振周波数が低下していることが分かる。1章において、圧電材料のハイパワー駆動時の問題として振動速度の飽和や、共振周波数の低下について述べた。電氣的過渡応答測定により求められた β 、 ω_r と振動速度の関係は、まさに大振幅振動による損失の増加と共振周波数変化を表しており、図 2.11 の関係からは $p > 0$ 、 $q < 0$ となることが分かる。したがって大振幅で励振することにより、損失が増加し共振周波数が低下することとなり、これは実際の PZT 振動子のハイパワー駆動時の特徴である共振周波数の低下および振動速度の飽和の傾向と一致する。

2.3.3 非線形 LCR 等価回路

Liu らは前節(2-57)-(2-58)の関係式を圧電体の LCR 等価回路の機械端における電流と電圧の関係式に適用することで、非線形振動のアドミッタンス特性を明らかにした^[10]。

2.2.2 節で導出した LCR 等価回路において、動アドミッタンス部に流れる電流 i と印加電圧 V の関係は

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V \quad (2-59)$$

となっている。ここで L, C, R は機械的なパラメータを等価的に表すものであり、電気-機械間のパラメータの関係は以下のように表される。

$$L = \frac{m}{A^2} \quad (2-60)$$

$$R = \frac{r}{A^2} = \frac{2m\beta}{A^2} \quad (2-61)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{s}{A^2} = \frac{m\omega_r^2}{A^2} \quad (2-62)$$

前節の式(2-57)(2-58)より、

$$r = 2m\beta = 2m \left(\beta_0 + p \frac{v_0^2}{l} \right) \quad (2-63)$$

$$s = m\omega_r^2 = m \left(\omega_0 + q \frac{v_0^2}{l} \right)^2 \approx m\omega_0 + 2mq \frac{v_0^2}{l} \quad (2-64)$$

となる。ただし、図 2.11 から ω_r の変化は ω_0 に対して非常に小さいため、 $\frac{qv_0^2}{l\omega_0} \ll 1$ として近似した。よって、式(2-59)は非線形パラメータ η, ξ を導入して

$$L \frac{di}{dt} + R_0 i + \eta i^3 + \frac{1}{C_0} \int i dt + \xi \omega^3 \left(\int i dt \right)^3 = V \quad (2-65)$$

となる。ただし、

$$R_0 = \frac{2m\beta_0}{A^2} \quad (2-66)$$

$$C_0 = \frac{m\omega_0}{A^2} \quad (2-67)$$

$$\eta = \frac{2Lp}{lA^2} \quad (2-68)$$

$$\xi = \frac{2Lq}{lA^2} \quad (2-69)$$

であり、式変形の途中で式(2-54)を用いた。

ここで、 R_0, C_0 は非線形パラメータを含まない線形の等価回路における等価抵抗及び等価キャパシタを表す。大振幅の振動によって LCR 部分に流れる電流 i が増加する程、抵抗 R とキャパシタ C の逆数が i^2 に比例して増減することを意味し、その際の比例定数がそれぞれ η, ξ となっている。

式(2-65)に $V = V_0 \cos \omega t$, $i = i_0 \cos(\omega t + \theta)$ を代入して、

$$R_0 i_0 \cos(\omega t + \theta) - \omega L i_0 \sin(\omega t + \theta) + \frac{i_0 \sin(\omega t + \theta)}{\omega C_0} + \quad (2-70)$$

$$\eta i_0^3 \cos^3(\omega t + \theta) + \xi i_0^3 \sin^3(\omega t + \theta) = V_0 \cos \omega t$$

となる。ここで

$$\cos^3(\omega t + \theta) = \frac{3 \cos(\omega t + \theta) + \cos 3(\omega t + \theta)}{4} \quad (2-71)$$

$$\sin^3(\omega t + \theta) = \frac{3 \sin(\omega t + \theta) - \sin 3(\omega t + \theta)}{4} \quad (2-72)$$

より、式(2-70)は3倍高調波成分である $\cos 3(\omega t + \theta)$, $\sin 3(\omega t + \theta)$ の項を含む。ただし、アドミタンス測定時には駆動周波数成分の信号のみ振幅と位相を測定するため、ここでは駆動周波数成分のみ両辺から抜き出して考える。これによって、

$$\begin{aligned} & \left(-\omega L i_0 + \frac{i_0}{\omega C_0} + \frac{3\xi i_0^3}{4} \right) \sin(\omega t + \theta) \\ & + \left(R_0 i_0 + \frac{3\eta i_0^3}{4} \right) \cos(\omega t + \theta) = V_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (2-73)$$

となる。さらに

$$\cos \omega t = \sin(\omega t + \theta) \sin \theta + \cos(\omega t + \theta) \cos \theta \quad (2-74)$$

より、式(2-73)は

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\omega L i_0 + \frac{i_0}{\omega C_0} + \frac{3\xi i_0^3}{4} \right) - V_0 \sin \theta \right] \sin(\omega t + \theta) \\ & + \left[\left(R_0 i_0 + \frac{3\eta i_0^3}{4} \right) - V_0 \cos \theta \right] \cos(\omega t + \theta) = 0 \end{aligned} \quad (2-75)$$

となる。よって

$$-\omega L i_0 + \frac{i_0}{\omega C_0} + \frac{3\xi i_0^3}{4} = V_0 \sin \theta \quad (2-76)$$

$$R_0 i_0 + \frac{3\eta i_0^3}{4} = V_0 \cos \theta \quad (2-77)$$

となるから、これを変形して、

$$\left(-\omega L i_0 + \frac{i_0}{\omega C_0} + \frac{3\xi i_0^3}{4} \right)^2 + \left(R_0 i_0 + \frac{3\eta i_0^3}{4} \right)^2 = V_0^2 \quad (2-78)$$

$$\begin{aligned}
\theta &= \arctan \frac{\left(-\omega L i_0 + \frac{i_0}{\omega C_0} + \frac{3\xi i_0^3}{4}\right)}{\left(R_0 i_0 + \frac{3\eta i_0^3}{4}\right)} \\
&= \arctan \frac{\left(-\omega L + \frac{1}{\omega C_0} + \frac{3\xi i_0^2}{4}\right)}{\left(R_0 + \frac{3\eta i_0^2}{4}\right)}
\end{aligned} \tag{2-79}$$

として、電流と電圧の振幅、位相の関係が得られる^[10]。式(2-78)を用いて電流を計算すると、3種類の解が得られる。周波数を変化させながら、この3種類の解を計算すると図 2.12 のようになり、この内最大の解と最小の解から、歪んだ共振ピークの形が表れる^[11]。実測の際には周波数を UP スweepすると最小の解が、DOWN スweepすると最大の解が得られる。

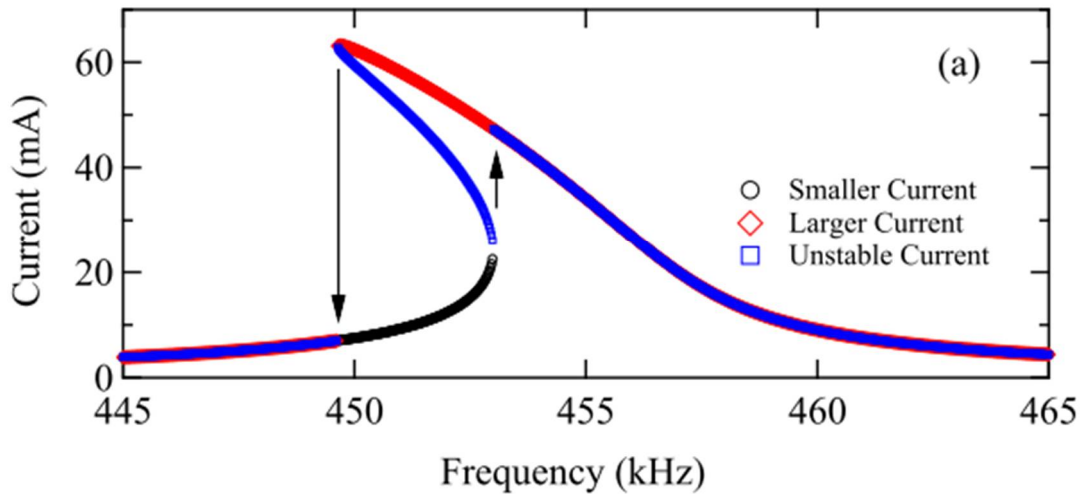


図 2.12 計算によって得られる電流解^[11]

式(2-78)-(2-79)を用いて、フィッティングおよび計算したハード系 PZT 圧電セラミック振動子のアドミタンス曲線および位相曲線を図 2.13 に示す。ここでは駆動電圧の周波数を上昇させつつ測定(UP スweep)したアドミタンス測定の結果から、フィッティングによって非線形パラメータ η 、 ξ を求め、それらの値を用いて周波数を減少させながら測定した場合(DOWN スweep)のアドミタンスカーブや位相曲線を計算している。アドミタンス測定の際には前述したように発熱が生じるため、発熱を抑えるために十分短時間での測定を行っている。計算結果は測定結果とよく一致しており、この結果から、圧電非線形振動は LCR 等価回路における機械端子側のパラメータ

である抵抗 R およびキャパシタ C のみを電流振幅 i_0 の2乗に比例させて変化することで表現できることが示された。

LCR 等価回路には回路定数として機械端子側の L , C , R 、電気端子側の C_d 、および圧電効果を表す力係数 A が存在する。しかし、この非線形 LCR 等価回路モデルにおいては図 2.14 に示すように、機械端子側の C , R の非線形性のみを考慮している。この理由として、まず L は式(2-60)のように、等価質量 m と力係数 A から決定される値であり、等価質量は定数であるから、力係数 A に依存する値である。力係数 A は式(2-54)より、振動速度と動電流の比である。図 2.7 より、変位と動電流は非線形現象が生じる大振幅振動においても比例関係にあることが示されていることから、振動速度と動電流もまた比例関係にある。この比例定数が力係数となるから、力係数は振幅に関わらず一定となり、 L , A は定数として扱うことができる。残る C_d を定数として扱う理由については、表 2.1 に示すように、非線形 LCR 等価回路によるアドミッタンスのフィッティング結果と、前節で述べた電氣的過渡応答測定法により求めた式(2-57)(2-58)の非線形係数 p, q がよく一致することが理由となっている^[11]。これは、電氣的過渡応答測定の場合には電極間を短絡しているため、 C_d に電流が流れることがない測定法であるのに対し、アドミッタンス測定では C_d に流れる電流を含めて計測しているためである。

以上のことから、等価回路上での抵抗 R やキャパシタ C は圧電振動子の弾性損失、弾性定数を等価的に表現するものであるため、これまで誘電率や圧電定数の非線形性が影響すると考えられてきたハイパワー駆動時の圧電振動特性が、非線形弾性のみで説明することが可能であると明らかになった。従来の圧電ハイパワー特性の研究においては、図 2.15 のように、圧電定数の駆動電界に対する変化が取り上げられているが、図 2.16 のように駆動中の温度変化を含めた特性となっている。非線形特性を評価する上では、温度上昇を極力抑えた測定が必要になる。また、圧電定数などの諸物理定数を測定した振動速度や電流から算出する際の計算にも注意が必要である。非線形振動の影響を含んだ電流や振動速度は、適したモデルで解析を行わなければならない。小振幅時と同様の計算手法を用いて諸定数を算出している場合、実際には定数としてよい圧電定数などにも変化が表れてしまうためである。

以上の Liu らの検討により、発熱に配慮した上で、アドミッタンス特性を測定し、その解析によって非線形パラメータを求めることで、圧電材料の非線形振動特性評価を行うことが可能となった。しかし、実用上避けられない圧電材料の発熱や、集中定数系の等価回路モデルであるため、境界条件が限られている等の点が問題となっている。そこで本研究では、次節で圧電方程式に高次弾性定数を導入したモデル化を提案する。

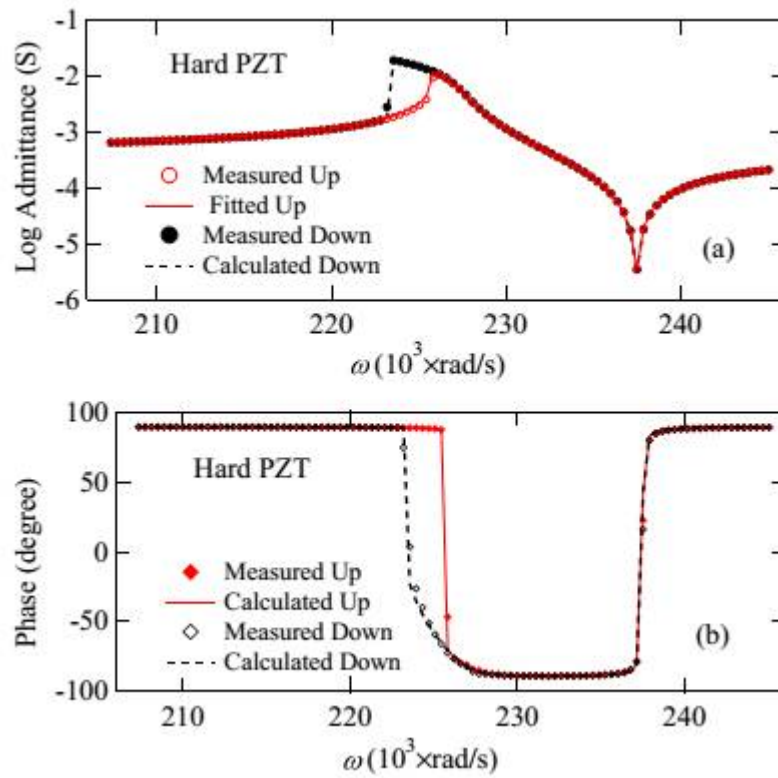


図 2.13 PZT 圧電セラミック(ハード系)のアドミッタンスカーブのフィッティング
および計算結果:(a)アドミッタンスカーブ、(b)位相曲線^[10]

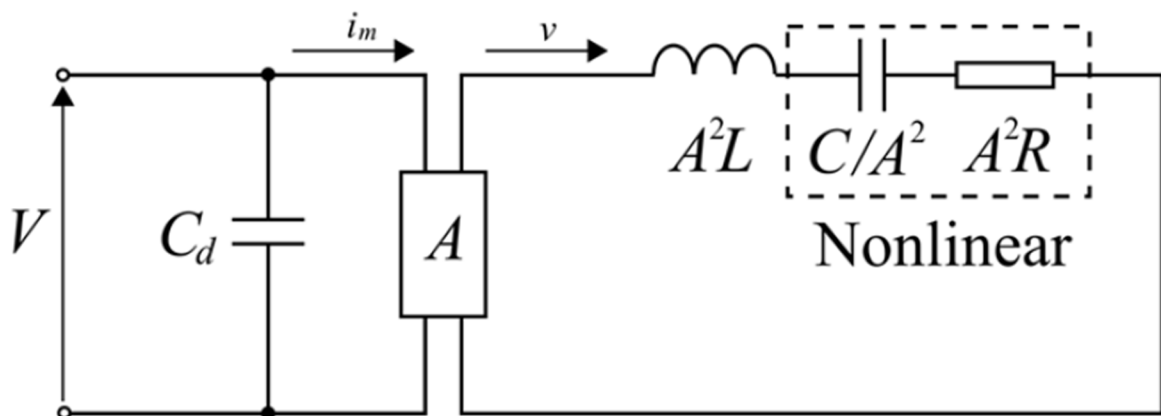


図 2.14 非線形 LCR 等価回路

表 2.1 電氣的過渡応答法と非線形 LCR 等価回路によって求めた減衰比 β_0 、角周波

数 ω_0 、非線形係数 p, q ^[11]

Sample	Method	β_0 (s ⁻¹)	p (s/m)	ω_0 (rad/s)	q (s/m)
Hard PZT	Burst Mode	55	2.45×10^1	2.27×10^5	-4.34×10^2
Hard PZT	Admittance	54	2.58×10^1	2.27×10^5	-4.86×10^2
Soft PZT	Burst Mode	1293	4.75×10^3	2.05×10^5	-8.52×10^3
Soft PZT	Admittance	1293	5.03×10^3	2.06×10^5	-1.08×10^4

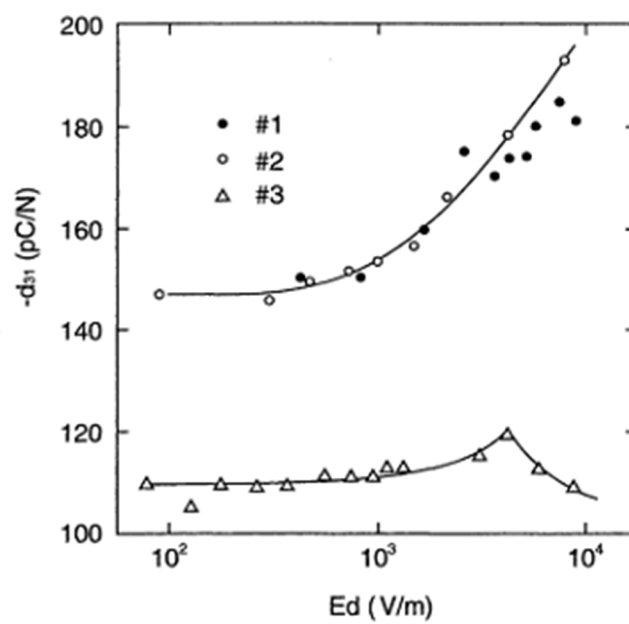


図 2.15 $x\text{Pb}(\text{Mn}_{1/3}\text{Sb}_{2/3})\text{O}_3 - y\text{Pb}(\text{Mn}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3 - z\text{PbTiO}_3$ セラミックス振動子の
高電界印加時の圧電定数変化^[12]

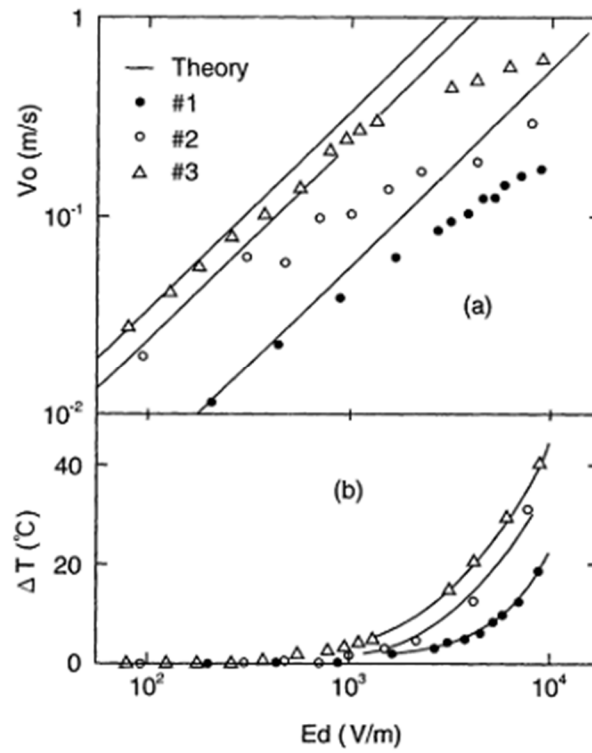


図 2.16 $x\text{Pb}(\text{Mn}_{1/3}\text{Sb}_{2/3})\text{O}_3 - y\text{Pb}(\text{Mn}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3 - z\text{PbTiO}_3$ セラミックス振動子の高電界印加時の振動速度と温度変化^[12]

2.4 高次弾性定数の導入

前節において、非線形 LCR 等価回路の提案により、圧電材料の非線形振動解析が行えるようになったことを述べた。しかし、実際の駆動の際には発熱が生じることは不可避であり、また等価回路では機械的境界条件が限定されているため、複雑な構造を想定することができない。これは LCR 等価回路が圧電振動子全体のスティフネス、損失を1つの定数として考える集中定数系のモデルであることに原因がある。

そこで本研究では、要素分割での非線形振動のモデル化を行う。前節の結果から、非線形振動が弾性定数の非線形性のみで説明できることを述べた。本節では、まず初めに高次弾性に関する先行研究について述べ、実際に圧電方程式に高次弾性定数を導入することによって、前節までに述べたような非線形現象を導くことができると示す。

2.4.1 高次弾性に関する先行研究

高次弾性については非圧電材料の分野で既に研究が行われており、数値計算の分野では変位一力の関係が線形でない非線形バネを導入することで、周波数特性にヒステリシスが表れることが示されている^[13]。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x - \lambda x^3 \quad (2-80)$$

の運動方程式で表されるように、変位 x の3乗に比例した復元力を発生させる非線形バネを導入したバネマス系の変位の周波数特性は、図 2.17 のようになる。非線形バネ定数 λ を正とすると **hard-spring** となり変位に応じてバネ定数が増加、負とすると **soft-spring** となりバネ定数が減少し、変位のヒステリシスが描かれる。前節で述べた非線形 LCR 等価回路は非線形バネと同様の考え方であり、機械的な非線形バネと等価な電気的な非線形キャパシタに加えて、非線形抵抗が用いられることでアドミッタンスのヒステリシスが表現されている。本研究では、要素分割での非線形振動のモデル化のため、非線形バネと同様の考え方で、圧電材料の高次弾性定数を導入し、圧電材料の歪み量に応じて弾性定数に変化するモデルを構築する。

非線形方程式の解法としては、摂動法が一般的である^[14]。摂動法とは線形方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (2-81)$$

の解が既知である場合に、十分小さなパラメータ ϵ を用いて表される非線形

方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \epsilon\right) \quad (2-82)$$

の解は、 $\frac{d^2x}{dt^2} = f_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ の解に十分近いと仮定し、線形方程式の解 $x(t)$ を

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (2-83)$$

とパラメータ ϵ に関してべき級数展開して、非線形方程式を満足する項まで求めることで解を求める手法である。周期性のある線形方程式の解を用いる場合に有効な手法であり、非線形項が加わることによる固有振動数の変化や高調波の発生を計算によって求めることができる。本研究で対象とする圧電振動も周期的な振動であるが、高調波を対象とせず、駆動周波数の振動に着目して、後に提案する非線形伝達マトリックスを用いて数値的な解の計算を行う。

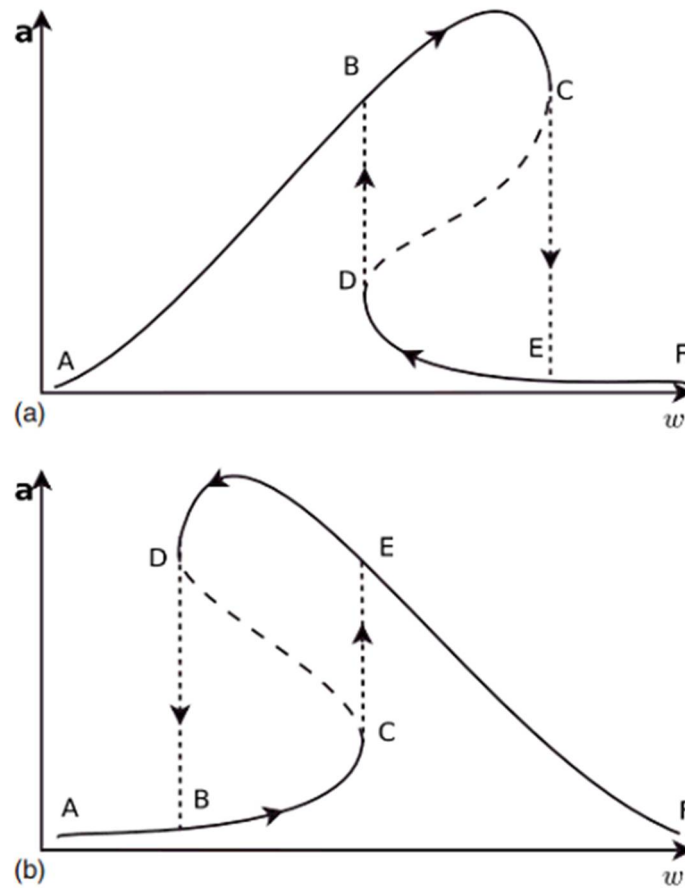


図 2.17 非線形バネの導入によるバネマス系の振幅の周波数特性変化^[13]

(a)Hard-spring (b)Soft-spring

金属材料の高次弾性定数については、実験的に推定する手法が存在する。一例として、図 2.18 のような測定系を用いて、試料に静水圧や一軸方向の圧縮・引張圧力を加えながら、超音波パルスの照射を行い、その伝播時間の圧力や歪みに対する変化を測定し、解析する手法が存在する^[15]。図 2.19 に銅に縦波パルスを照射した際の伝播時間変化と弾性率変化の歪み依存性を示す。銅の場合、歪みの増加により、弾性率が放物線上に変化しており、2次弾性定数、3次弾性定数の影響が表れていることが分かる。その他にも、2つの超音波を異なった方向から結晶中に照射し、結晶内部で衝突させることで発生する超音波の方向・強度を測定する手法や、超音波照射により発生する高調波を測定する手法などがある^[16]。しかし、これらの測定の際には非常に小さな振幅を測定することから、計測精度に問題がある。超音波の発生には圧電振動子が用いられており、非線形性を抑えて大振幅励振可能な圧電振動子を開発することができれば、非圧電材料の高次弾性評価にも応用が可能である。

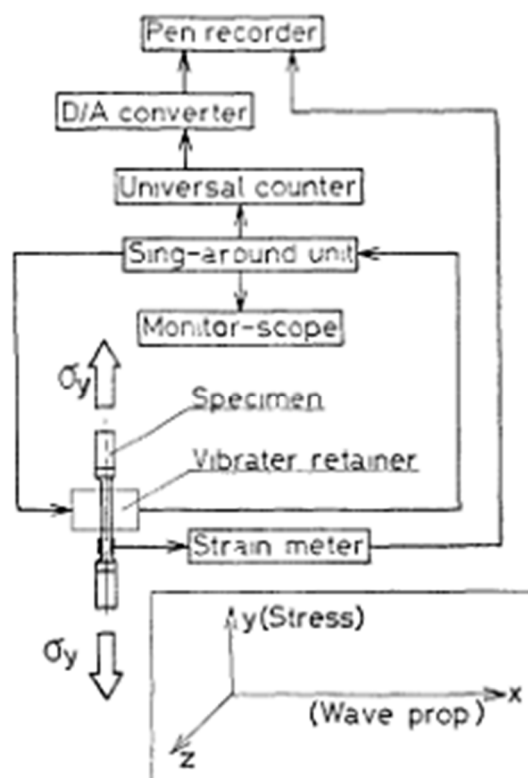


図 2.18 超音波伝播速度の測定系^[14]

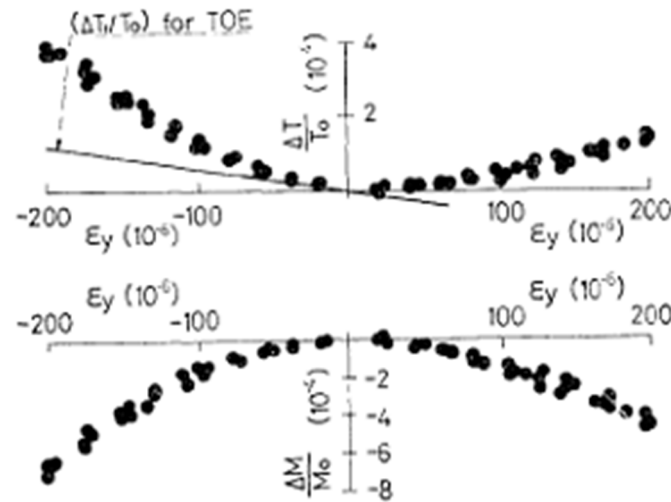


図 2.19 銅の縦波超音波伝播時間の変化($\Delta T/T_0$)、弾性率変化($\Delta M/M_0$)の歪み依存性
[15]

圧電材料については、強弾性特性の観察が行われている。図 2.20 に温度を変化させながら、PZT に対して圧縮応力を与えた際の応力－歪み曲線を示す^[17]。圧縮応力の値に応じて、応力－歪み曲線が歪曲し、高次弾性が表れていることが見て取れる。ただし、高次弾性定数についての解析などを行われていない。本研究で対象としているハイパワー駆動時の内部応力は、数十 MPa の範囲に収まるが、この範囲でも応力－歪みは直線的な関係とはなっていない。ただし、高周波数での励振の際には、静圧を加えた際とは内部の分極構造の変化が異なる可能性があるため、高周波励振の際に同様の弾性定数の変化となるかは不明である。

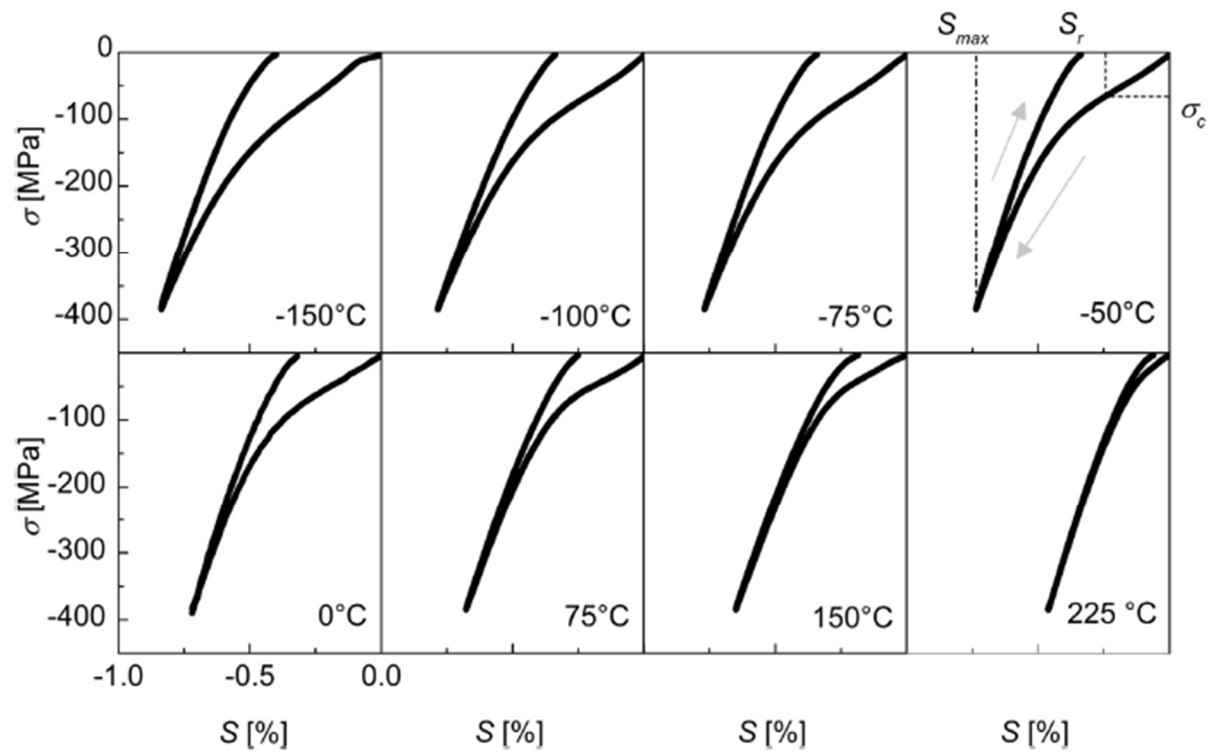


図 2.20 PZT の応力—歪みの強弾性曲線^[17]

2.4.2 高次弾性定数

本研究では、高次弾性定数を圧電方程式に導入することで、要素分割での非線形振動モデルを考案し、次章以降でこれを用いて高次弾性定数を測定する。まず、線形関係のみを想定した一般的な圧電方程式は式(2-24)より、

$$\begin{cases} T_1 = \overline{c_{11}^E} S_1 - \overline{e_{31}} E_3 \\ D_3 = \overline{e_{31}} S_1 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \end{cases} \quad (2-24 \text{ 再掲})$$

と表される。ここに歪み S_1 の3乗の項を考慮し、その係数を3次弾性定数 $c_{11(3)}^E$ とすると、圧電方程式は

$$\begin{cases} T_1 = \overline{c_{11}^E} S_1 + c_{11(3)}^E S_1^3 - \overline{e_{31}} E_3 \\ D_3 = \overline{e_{31}} S_1 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \end{cases} \quad (2-84)$$

と表せる。歪みの3乗項のみを考慮する理由を以下に示す。図 2.21 に圧電振動子(富士セラミックス C203 44×7×2mm)を電圧 20V_{pp} で共振駆動(駆動周波数 35kHz)した際の電流スペクトルを示す。駆動周波数の 35kHz に加えて高調波成分が発生している。これは前述したような高次弾性によるものである。特に3次高調波成分は他次数の成分に比べて20倍以上の振幅となっており、3乗項の影響が顕著である。また、図 2.11 に示したような電氣的過渡応答測定によって測定された減衰比 β 、共振角周波数 ω_r と速度 v_0 の間には式(2-57)(2-58)のような関係がある。 β 、 ω_r は v_0 の2乗に比例する関係となっており、圧電方程式に歪みの3乗項を導入し、後述するような式展開を行うことで、式(2-117)(2-120)のように同様の関係を導くことができる。以上のような理由から、本研究では歪みの3乗項を圧電方程式に加えてモデル化を行う。

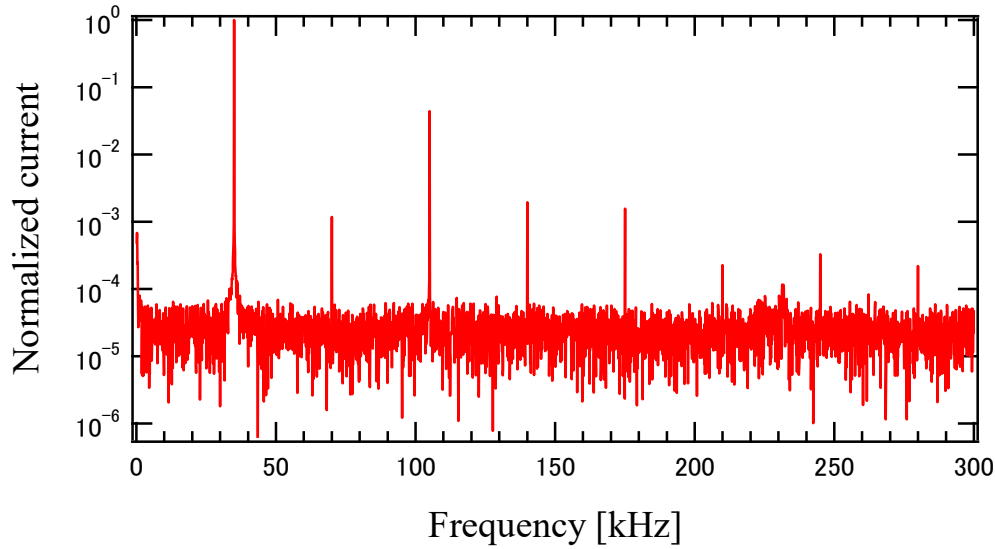


図 2.21 PZT 振動子の電圧 20Vpp、周波数 35 kHz 駆動時の電流スペクトル

ここで弾性定数は振動損失を表すため、以下のように複素数として表す。

$$\overline{c_{11}^E} = c_{1r} + jc_{1i} \quad (2-85)$$

$$c_{11(3)}^E = c_{3r} + jc_{3i} \quad (2-86)$$

2.2.2 節と同様に圧電体の微小部分の運動方程式を考え、式(2-84)を用いると、

$$\begin{aligned} \rho wh dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= wh \frac{\partial T_1}{\partial x} dx \\ &= wh \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \overline{c_{11}^E} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 - \overline{e_{31}} E_3 \right\} dx \\ &= wh \overline{c_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + 3wh c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (2-87)$$

となる。ただし、 $\frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$ であることを用いた。ここで、変位 $u(x, t)$ 、速度 $v(x, t)$ を、モード形状を正弦波であると仮定して、

$$u(x, t) = u_0 \sin kx e^{j\omega t} = u_t \sin kx = u_x e^{j\omega t} \quad (2-88)$$

$$v(x, t) = v_0 \sin kx e^{j\omega t} = v_t \sin kx = v_x e^{j\omega t} \quad (2-89)$$

ただし $k = \frac{\pi}{l}$

とおく。ただし、 ω を駆動周波数、 u_0 を変位振幅、 v_0 を速度振幅とする。時間

関数となる $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ は複素弾性定数を導入した際の位相変化を計算するために導入されており、実際の振動としては実部 $\cos \omega t$ のみが観測される。本研究では、1 次の複素弾性定数に加えて、3 次の複素弾性定数を用いて非線形方程式での計算を行う。そのため、線形方程式である通常の波動方程式とは異なり、 $e^{j\omega t}$ の累乗の計算を行う必要があり、注意せねばならない。以下にその手順を示す。

ここで式(2-88)を式(2-87)に代入することを考える。右辺第2項について、

$$3whc_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 3whc_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} (e^{j\omega t})^3 dx \quad (2-90)$$

となるが、ここで $(e^{j\omega t})^3$ の部分について、このような波動の複素数表現は累乗の計算を行うことを前提としていないため、そのまま計算を行うと正しい計算が行えなくなってしまう。そこで、以下のような取り扱いを行う。 $(e^{j\omega t})^3$ をそのまま計算する場合、

$$(e^{j\omega t})^3 = \cos 3\omega t + j \sin 3\omega t \quad (2-91)$$

となるが、ここで用いている $e^{j\omega t}$ は実部の $\cos \omega t$ を表現するためのものである。そのため、 $(e^{j\omega t})^3$ は実部の $\cos^3 \omega t$ が意味するところとなる。ここで、

$$\cos^3 \varphi = \frac{3 \cos \varphi + \cos 3\varphi}{4} \quad (2-92)$$

の関係から、式(2-71)(2-72)と同様に、アドミッタンス測定時には検出されない3次高調波成分を除き、 $(e^{j\omega t})^3$ の実部は $\frac{3}{4} \cos \omega t$ となるため、これを複素数表現することで、 $\frac{3}{4} e^{j\omega t}$ と表す。

よって、式(2-87)は、

$$\rho wh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = whc_{11}^E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{9}{4} whc_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} dx \quad (2-93)$$

となる。エネルギー積分を行うため両辺に $\frac{\partial u}{\partial t}$ を掛け $x = -\frac{l}{2} \sim \frac{l}{2}$ の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho w h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
 &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} w h \overline{c_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
 &+ \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} w h c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} \frac{\partial u}{\partial t} dx
 \end{aligned} \tag{2-94}$$

となる。左辺について、

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho wh \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \rho wh \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho wh \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} v^2 dx \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho wh v_t^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin^2 kx dx \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho wh v_t^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2kx}{2} \right) dx \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho wh v_t^2 \frac{l}{2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m v_t^2 \right)
\end{aligned} \tag{2-95}$$

となり、運動エネルギーの項が導出できる。ただし、

$$m = \frac{\rho wh l}{2} \tag{2-96}$$

とおいた。

また、式(2-94)の右辺第一項については、式(2-85)より、

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} wh \overline{c_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} wh c_{1r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j wh c_{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \tag{2-97}$$

と分解できる。この右辺第一項は、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} whc_{1r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \left[whc_{1r} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} whc_{1r} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
 &= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} whc_{1r} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
 &= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} whc_{1r} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{2} whc_{1r} k^2 u_t^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos^2 kx dx \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{2} whc_{1r} k^2 u_t^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2kx}{2} \right) dx \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{2} whc_{1r} k^2 u_t^2 \frac{l}{2} \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{2} K_1 u_t^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{2-98}$$

となり、1 次の弾性エネルギーの項が導出できる。ただし、

$$K_1 = \frac{whlk^2 c_{1r}}{2} \tag{2-99}$$

とおき、両端自由条件であるため $\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} = 0$ であることを用いた。

さらに式(2-97)の右辺第二項については、式(2-98)を参考にして部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} jwhc_{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \left[jwhc_{1i} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} jwhc_{1i} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
&= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} jwhc_{1i} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
&= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} jwhc_{1i} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{2} jwhc_{1i} k^2 u_t^2 \frac{l}{2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{jwhlc_{1i} k^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_t^2 \\
&= -\frac{1}{2} jwhlc_{1i} k^2 u_t^2 (j\omega u_0 e^{j\omega t}) \\
&= \frac{1}{2} whlc_{1i} k^2 \omega u_t^2 \\
&= -\frac{whlc_{1i} k^2}{2\omega} v_t^2 \\
&= -R_1 v_t^2
\end{aligned} \tag{2-100}$$

となり、1 次のエネルギー損失の項が導出できる。ただし、

$$R_1 = \frac{whlk^2 c_{1i}}{2\omega} \tag{2-101}$$

とおいた。よって、式(2-97)は

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} whc_{11}^E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{1}{2} K_1 u_t^2 \right\} - R_1 u_t^2 \tag{2-102}$$

となる。

式(2-94)の右辺第二項については、式(2-86)より、

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} whc_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} whc_{3r} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&\quad + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} jwhc_{3i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} \frac{\partial u}{\partial t} dx
\end{aligned} \tag{2-103}$$

と分解できる。右辺第一項については、式(2-88)より、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} whc_{3r} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
 &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} whc_{3r} (u_0 k \cos kx)^2 (-u_0 k^2 \sin kx) (u_0 \sin kx) e^{j\omega t} \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t}) dx \\
 &= -\frac{9}{16} whc_{3r} u_0^4 k^4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (e^{j\omega t})^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin^2 2kx dx \\
 &= -\frac{9}{64} whlc_{3r} k^4 u_0^4 \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t})^2 \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{9}{64} whlc_{3r} k^4 u_0^4 (e^{j\omega t})^2 \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{2} K_3 u_t^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2-104}$$

となり、3 次の弾性エネルギーの項が導出できる。ただし、

$$K_3 = \frac{9}{32} whlk^4 c_{3r} u_0^2 \tag{2-105}$$

とおいた。

式(2-103)の右辺第二項については、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} jwhc_{3i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} e^{j\omega t} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
 &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} jwhc_{3i} (u_0 k \cos kx)^2 (-u_0 k^2 \sin kx) (u_0 \sin kx) e^{j\omega t} \frac{\partial}{\partial t} (e^{j\omega t}) dx \\
 &= -\frac{9}{16} jwhc_{3i} u_0^4 k^4 j\omega (e^{j\omega t})^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin^2 2kx dx \\
 &= \frac{9}{32} whlc_{3i} \omega k^4 u_0^4 (e^{j\omega t})^2 \\
 &= \frac{9}{32} whlc_{3i} \omega k^4 u_0^2 \left(\frac{v_0}{j\omega} \right)^2 (e^{j\omega t})^2 \\
 &= -\frac{9}{32} \frac{whlk^4 c_{3i} u_0^2}{\omega} v_t^2 \\
 &= -R_3 v_t^2
 \end{aligned} \tag{2-106}$$

となり、3 次のエネルギー損失の項が導出できる。ただし、

$$R_3 = \frac{9}{32} \frac{whlk^4 c_{3i} u_0^2}{\omega} \tag{2-107}$$

とおいた。

以上より、式(2-94)は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} m v_t^2 + \frac{1}{2} K_1 u_t^2 + \frac{1}{2} K_3 u_t^2 \right\} = -R_1 v_t^2 - R_3 v_t^2 \quad (2-108)$$

となり、エネルギーの関係式が導出できる。

式(2-108)中の弾性エネルギーの項に着目すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_1 u_t^2 + \frac{1}{2} K_3 u_t^2 &= \frac{1}{2} (K_1 + K_3) u_t^2 \\ &= \frac{1}{2} K' u_t^2 \end{aligned} \quad (2-109)$$

としてまとめることができる。ただし、

$$K' = K_1 + K_3 \quad (2-110)$$

である。 K' は非線形振動により変化した見かけのバネ定数と考えることができる。そこで、非線形振動により変化した共振周波数を ω_r 、音速を c とし、波数を

$$k' = \frac{\omega_r}{c} \quad (2-111)$$

とおく。これを用い、式(2-99)を参考にして、見かけのバネ定数 K' を

$$K' = \frac{1}{2} w h l (k')^2 c_{1r} \quad (2-112)$$

とおく。よって、式(2-110)は、式(2-99)(2-105)(2-112)から、

$$\frac{1}{2} w h l (k')^2 c_{1r} = \frac{1}{2} w h l k^2 c_{1r} + \frac{9}{32} w h l k^4 c_{3r} u_0^2 \quad (2-113)$$

となるので、

$$(k')^2 = k^2 + \frac{9}{16} \frac{c_{3r}}{c_{1r}} k^4 u_0^2 \quad (2-114)$$

となる。ここで、 $\frac{c_{3r}}{c_{1r}} \ll 1$ であるとして近似すると、

$$k' \approx k + \frac{9}{32} \frac{c_{3r}}{c_{1r}} k^3 u_0^2 \quad (2-115)$$

となるから、式(2-111)および $k = \frac{\omega_0}{c}$ であることを用いると、

$$\frac{\omega_r}{c} = \frac{\omega_0}{c} + \frac{9}{32} \frac{c_{3r}}{c_{1r}} \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^3 u_0^2 \quad (2-116)$$

両辺に c を掛けて、

$$\begin{aligned}
 \omega_r &= \omega_0 + \frac{9}{32} \frac{c_{3r}}{c_{1r}} \frac{\omega_0^3}{c^2} u_0^2 \\
 &= \omega_0 + \frac{9}{32} \frac{c_{3r}}{c_{1r}} \frac{\omega_0}{c^2} v_0^2 \\
 &= \omega_0 + \frac{9}{32} \frac{\rho \omega_0}{c_{1r}^2} c_{3r} v_0^2
 \end{aligned} \tag{2-117}$$

となり、式(2-58)

$$\omega_r = \omega_0 + q \frac{v_0^2}{l} \tag{2-58 再掲}$$

で表される共振周波数と振動速度の関係式を導くことができる。また、ここで式(2-58)(2-69)(2-117)より、

$$c_{3r} = \frac{32}{9} \frac{c_{1r}^2}{\rho \omega_0 l} q = \frac{16}{9} \frac{c_{1r}^2 A^2}{\rho \omega_0 L} \xi \tag{2-118}$$

として、3次弾性定数実部と非線形パラメータ q, ξ の関係性が得られる。

また、式(2-108)中のエネルギー損失の項に着目すると、式(2-101)(2-107)より、

$$\begin{aligned}
 -R_1 v_t^2 - R_3 v_t^2 &= -\left(\frac{whlk^2 c_{1i}}{2\omega} + \frac{9}{32} \frac{whlk^4 c_{3i} u_0^2}{\omega} \right) v_t^2 \\
 &= -\left(\frac{1}{2} whl \frac{\omega}{c^2} c_{1i} + \frac{9}{32} whl \frac{\omega}{c^4} c_{3i} v_0^2 \right) v_t^2 \\
 &= -\left(\frac{1}{2} whl \rho \omega \frac{c_{1i}}{c_{1r}} + \frac{9}{32} whl \rho^2 \omega \frac{c_{3i}}{c_{1r}^2} v_0^2 \right) v_t^2 \\
 &= -2m \left(\frac{1}{2} \omega \frac{c_{1i}}{c_{1r}} + \frac{9}{32} \rho \omega \frac{c_{3i}}{c_{1r}^2} v_0^2 \right) v_t^2
 \end{aligned} \tag{2-119}$$

とすることができる。ただし、 $k = \frac{\omega}{c}$, $c = \sqrt{\frac{c_{1r}}{\rho}}$ の関係を用いた。

また、エネルギー損失はLCR等価回路において、動アドミタンス部を流れる電流 v と抵抗 $r = 2m\beta$ によって rv^2 と表される。よって、

$$\beta = \frac{1}{2} \omega \frac{c_{1i}}{c_{1r}} + \frac{9}{32} \rho \omega \frac{c_{3i}}{c_{1r}^2} v_0^2 \tag{2-120}$$

なる関係が導かれる。これは、式(2-57)

$$\beta = \beta_0 + p \frac{v_0^2}{l} \tag{2-57 再掲}$$

で表される、減衰係数と振動速度の関係式を導くことができる。また、式(2-57)(2-68)(2-120)から、

$$c_{3i} = \frac{32}{9} \frac{c_{1r}^2}{\rho \omega_0 l} p = \frac{16}{9} \frac{c_{1r}^2 A^2}{\rho \omega_0 L} \eta \tag{2-121}$$

として、3次弾性定数虚部と非線形パラメータ p, η の関係性が得られる。

以上より、圧電方程式に 3 次弾性定数を加え非線形圧電方程式とすることで、電氣的過渡応答測定によって観測される共振周波数の減少や、損失の増加などの非線形現象を導くことができることを示した。また、3 次弾性定数と非線形パラメータの関係式を導出したことで、非線形 *LCR* 等価回路によるアドミッタンス測定の解析から非線形パラメータ ξ, η を求めることで、3 次弾性定数を求めることができるようになった。非線形パラメータは振動子形状や他の物性値によって変化するため、圧電材料の非線形特性を定量的に比較するためには、3 次弾性定数を評価指標とすることが望ましい。

2.5 非線形伝達マトリックス

前節において、高次弾性定数を導入した非線形圧電方程式を用いることで、非線形現象を表すことができると明らかになった。そこで、圧電振動を要素分割して論ずるための手法として、伝達マトリックスについて述べる。伝達マトリックスを用いることで、境界条件の異なる圧電体や非圧電体が連結された場合や、発熱によって部分的に物性値の変化が生じた場合にも対応することができる。

はじめに、線形の伝達マトリックスの導出を行い、その後非線形圧電方程式を用いることで変化する部分について述べる。幅 w 、高さ h 、長さ l の圧電横効果振動子(分極厚み方向)に分極と同じ方向に電圧 V を与え、長手方向に振動させることを考える。圧電体の長手方向に x 軸をとり、圧電体中央を $x = 0$ とする。

圧電方程式(2-24)から、駆動電圧を $V = V_0 e^{j\omega t}$ とすると、

$$T_1 = \overline{c_{11}^E} S_1 - \overline{e_{31}} \frac{V}{h} \quad (2-122)$$

となる。振動子先端($x = -\frac{l}{2}$)にかかる力の大きさを F_1 とすると、

$$F_1 e^{j\omega t} = -whT_1 = -wh \left(\overline{c_{11}^E} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \right) \quad (2-123)$$

となる。ここで振動変位の一般式

$$u(x, t) = \left(A \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right) e^{j\omega t} \quad (2-124)$$

を代入し変形して、

$$F_1 e^{j\omega t} - w\overline{e_{31}}V_0 e^{j\omega t} = -wh\overline{c_{11}^E} \frac{\omega}{c} \left(-A \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right) e^{j\omega t} \quad (2-125)$$

となる。両辺 $e^{j\omega t}$ で割って、

$$F_1 - w\overline{e_{31}}V_0 = -wh\overline{c_{11}^E} \frac{\omega}{c} \left(-A \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right) \quad (2-126)$$

ここで、式(2-124)より $x = -\frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$ における振動速度をそれぞれ $v_1 e^{j\omega t}$, $v_2 e^{j\omega t}$ とおくと、

$$v_1 = j\omega \left(A \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - B \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right) \quad (2-127)$$

$$v_2 = j\omega \left(A \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right) \quad (2-128)$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & -\sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2-129)$$

よって定数 A, B は

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2j\omega \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \\ -\cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2-130)$$

と表される。

式(2-130)を式(2-126)に代入して、

$$\begin{aligned} F_1 - w\overline{e}_{31}V_0 &= -whc_{11}^E \frac{\omega}{c} \frac{1}{2j\omega \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \left\{ (v_1 + v_2) \sin^2\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right. \\ &\quad \left. + (-v_1 + v_2) \cos^2\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right\} \\ &= \frac{jwhc_{11}^E}{2c} \left\{ (v_1 + v_2) \tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + (-v_1 + v_2) \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \right\} \\ &= \frac{jwhc_{11}^E}{2c} \left\{ \left(\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \right) v_1 + \left(\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \right) v_2 \right\} \\ &= \frac{jwhc_{11}^E}{c} \left\{ -\frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)} v_1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)} v_2 \right\} \end{aligned} \quad (2-131)$$

となる。ただし、式変形の途中で以下の関係式を用いた。

$$\tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = -\frac{2}{\tan \theta} \quad (2-132)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\sin \theta} \quad (2-133)$$

ここで波数 k 、力係数 A 、音響インピーダンス Z_0 、断面積 S を以下のようにおいた。

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2-134)$$

$$A = w\overline{e}_{31} \quad (2-135)$$

$$Z_0 = \frac{\overline{c_{11}^E}}{c} \quad (2-136)$$

$$S = wh \quad (2-137)$$

ただし、ここでの力係数 $A = we_{31}$ は LCR 等価回路における力係数 $A = 2w\overline{e_{31}}$ の $1/2$ の値になっている。これにより式(2-131)は、

$$F_1 - AV_0 = -\frac{jSZ_0}{\tan(kl)}v_1 + \frac{jSZ_0}{\sin(kl)}v_2 \quad (2-138)$$

となる。同様に $x = \frac{l}{2}$ の端面にかかる力の大きさを F_2 とすると、

$$F_2 - AV_0 = -\frac{jSZ_0}{\sin(kl)}v_1 + \frac{jSZ_0}{\tan(kl)}v_2 \quad (2-139)$$

となるので、式(2-138)-(2-139)より、 v_1 を消去して、 F_1 を F_2 と v_2 の式で表すと、

$$F_1 = \cos(kl)F_2 - \frac{SZ_0}{j}\sin(kl)v_2 + (1 - \cos(kl))AV_0 \quad (2-140)$$

また、 F_1 を消去して、 v_1 を F_2 と v_2 の式で表すと、

$$v_1 = -\frac{\sin(kl)}{jSZ_0}F_2 + \cos(kl)v_2 + \frac{\sin(kl)}{jSZ_0}AV_0 \quad (2-141)$$

となるので、式(2-140)-(2-141)をまとめて、

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kl) & -\frac{SZ_0}{j}\sin(kl) & (1 - \cos(kl))A \\ -\frac{\sin(kl)}{jSZ_0} & \cos(kl) & \frac{\sin(kl)}{jSZ_0}A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (2-142)$$

となり、圧電体の伝達マトリックスが得られる。

さらに、圧電体を流れる電流 $Ie^{j\omega t}$ を考えると、静電容量を C_d として、

$$Ie^{j\omega t} = j\omega C_d V_0 e^{j\omega t} + A(v_2 e^{j\omega t} - v_1 e^{j\omega t}) \quad (2-143)$$

となっているので、式(2-141)より、

$$\begin{aligned} I &= j\omega C_d V_0 + A(v_2 - v_1) \\ &= j\omega C_d V_0 + Av_2 - A \left\{ -\frac{\sin(kl)}{jSZ_0}F_2 + \cos(kl)v_2 + \frac{\sin(kl)}{jSZ_0}AV_0 \right\} \\ &= \frac{\sin(kl)}{jSZ_0}AF_2 + (1 - \cos(kl))Av_2 + \left(j\omega C_d - \frac{\sin(kl)}{jSZ_0}A^2 \right)V_0 \end{aligned} \quad (2-144)$$

となって、式(2-142)に加える事で、

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \\ V_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kl) & -\frac{SZ_0}{j} \sin(kl) & (1 - \cos(kl))A & 0 \\ -\frac{\sin(kl)}{jSZ_0} & \cos(kl) & \frac{\sin(kl)}{jSZ_0} A & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin(kl)}{jSZ_0} A & (1 - \cos(kl))A & j\omega C_d - \frac{\sin(kl)}{jSZ_0} A^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \\ V_0 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (2-145)$$

となり、電流を含めた圧電体の伝達マトリックスが得られる^[1]。

以上のように線形の圧電方程式から伝達マトリックスを導出することができる。非線形成分を含めた伝達マトリックスを考える場合には、式(2-84)の非線形圧電方程式から伝達マトリックスを導出する。

$$T_1 = \overline{c_{11}^E} S_1 + c_{11(3)}^E S_1^3 - \overline{e_{31}} E_3 \quad (2-84 \text{ 再掲})$$

駆動電圧を $V = V_0 e^{j\omega t}$ とすると、

$$T_1 = \overline{c_{11}^E} S_1 + c_{11(3)}^E S_1^3 - \overline{e_{31}} \frac{V}{h} \quad (2-146)$$

また、振動変位の一般式は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(A \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \right) e^{j(\omega t + \theta)} \\ &= u_x e^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (2-147)$$

とおく。ただし ω を駆動周波数、 c を音速、 θ を位相遅れとする。

振動子先端 ($x = -\frac{l}{2}$) にかかる力の大きさを F_1 とすると、

$$F_1 e^{j\omega t} = -wh \left(\overline{c_{11}^E} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} + c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} \right)^3 - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \right) \quad (2-148)$$

式(2-147)を代入して、

$$\begin{aligned} F_1 e^{j\omega t} &= -wh \left(\overline{c_{11}^E} \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} e^{j(\omega t + \theta)} + c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} \right)^3 (e^{j(\omega t + \theta)})^3 \right. \\ &\quad \left. - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (2-149)$$

となるが、ここで式(2-92)を用いて 3 次高調波成分を排除すると、

$$F_1 e^{j\omega t} = -wh \left(\overline{c_{11}^E} \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} e^{j(\omega t+\theta)} + \frac{3}{4} c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} \right)^3 e^{j(\omega t+\theta)} - \overline{e_{31}} \frac{V_0}{h} e^{j\omega t} \right) \quad (2-150)$$

となる。変形して、

$$\begin{aligned} F_1 e^{j\omega t} - w \overline{e_{31}} V_0 e^{j\omega t} &= -wh \left(\overline{c_{11}^E} + \frac{3}{4} c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} \right)^2 \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} e^{j(\omega t+\theta)} \\ &= -wh \left(\overline{c_{11}^E} + \frac{3}{4} c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} e^{j(\omega t+\theta)} \end{aligned} \quad (2-151)$$

となる。ここで、非線形成分を含んだスティフネス c' を新たに

$$c'(x) = \overline{c_{11}^E} + \frac{3}{4} c_{11(3)}^E \left(\frac{\partial u_x(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (2-152)$$

とおくことにより、式(2-151)は

$$F_1 e^{j\omega t} - w \overline{e_{31}} V_0 e^{j\omega t} = -wh c' \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{l}{2}} e^{j(\omega t+\theta)} \quad (2-153)$$

となる。これは、式(2-123)のスティフネス $\overline{c_{11}^E}$ を c' に変えたものとなっている。

すなわち、非線形成分を含む伝達マトリックスは式(2-145)と同形になる。また、式(2-152)から、非線形スティフネス c' は長手方向の位置毎の歪みに応じて変化することが明らかとなった。

以下線形の場合と同様の導出を行うことにより、非線形成分を含む伝達マトリックスは

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \\ V_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k'l) & -\frac{SZ'}{j} \sin(k'l) & (1 - \cos(k'l))A & 0 \\ -\frac{\sin(k'l)}{jSZ'} & \cos(k'l) & \frac{\sin(k'l)}{jSZ'} A & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin(k'l)}{jSZ'} A & (1 - \cos(k'l))A & j\omega C_d - \frac{\sin(k'l)}{jSZ'} A^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \\ V_0 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (2-154)$$

と求められる。伝達マトリックスの形は線形の場合と同様であるが、その中のパラメータ音速 c 、波数 k' 、力係数 A 、音響インピーダンス Z' 、断面積 S は以下のように変化する。

$$c = \sqrt{\frac{c'}{\rho}} \quad (2-155)$$

$$k' = \frac{\omega}{c} \quad (2-156)$$

$$A = w\bar{e}_{31} \quad (2-157)$$

$$Z' = \frac{Ec'}{c} \quad (2-158)$$

$$S = wh \quad (2-159)$$

以上のように、非線形スティフネス c' は歪みに応じて変化し、それに応じて音速、音響インピーダンス等のパラメータも変化する。ただし、力係数や制動容量等の圧電性、誘電性に関わるパラメータは変化しない。

実際の計算の際には、全長を N 、分割数を d とした場合、図 2.22 のように圧電振動子を長手方向に分割し、各部分の伝達マトリックス T_1, T_2, T_3, \dots を次々に掛け合わせ各断面での力や速度を求めていく。線形の伝達マトリックスの場合では、振動モードを求めるために計算上分割するとしても、材料が共通であれば分割した各部位での伝達マトリックスは共通である。しかし、非線形伝達マトリックスの場合には各分割部位での歪みに応じて見かけのスティフネスが変化するため、細かな分割が必須となる。また、各部位のスティフネスの計算に必要な歪みは伝達マトリックスの計算によって得られ、伝達マトリックスはスティフネスを用いて計算されるため、繰り返し計算が必要となる。実際の計算アルゴリズムについて、図 2.23 に示す。

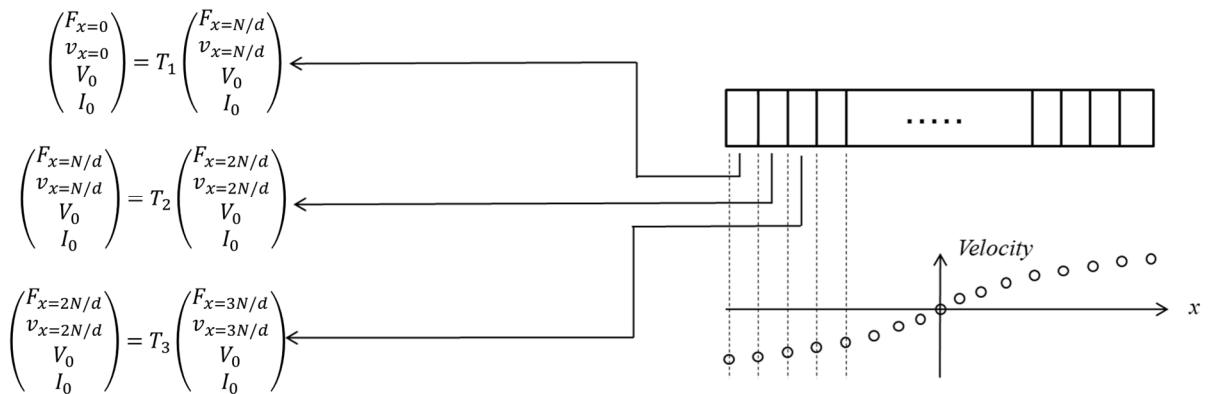


図 2.22 伝達マトリックスの計算手法

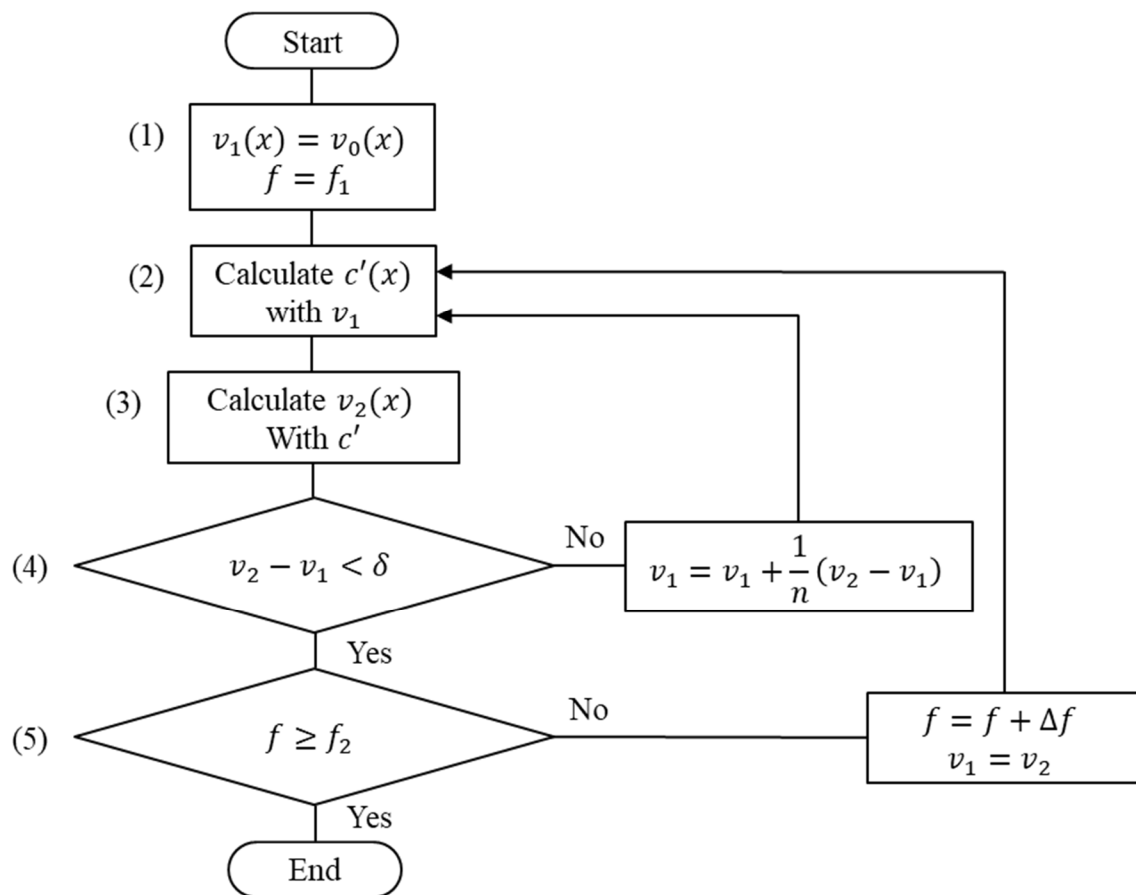


図 2.23 非線形伝達マトリックスを用いたアドミッタンス計算のフローチャート

図 2.23 を用いて、周波数 f_1 から f_2 までの周波数スイープを行う場合のアドミッタンス曲線の計算方法について述べる。図中の v_0 は初期値として代入する速度分布、 v_1 はステイフネス c' の計算に用いる速度分布、 v_2 は伝達マトリックスの計算により得られる速度分布を表す。図中の番号に沿って説明を行う。

- (1) 本アルゴリズムでは速度分布からステイフネスを求める計算と、 c' を含む伝達マトリックスから速度分布を求める計算のループを組み、速度分布が収束するまで計算を行うが、ループ計算を開始するためには1回目の計算のみ初期値を代入する必要がある。また、今回の計算では周波数スイープを行った際のアドミッタンスカーブを考えるため、ある周波数でループ計算を行い速度分布が収束した後、周波数をスイープ方向に変化させ、次の周波数でのループ計算を開始するという手順で、各周波数で収束する速度分布や電流を求めていく。その際2つ目以降の周波数($f \neq f_1$)では一つ前の周波数で収束した速度分布をループ計算の初期速度

分布として用いている。すなわち、初期値として代入しなければならないのは、スイープ開始点の周波数 $f = f_1$ でのループ計算の初期速度分布である。ここでは初期速度分布 $v_0(x)$ の全ての成分を0として計算を始めた。このようにすることで、周波数 $f = f_1$ での1回目の計算のみ式(2-152)からスティフネス $c' = \overline{c_{11}^E}$ となり、線形成分の計算を行ったのち2回目以降の計算で非線形成分を含んだ速度分布を求めていくこととなる。

- (2) 速度分布 $v_1(x)$ を用いて、スティフネス $c'(x)$ の計算を行った。歪み $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ は

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x}{\omega} \right) = \frac{1}{\omega} \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2-160)$$

のように速度分布から求めた。式(2-152)より、スティフネス c' を計算した。

- (3) 計算したスティフネス $c'(x)$ を用いて、非線形成分を含めた伝達マトリックス(2-154)により各位置 x での力 $F(x)$ と速度 $v_2(x)$ 、電流 $I(x)$ を求めた。

- (4) 伝達マトリックスの計算により得られた速度分布 $v_2(x)$ とスティフネスの計算に用いた速度分布 $v_1(x)$ を各位置 x において比較し、その差が δ 以上である場合、 $v_1(x)$ を更新して再びスティフネスの計算(2)に戻る。ここで周波数が共振周波数に近づいた場合、急激な速度変化により計算結果が振動し収束しなくなってしまう現象が見られたため、更新後の v_1 として、 $v_1 + \frac{1}{n}(v_2 - v_1)$ を代入した。これは、速度変化に対して $1/n$ の値で速度の更新を実行するという意味であり、ここでは $n = 10$ として計算した。また、収束判定の閾値 $\delta = \frac{v_1 + v_2}{2} \times 1.0 \times 10^{-5}$ とした。ただし、 v_1 、 v_2 は速度分布であるため、全分割面での v_2 と v_1 の速度差分を計算し、これが平均値 $\frac{v_1 + v_2}{2}$ の0.001%の変化に収まるまで繰り返し計算を行った。

- (5) 周波数 f が f_2 未満である場合は周波数を

$$f = f + \Delta f \quad (2-161)$$

とスイープ方向に増減し、スティフネスの計算(2)に戻る。 Δf は周波数の刻み幅である。その際次の周波数におけるループ計算を開始するにあた

って、ステイフネス $c'(x)$ の1回目の計算に用いる速度分布 $v_1(x)$ を、収束した速度分布 $v_2(x)$ とする。周波数 f が f_2 以上になったところで終了する。

以上のような計算手法を MATLAB(MathWorks)にて実装し、圧電セラミックス振動子(富士セラミックス PZT C-203 $7 \times 2 \times 44$ mm)のアドミッタンス曲線の計算を行った。実行プログラムを付録(1)に示す。得られたアドミッタンスカーブおよび位相曲線を測定結果と共に図 2.24-図 2.25 に示す。また、図 2.26 に共振周波数周辺でのアドミッタンスカーブを示す。また、計算に用いた圧電振動子の物性値を表 2.2 に示す。表中の高次弾性定数は、図 2.24 に示すアドミッタンス曲線の測定結果に対して、非線形 LCR 等価回路によるカーブフィッティングを行って求めた。圧電定数、比誘電率、1次弾性定数、機械的品質係数については、同じ振動子を 0.5 V_{pp} の低電圧駆動した際のアドミッタンス曲線に対して、線形 LCR 等価回路を用いたカーブフィッティングを行って求め、密度については電子天秤で計測を行った。駆動電圧は 10 V_{pp} 、周波数範囲は 33 kHz から 39 kHz であり、DOWN スイープと UP スイープの計算をそれぞれ行った。なお、プログラム上では x 軸方向に圧電体を分割して計算を行っており、ここでは分割数を 101 として計算した。通常、線形の伝達マトリックスでは振動モードが正弦波と仮定されているため、分割数の大小に依らず正確な計算を行うことができる。しかし、本研究で提案する非線形伝達マトリックスの場合には、(2)の非線形ステイフネスの計算において、歪みの誤差が大きければ各部位での非線形ステイフネスを正確に計算できないため、分割数が計算精度に影響を与える。一方で、分割数の増加は計算速度を増加させるため、収束計算が行える範囲内で最小限の分割数とすることが望ましい。また、分割数を偶数とすると、振動子中央に分割面が生じ、振動速度が 0 となることから、(4)の収束判定の際に平均値 $\frac{v_1+v_2}{2}$ に対する変化の割合で収束判定をすることができなくなる。これは収束判定のアルゴリズム次第で回避が可能であるが、本研究では分割数は奇数とした。以上の条件から、ここでは分割数を 101 として計算を行った。

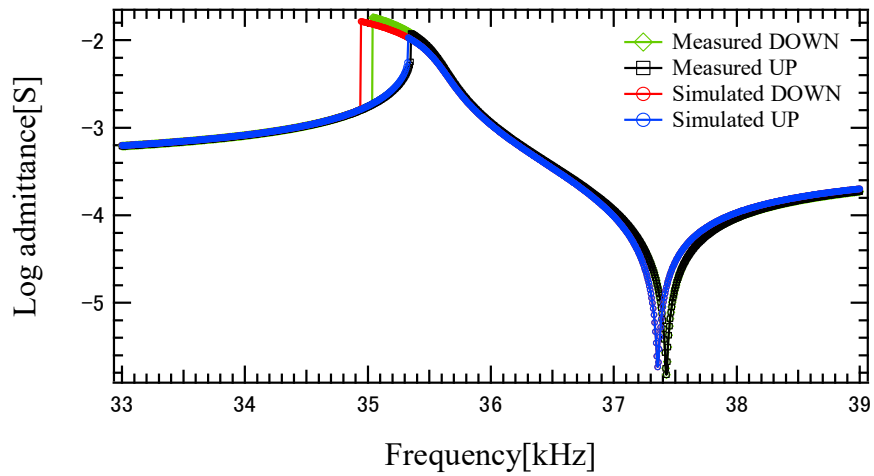


図 2.24 伝達マトリックスを用いて計算した圧電振動子のアドミッタンス曲線

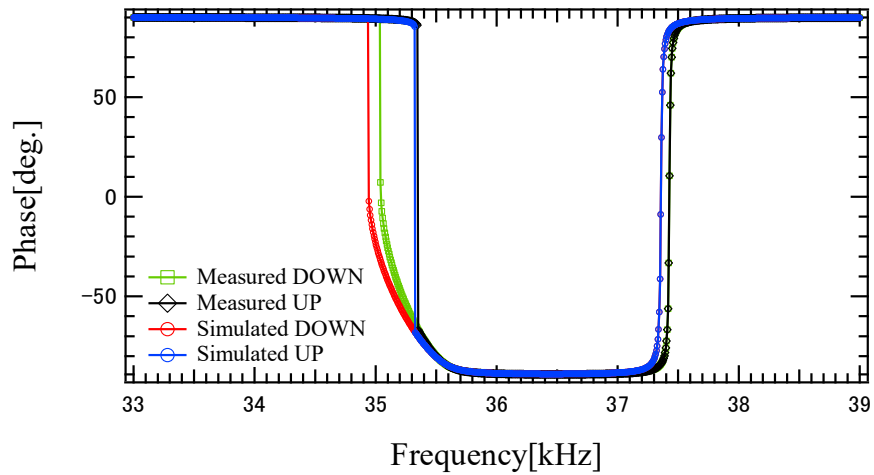


図 2.25 伝達マトリックスを用いて計算した圧電振動子の位相曲線

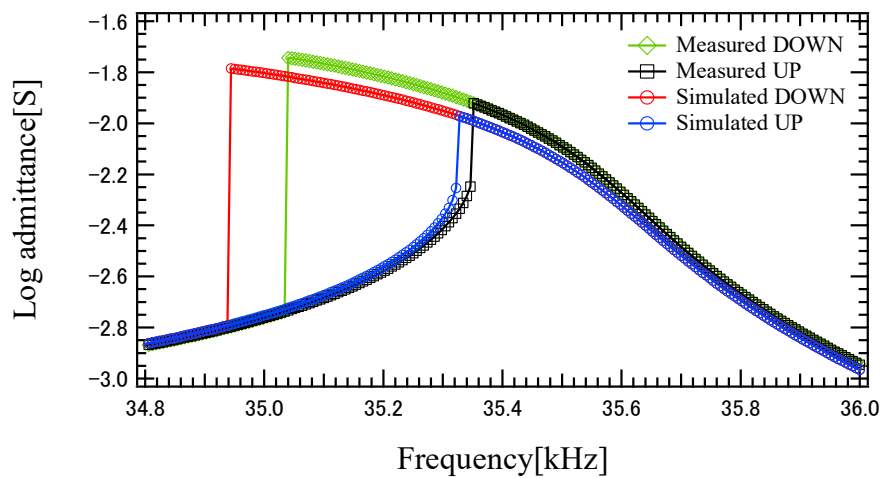


図 2.26 伝達マトリックスを用いて計算した共振付近でのアドミッタンスカーブ

表 2.2 計算に用いた圧電振動子の物性値

圧電定数 d_{31}	-139 [pC/N]
比誘電率 $\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$	1370
1 次弾性定数 $\overline{c_{11}^E}$	$7.52 \times 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$
機械的品質係数 Q_m	2480
密度 ρ	$7.7 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}$
3 次弾性定数実部 $\text{Re}(c_{11(3)}^E)$	$-1.25 \times 10^{17} \text{ [N/m}^2\text{]}$
3 次弾性定数虚部 $\text{Im}(c_{11(3)}^E)$	$8.46 \times 10^{15} \text{ [N/m}^2\text{]}$

計算されたアドミッタンス曲線は測定結果によく一致しており、跳躍現象、共振周波数の減少、ピーク値の減少、などの非線形現象も再現できている。また、周波数スイープの方向と同じ方向に周波数を増加・減少させながら計算を行い、収束した速度分布を次の周波数での初期値として代入して計算を行うアルゴリズムによって、UP スイープと DOWN スイープで異なる曲線が得られており、実際の測定で非線形効果により発生する、周波数掃引の経路に依存して振動状態が変化するヒステリシス現象を再現することができている。

以上のように、非線形伝達マトリックスを用いることで、要素分割で非線形振動を解析することができるようになった。これにより、非線形 LCR 等価回路では不可能であった圧電材料と非圧電材料が接続された圧電デバイスの設計にも用いることができ、ボルト締めランジュバン振動子の非線形特性解析に用いられている^[18]。また、5 章で述べるように、自己発熱を考慮した、実際のハイパワー駆動時の状況により近い計算が行えるようになる。

2.6 結論

本章では、圧電振動を議論するための一般的理論として圧電方程式と LCR 等価回路について述べ、非線形振動の測定および解析の先行研究として、電氣的過渡応答測定と非線形 LCR 等価回路を示した。さらに、圧電方程式に高次弾性定数を導入することで、非線形現象を説明することができると述べ、非線形伝達マトリックスとその計算アルゴリズムを提案し、圧電振動子のアドミッタンス特性を計算することで、非線形現象を再現可能であることを示した。これにより、これまで圧電振動子単体の非線形特性解析しか行えていなかったが、ランジュバン振動子のような異種材料が接続された圧電デバイスへと非線形特性解析の領域を拡大することができた。また、5章において述べるような、自己発熱を考慮したハイパワー特性の解析を行うことが可能になる。さらに、本章では圧電横効果について述べたが、4章ではより一般の圧電デバイスで用いられることの多い、圧電縦効果の非線形伝達マトリックスの導出を行う。

また、本章で導入された高次弾性定数はそれぞれの圧電材料固有の物性値であると考えられるが、その大きさはハイパワー駆動時の特性に大きく影響を与える。例えば高次弾性定数の絶対値が小さい材料では、共振周波数の減少が少なく抑えられる、振動速度の飽和が起こりにくいと予想される。次章では、圧電材料のハイパワー特性を評価する方法として、高次弾性定数測定を行い、ハイパワー特性の観点から異なる組成の圧電材料の比較を行う。

参考文献

- [1] 森田剛：“圧電現象”，森北出版，2017
- [2] T. L. Jordan, and Z. Ounaies: “Piezoelectric Ceramics Characterization”, *National Aeronautics and Space Administration (NASA) ICASE Report*, No. 2001-28, 2001
- [3] K. Ishii, N. Akimoto, S. Tashiro and H. Igarashi: “Jump Phenomena of Current in Piezoelectric-ceramic Vibrators Under High Power Conditions”, *Journal of the European Ceramic Society*, Vol. 19, pp.1157-1160, 1999
- [4] K. Uchino, J. Zheng, A. Joshi, Y. H. Chen and S. Yoshikawa: “High Power Characterization of Piezoelectric Materials”, *Journal of Electroceramics*, 2:1, pp.33-40, 1998
- [5] T. Yamamoto and F. Mizuno: “Degradation of Piezoelectric Properties at Resonant Operational Mode by a Large Unput Power”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 34, pp.2627-2631, 1995
- [6] M. Umeda, K. Nakamura and S. Ueha: “The Measurement of High-Power Characteristics for a Piezoelectric Transducer Based on the Electrical Transient Response”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol.37, pp.5322-5325, 1998
- [7] M. Umeda, K. Nakamura and S. Ueha, "Effects of Vibration Stress and Temperature on the Characteristics of Piezoelectric Ceramics under High Vibration Amplitude Levels Measured by Electrical Transient Responses", *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 38 pp. 5581–5585, 1999
- [8] M. Umeda, K. Nakamura and S. Ueha, "The measurement of High Power Characteristics for a Piezoelectric Transducer Based on the Electrical Transient Response", *Japanese Journal of Applied Physics. Vol. 37*, pp.5322–5325, 1998
- [9] Y. Sasaki, S. Takahashi, M. Umeda, K. Nakamura and S. Ueha: “Behavior of piezoelectric ceramics under high sinusoidal vibration stress”, *Transactions of the*

Materials Research Society of Japan, Vol.27, pp.259-264, 2002

[10] Y. Liu, R. Ozaki and T. Morita: “Investigation of nonlinearity in piezoelectric transducers”, *Sensors and Actuators A*, Vol.277, pp.31-38, 2015

[11] 劉耀陽: “Nonlinear Modeling of Piezoelectric Transducers under High-power Operation”, 東京大学大学院新領域創成科学研究科博士論文, 2015

[12] S. Takahashi, M. Yamamoto and Y. Sasaki: “Nonlinear Piezoelectric Effect in Ferroelectric Ceramics”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 37, pp.5292-5296, 1998

[13] D. Banerjee and J. K. Bhattacharjee: “Analyzing jump phenomena and stability in nonlinear oscillators using renormalization group arguments”, *American Journal of Physics*, Vol. 78, pp.142-150, 2010

[14] 清水辰次郎: “非線形振動論”, 培風館, 1965

[15] 金持昭治, 赤星通次郎, 水野兼雄: “アルミニウムおよび銅多結晶金属における超音波伝ば速度の応力依存性と3次弾性定数の測定”, *The Society of Materials Science, Japan*, Vol. 27, No. 301, pp.974-979, 1978

[16] 比企能夫: “結晶の高次弾性”, 日本結晶学会誌, Vol. 16, pp.384-396, 1974

[17] B. Kaeswurm, F. H. Schader and K. G. Webber: “Ferroelectric, ferroelastic, piezoelectric, and dielectric properties of lead zirconate titanate from -150°C to 350°C”, *Ceramics International*, Vol. 44, pp.2358-2363, 2018

[18] 岩間 成裕, 三宅 奏, 森田 剛: “ボルト締めランジュバン振動子の非線形モデル化および非線形弾性係数の測定”, 超音波エレクトロニクス基礎と応用に関するシンポジウム(USE2018), 2E2-3, 2018

第3章 高次弾性定数測定による 圧電非線形振動解析

3.1 序論	73
3.2 測定方法	74
3.2.1 アドミッタンス測定	74
3.2.2 電氣的過渡応答測定	76
3.3 測定試料	77
3.3.1 チタン酸ジルコン酸鉛	77
3.3.2 ニオブ酸カリウムナトリウム	79
3.3.3 チタン酸ジルコン酸バリウム-チタン酸バリウムカルシウム	82
3.3.4 チタン酸비스マスナトリウム-チタン酸バリウム	83
3.3.5 ビスマス層状構造強誘電体	84
3.3.6 ニオブ酸リチウム単結晶	86
3.3.7 測定試料の特性	87
3.4 アドミッタンス測定	91
3.5 電氣的過渡応答測定	96
3.6 測定結果の考察	104
3.7 結論	112

3.1 序論

1 章で述べたように、圧電材料のハイパワー駆動時の特性は、これまでその原因解明が遅れていたことから、定量的な評価が困難であった。そのため、強力超音波デバイス用の圧電材料は、圧電定数や電気機械結合係数、機械的品質係数等の、実際のハイパワー駆動時の特性を表すとは限らない指標を元に選定されてきた。また、特に非鉛系の圧電材料について、飽和振動速度や共振周波数の変化量等の点で鉛系圧電材料よりも優れた圧電材料が複数報告されてきたが[1-2]、振動子寸法に依存した評価方法であることから、異なる非鉛圧電材料間での定量的な評価がなされてはおらず、そのためハイパワー向け圧電材料の開発指針も定まっていない。

前章では、圧電方程式に高次弾性定数を導入することで、非線形現象を再現することができることを示した。本章では、高次弾性定数を測定し、これを評価指標としてハイパワー特性の定量的評価を行う手法を提案する。また、実際に異なる材料系、組成、添加物の圧電材料に対して、高次弾性定数の測定を行い、その比較を通じて、ハイパワー特性に優れる圧電材料の開発指針を得ることを目的とする。

3.2 測定方法

3.2.1 アドミッタンス測定

本研究では高次弾性定数を求めるための測定手法として、アドミッタンス測定と非線形 LCR 等価回路を用いたカーブフィッティングを用いる。圧電材料の圧電定数、ステイフネス、誘電率、Q 値等の線形圧電現象における物性値は、アドミッタンス曲線から求めることができる。まず非線形現象の生じない十分低い電圧での駆動でアドミッタンス曲線を測定し、式(2-55)を用いてカーブフィッティングを行った。

$$Y = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} + j\omega C_d \quad (2-55 \text{ 再掲})$$

次に、非線形現象が顕著に見られる高電圧駆動で、周波数の掃引方向を UP スweep と DOWN スweep の 2 通りを用いて 2 本のアドミッタンス曲線を測定し、式(2-65)を用いてカーブフィッティングを行った。(2-65

$$L \frac{di}{dt} + R_0 i + \eta i^3 + \frac{1}{C_0} \int i dt + \xi \omega^3 \left(\int i dt \right)^3 = V \quad (2-65 \text{ 再掲})$$

これによって、回路パラメータ L 、 R_0 、 η 、 C_0 、 ξ を求め、ここから式(2-118)(2-121)を用いて、高次弾性定数などの物性値を求めた。図 3.1 にアドミッタンス曲線の測定系を示す。圧電振動子は専用のステージで支持されており、上下面の電極と周波数特性分析器(FRA5097)を電力増幅器(NF 4010)と専用アダプター(PA-001-1840)を介して接続し、アドミッタンス曲線を測定した。測定用ステージには熱電対が備え付けてあり、振動子支持部の温度をデータロガーで観測しながら測定を行った。高電圧駆動でアドミッタンス曲線を測定する場合、自己発熱に注意する必要がある。圧電材料の温度変化は物性値変化を引き起こし、アドミッタンスの変化として現れるため、発熱を最小限にするよう、電圧の印加時間を抑える必要がある。FRA5097 では掃引速度を直接制御することはできないため、測定点数を減らすことで周波数掃引にかかる時間を調節した。カーブフィッティングを行うため、高電圧測定の結果にはアドミッタンスのヒステリシスや跳躍現象が顕著に現れる必要がある。そのために必要な印加電圧は圧電材料によって異なり、発熱の程度も材料によって異なる。そこで、測定中は振動子中央部を支持するステージに備え付けてある熱電対からデータロガーで振動子中央部の温度を計測し、温度が 1°C 以上上昇しないように測定点数の調節を行った。

本研究では主に以上のような方法で、アドミッタンス測定を用いて物性値を求めるが、電氣的過渡応答測定法でも同様に高次弾性定数を求めることができる。しかし、アドミッタンス測定法の方が要求される測定装置が少なく、電氣的過渡応答測定では時間軸で電圧や速度の信号が減衰するまで観測するため、高周波数での駆動ではオシロスコープに高いサンプリング周波数や大容量のデータ書き込み機能が要求されるため、提案手法が圧電材料の測定方法として広く使用されることを考え、本研究ではより簡便なアドミッタンス測定法を主に用いる。ただし、後に述べるように単結晶材料の測定の際には強度面の問題から電氣的過渡応答測定を用いた。

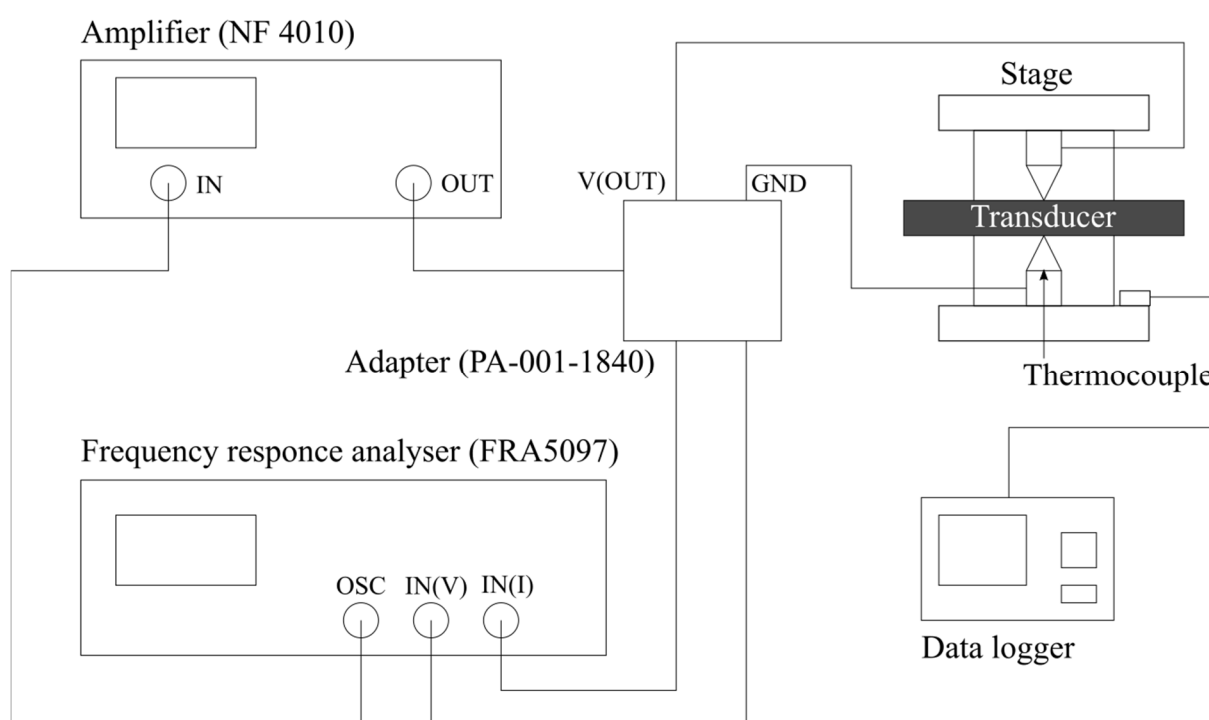


図 3.1 アドミッタンス測定の測定系

3.2.2 電氣的過渡応答測定

高次弾性定数を求めるもう一つの方法として、電氣的過渡応答測定を用いた。2.3.1 節で述べたように、圧電振動子の発熱を抑えながら大振幅で励振し、その特性を測定することができるが、前節でも述べたように、アドミッタンス測定法の方が簡便な手法である。ただし、アドミッタンス測定法ではアドミッタンス曲線を描くためにある程度の測定点数を確保しなければならず、圧電振動子への電圧印加時間の調節はしづらい。電氣的過渡応答測定法では電圧印加時間を任意に決めることができるため、強度に問題がある圧電材料等の場合は電氣的過渡応答測定法の方が適しているといえる。図 3.2 に測定系を示す。測定はファンクションジェネレータ(NF WF1974)からの信号を電力増幅器で増幅して振動子に印加し、その際の電流を電流計(Tektronix TCPA300)で測定する。

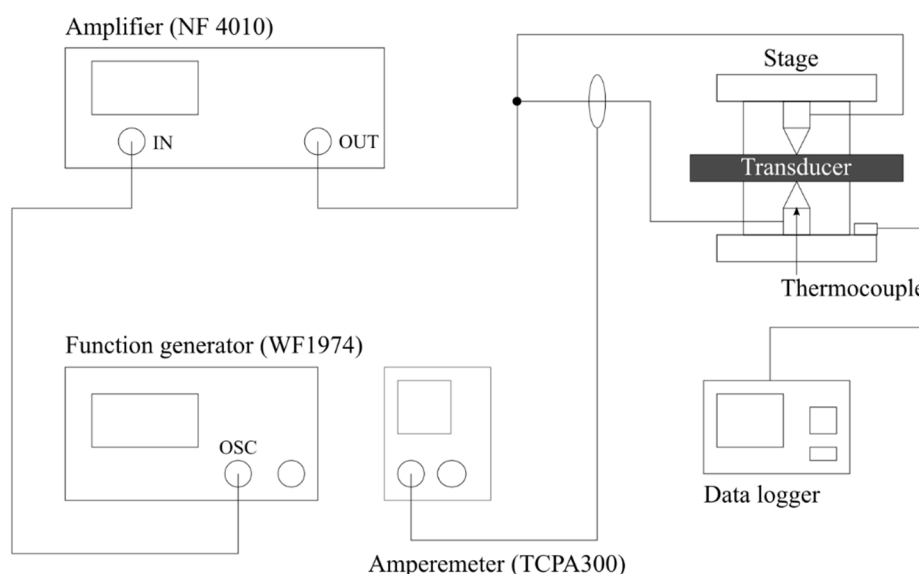


図 3.2 電氣的過渡応答測定の測定系

3.3 測定試料

本節では、測定を行った圧電材料について述べる。以下に示すようにいずれの材料もそれぞれの長所を持つと同時に、ハイパワー特性についても期待できる材料である。

3.3.1 チタン酸ジルコン酸鉛

1 章でも述べたように、チタン酸ジルコン酸鉛 $\text{Pb}(\text{Zr}_x, \text{Ti}_{1-x})\text{O}_3$ [PZT] は 1950 年代に発見されて以来、圧電応用デバイスに広く用いられている鉛系圧電材料である。その結晶構造は ABO_3 型のペロブスカイト構造であり、A サイトに Pb^{2+} イオン、B サイトに $\text{Zr}^{4+}, \text{Ti}^{4+}$ イオンが位置している。PZT はジルコン酸鉛 PbTiO_3 [PT] とチタン酸鉛 PbZrO_3 [PZ] が固溶した材料になっているため、B サイトに入るイオンは 2 種類存在する。PZ は単体では菱面体晶でキュリー温度が 240°C の反強誘電体、PT は正方晶でキュリー温度が 490°C の強誘電体であり、一般に用いられる固溶体比は $\text{Zr}:\text{Ti}=53:47$ とほぼ 1:1 の組成である。図 3.4 に PZT の相図を示す。ここから分かるように、 $\text{Zr}:\text{Ti}=53:47$ の比率は室温で結晶構造が菱面体晶と正方晶の間で変化する境目となっており、結晶構造が不安定になることで圧電性、誘電率が高められるため、圧電デバイスではこの組成がよく用いられる。このような組成変化によって結晶構造が変化する境界のことをモルフォトロピック相境界(MPB)と呼び、PZT に限らず固溶体系の強誘電体材料ではよく用いられる。しかし、他の材料には見られない PZT の特筆すべき点は、図 3.4 を見ると分かるように MPB が温度によらずほぼ一定の組成になっていることである。そのため、キュリー点(T_c)の約 350°C まで PZT は優れた圧電性と温度安定性を両立させることができおり、発見以来 50 年以上にわたって圧電応用デバイスに用いられている理由の一つとなっている。

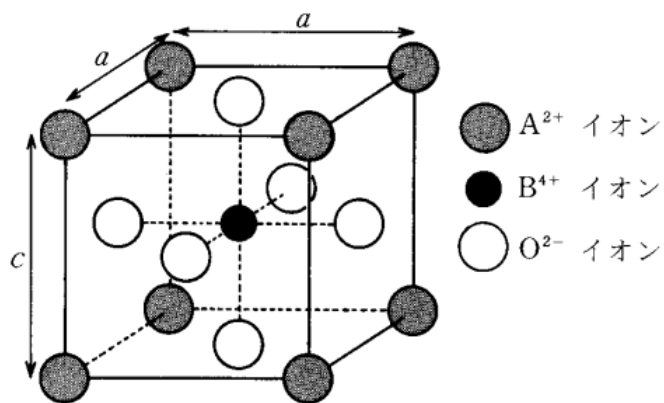


図 3.3 ペロブスカイト構造

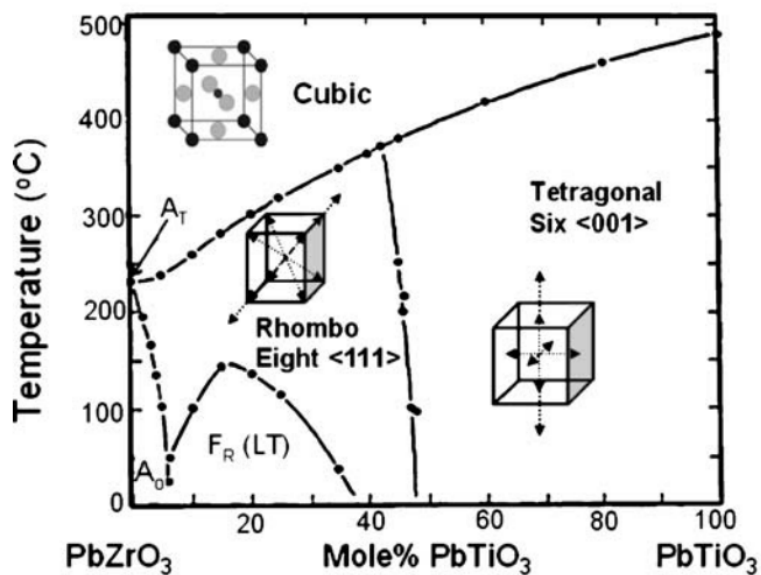


図 3.4 PZT の相図^[3]

3.3.2 ニオブ酸カリウムナトリウム

ニオブ酸カリウムナトリウム $(\text{K}, \text{Na})\text{NbO}_3$ [KNN] はニオブ酸カリウム KNbO_3 とニオブ酸ナトリウム NaNbO_3 の固溶体材料である。材料の特色としては T_c が比較的高いことが挙げられる。図 3.5 に示すように約 400°C 以上にならないと、結晶構造が立方晶(図中 P_c)にならず異方性を失わないので、圧電性を保っていられる。ただし、図 3.4 と比べれば分かるように、MPB は PZT のように垂直ではないため、PZT に比べれば圧電特性は不安定である。しかし、KNN 系材料は非鉛圧電材料の中でも活発に研究され、実用化を有望視されている。その発端となったのが、2004 年に豊田中央研究所の Saitou らが *Nature* に発表した $(\text{K}_{0.44}\text{Na}_{0.52}\text{Li}_{0.04})(\text{Nb}_{0.86}\text{Ta}_{0.10}\text{Sb}_{0.04})\text{O}_3$ の組成である^[4]。この組成(LF4)は $d_{33} = 300$ pC/N、配向制御を行った試料(LF4T)では $d_{33} = 416$ pC/N と PZT に匹敵する高い圧電定数を実現しており、図 3.6 に示すように配向制御によって優れた温度安定性も得られている。

また、KNN 系材料は耐還元性が高く、PZT では用いることのできない Ni 電極を用いてコストを抑えることができることも示され、実際に積層圧電素子が製作されている^[5]。材料そのものの製造コストが高いという面はあるが、電極枚数の多い積層型では総合的なデバイスの価格を抑えることもできる可能性がある。

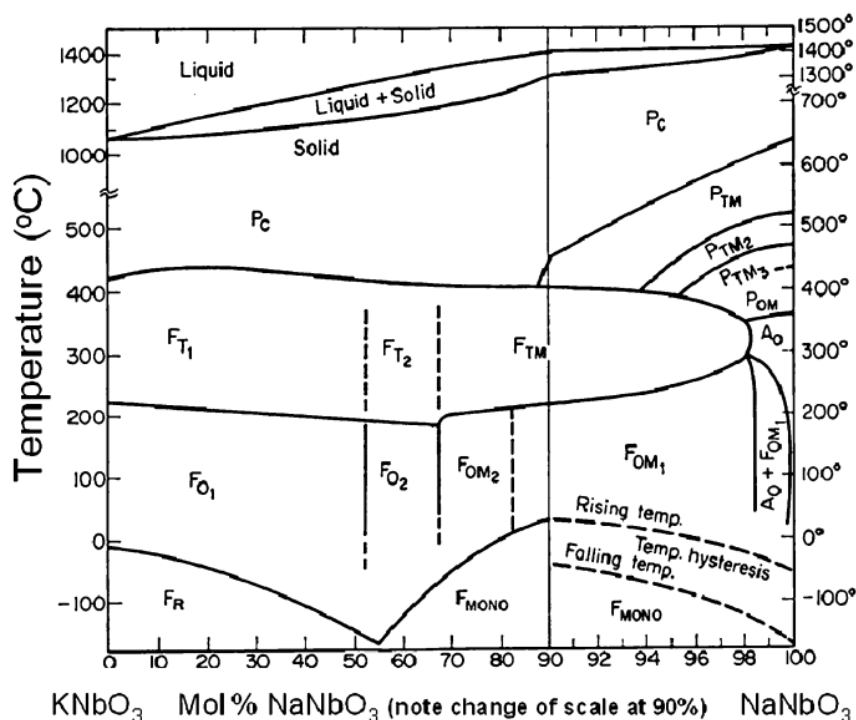
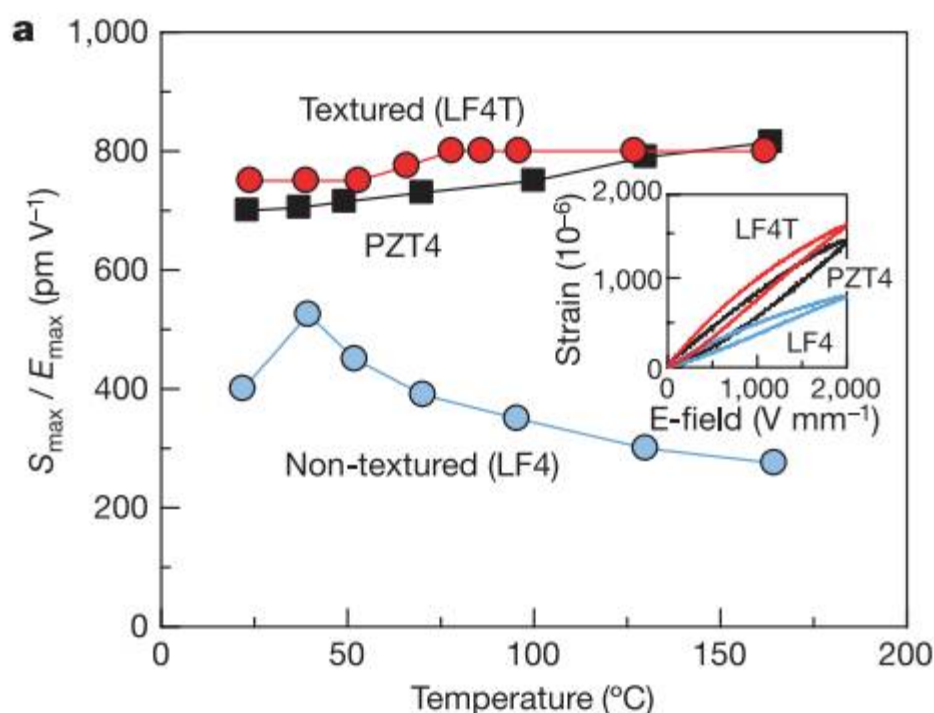


図 3.5 KNN の相図^[3]

図 3.6 LF4、LF4T、PZT の電界誘起歪みの温度依存性^[4]

ハイパワー特性の面では、Cu 添加を行って機械的品質係数 Q_m を向上させた CuO-KNN について、非線形 LCR 等価回路と電氣的過渡応答測定法を用いて式(2-57)(2-58)で用いられる非線形パラメータ p , q を測定しており、PZT との比較が行われている^[6]。表 3.1 に示すように、PZT(富士セラミックス C-203, C-6)に比べて絶対値の小さな非線形パラメータが得られており、ハイパワー特性も有望であると考えられる。

表 3.1 CuO-KNN と PZT の非線形パラメータの比較^([6]を元に作成)

	p [s/m]	q [s/m]
Hard PZT	2.58×10^1	-4.86×10^2
Soft PZT	5.03×10^3	-1.08×10^4
CuO-KNN	2.44×10^0	-2.79×10^1

今回の測定に用いた組成は、日本特殊陶業株式会社により開発された $(K_{1-x}Na_x)CaLiNb-NbTiK-BaZr-CoFeZn$ [KNN-NTK]である^[7-10]。組成比 K:Na を変

更することで、 $0.56 \leq x \leq 0.67$ 付近において、正方晶と斜方晶を共存させ、電気機械結合係数 $k_p = 0.56$ と高い値を実現している。

3.3.3 チタン酸ジルコン酸バリウム-チタン酸バリウムカルシウム

チタン酸ジルコン酸バリウム-チタン酸バリウムカルシウム ($1-x$)Ba(Zr,Ti)O₃- x (Ba,Ca)TiO₃ 系セラミックスはその圧電定数の高さから近年注目を集めている非鉛圧電材料である。 $x=0.5$ 付近に MPB が存在し、 $d_{33} = 546$ pC/N と非常に高い圧電定数を示すことが報告されている^[11]。しかしながら、 T_c が約 80℃ と非常に低くなっており、実用上の問題となっている。

今回の測定に用いた材料は、東京理科大学永田肇教授の研究グループで作製されたものであり、 T_c の低さという問題を補うため、 $x = 0.6$ 付近の正方晶での組成となっている。これにより、圧電定数は $d_{33} = 240$ pC/N まで低下するものの、 T_c を約 100℃ まで上昇させることができ、機械的品質係数 Q_m も高くとることができる。そのため、共振振動を用いるハイパワー駆動時の損失が小さくなり、ハイパワー向けの材料となっている。

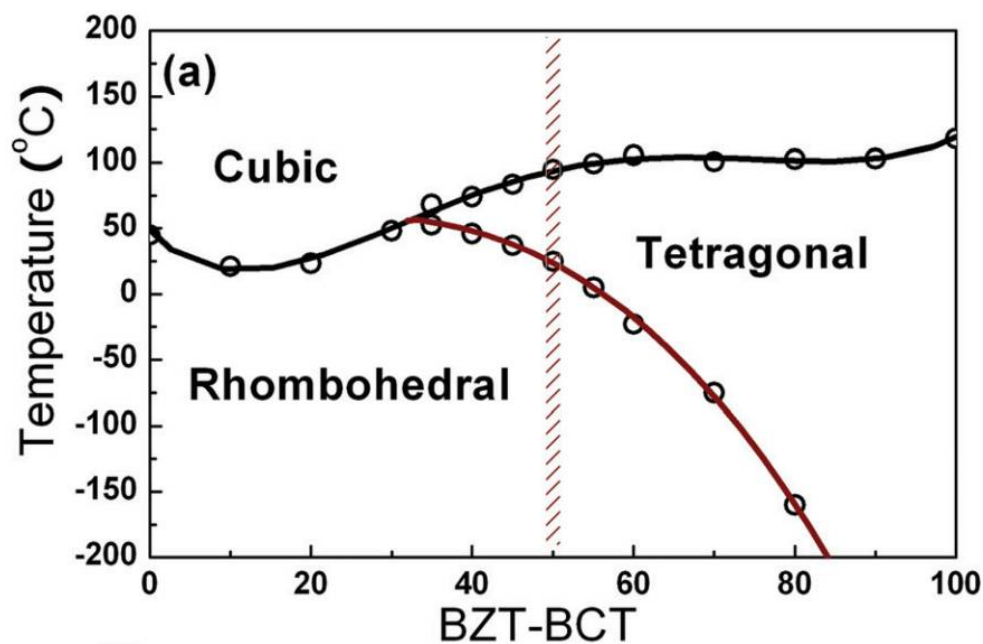


図 3.7 BZT-BCT の相図

3.3.4 チタン酸ビスマスナトリウム—チタン酸バリウム

チタン酸ビスマスナトリウム—チタン酸バリウム($\text{Bi}_{1/2}\text{Na}_{1/2}\text{TiO}_3\text{-BaTiO}_3$ [BNBT])は、ペロブスカイト型構造で、室温では菱面体晶の BNT と正方晶の BT との間で MPB を形成することで、圧電定数を高くすることができ、0.94BNT-0.06BT では $d_{33} = 125 \text{ pC/N}$ となる^[12]。BNT 系セラミックスは非鉛圧電材料の中では作製が比較的容易であることから、鉛系圧電セラミックスの代替候補として有力である^[13]。また、機械的強度が大きいことからハイパワー応用についても評価されており、BNT-BLT-BKT の 3 成分系セラミックスでは 1 章での図 1.1 でも示したように振動速度の飽和が起こりにくいことが確認されている^[14]。以上のハイパワー応用に優れた特性を利用して、本多電子株式会社によって図 3.8 のようにランジュバン振動子が製作され、実際に超音波洗浄機用振動子として実用化されている^[12]。



図 3.8 BNT 系圧電セラミックスを用いた超音波振動子^[15]

3.3.5 ビスマス層状構造強誘電体

ビスマス層状構造強誘電体(BLSF)は、ペロブスカイト型強誘電体と並び構造上多くの物質が強誘電性を発現するとされ、強誘電体材料として広く研究されてきた材料系である。図 3.9 に示すように、BLSF の結晶構造はペロブスカイトブロックが酸化ビスマス層に挟まれた構造となっている^[16]。BLSF の特徴として、 T_c が最大で約 900°C と高く、電気機械結合係数の異方性が大きい、共振周波数が温度変化に対して非常に安定であるなどの特徴が挙げられる。そのため、高温用、高周波数用で優れた安定性を生かすような使い方に適している。また、数千にも及ぶ非常に高い Q_m を持ち、発振子としての応用も有用であると考えられる。

ハイパワー特性についても測定がなされており、図 3.10 に示すように振動速度が印加電界に対して高い線形性を保っていることが分かる^[16]。

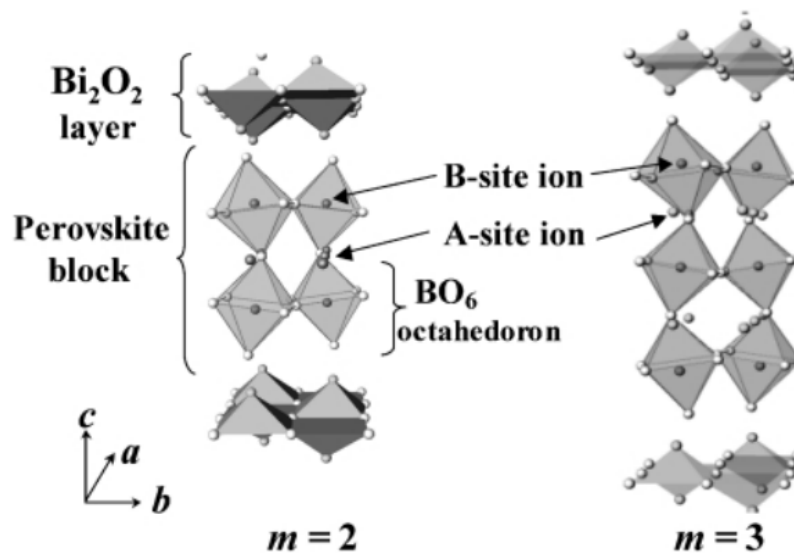


図 3.9 BLSF(SrBi₂Ta₂O₉)の結晶構造^[16]

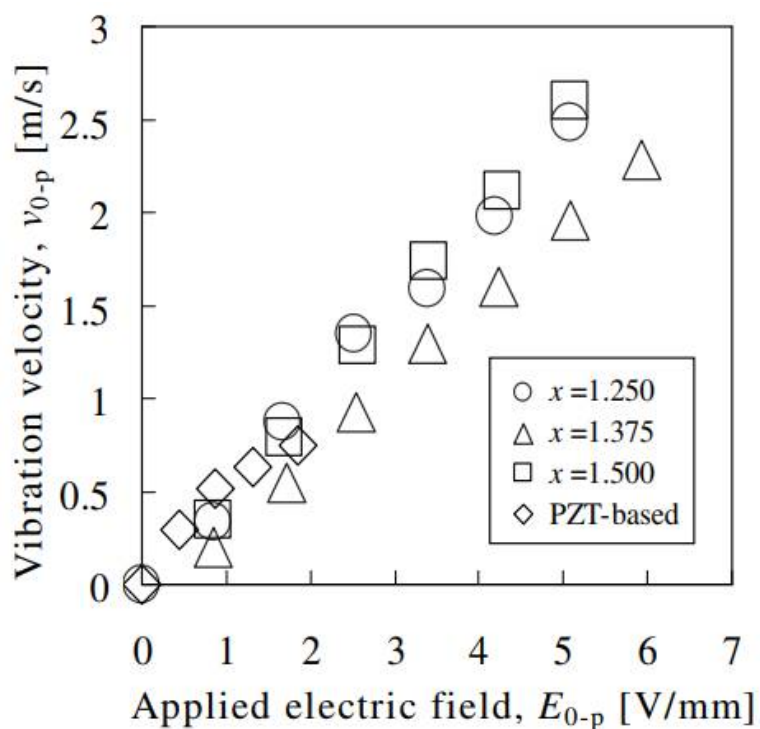


図 3.10 BLSF 振動子と PZT 振動子の振動速度の比較^[17]

今回測定を行った材料については、日本特殊陶業株式会社により製作された材料になっており、 $a\text{Na}_2\text{O}-b\text{Bi}_2\text{O}_3-c\text{TiO}_2-d\text{CrO}_{3/2}$ の組成になっている^[18]。 d_{33} は約 30 pC/N と、BLSF の中では比較的優れた値を持ち、同時に Q_m は約 5000 と高い値を実現している。

3.3.6 ニオブ酸リチウム単結晶

ニオブ酸リチウム LiNbO_3 [LN]は、圧電単結晶材料として高い電気機械結合係数を生かし、弾性表面波(SAW)デバイスとして実用化されている。SAWデバイスとは圧電基板の表面近傍を伝播する弾性波を用いて信号のフィルタリングなどを行う素子のことであり、通信では欠かせないデバイスとなっている。

前節までに述べた材料は圧電セラミックスとして用いられることが多いが、LN は単結晶としての利用が主である。単結晶とセラミックスの主な違いとしては、次節でも述べるが、結晶粒(グレイン)の有無、分域(ドメイン)構造の有無が挙げられる。これらの構造欠陥がない単結晶材料は、結晶内部のエネルギー損失が少なく、入力電圧—変位間のクリープやヒステリシスが少なく、 D - E ヒステリシスも抗電界 E_c で分極が揃って反転する。このような内部構造の違いから、ハイパワー特性においても1章で述べたような優れた線形性を示すと考えられる。

ただし、LN には機械的強度が低いという欠点があり、大振幅で振動することによって応力・歪みが破壊限界を超えてしまうと破断してしまうことが報告されている^[19]。本研究においても、アドミッタンス測定時に振動子が破断することが多発した。そのため、実際にハイパワー応用デバイスを考える場合には圧縮予圧を掛ける等の工夫が必要である。また、製造コストもセラミックスに比べて高く、加工の難易度が高い点も問題になる。

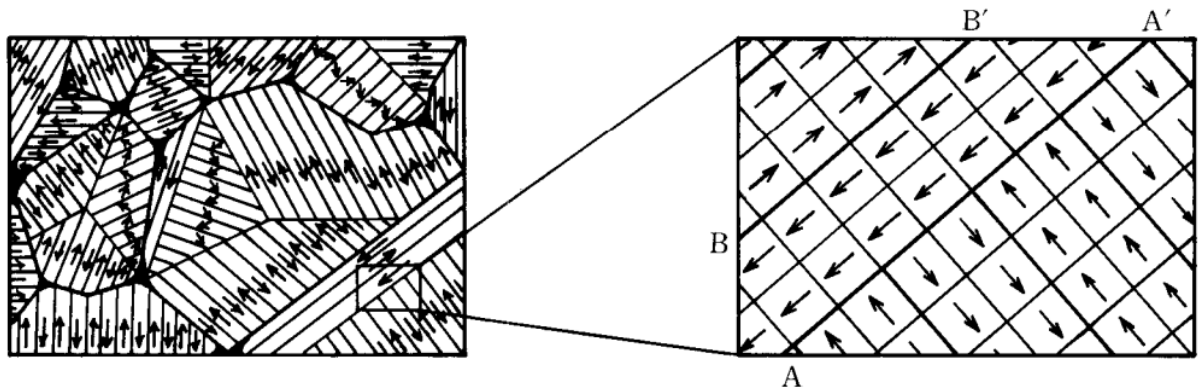
3.3.7 測定試料の特性

測定材料は以下の 6 点である。

- (1)PZT
- (2)KNN
- (3)BZT-BCT
- (4)BNBT
- (5)BLSF
- (6)LN

前節でも言及したが、これらの材料は圧電セラミックスと圧電単結晶に分類できる。圧電セラミックスは内部のドメイン構造を利用し、特性を制御することができる。

単結晶が種結晶から結晶を成長させて作製されるのに対し、セラミックスは粉末を焼き固めて作製されるため、図 3.11 に示すように、圧電セラミックスの内部構造は数多くのグレインと、その中に分極方向の異なるドメインを内包している。ドメインの境界はドメイン壁と呼ばれ、外部電界の印加によってドメイン壁周辺の結晶が自発分極の向きを回転することで、見かけ上ドメイン壁が動いていく。ドメイン壁が動くとき多くの結晶で自発分極の回転が生じ、その際に結晶が歪むことで電界誘起歪みは大きくなる。一方で、ドメイン壁が動くことによりエネルギー損失は大きくなるため、目的に合わせた圧電セラミックスの特性を向上させる上では、ドメイン壁の動きの制御を行うことが効果的である。図 3.3 のペロブスカイト構造からも分かるように強誘電性結晶の多くは酸素 O^{2-} イオンによって構成されており、結晶の O^{2-} イオンのサイトに酸素空孔が生じることによって、周囲のイオンと電気双極子を形成し、分極方向を安定させる。そのため、結晶内部に電子を供給するドナー添加物や、電子を奪うアクセプタ添加物を結晶内部のイオンと置換することで、結晶内部の電氣的な平衡状態を保つために酸素空孔が増減し、ドメイン壁の可動性を制御することができる。これにより、圧電セラミックスはドメイン壁が動きやすく圧電定数が大きいソフト材と、ドメイン壁が動きにくく機械的品質係数 Q_m が大きいハード材の間で特性を変化させることができる^[12]。


 図 3.11 圧電セラミックスの構造^[5]

以上のことから、PZT、KNN、BZT-BCT、BNBT については、ハード化、ソフト化がハイパワー特性に与える影響を調べるため、以下の表 3.2、表 3.3、表 3.4、表 3.5 に示すように様々な Q_m や圧電定数 d_{31} 、を持った圧電振動子を用意した。PZT、KNN は日本特殊陶業株式会社、BZT-BCT は東京理科大学永田肇教授の研究グループ、BNBT は太陽誘電株式会社によって製造されたものである。なお、以下の特性のうち Q_m 、 d_{31} 、 $\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$ 、 c_{11}^E は低電圧のアドミッタンス測定から求めた測定値であり、寸法はノギスで測定したもの、密度は電子天秤による質量測定と寸法から計算された値である。

表 3.2 PZT の特性表

	Q_m	d_{31} [pC/N]	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	c_{11}^E [N/m ²]	密度 [kg/m ³]	長さ [mm]	幅 [mm]	厚み [mm]
PZT 1	1857	-137	1589	8.01×10^{10}	7600	24.0	6.0	2.0
PZT 2	2006	-86	1000	9.30×10^{10}	7600	24.0	6.0	2.0
PZT 3	2097	-93	1015	9.55×10^{10}	7600	24.0	6.0	2.0
PZT 4	98	-169	1798	6.60×10^{10}	7900	24.0	6.0	2.0
PZT 5	888	-94	979	9.50×10^{10}	7600	16.0	2.7	1.0
PZT 6	1371	-96	989	9.35×10^{10}	7600	15.9	2.7	1.0
PZT 7	827	-95	986	9.41×10^{10}	7600	15.9	2.7	1.0
PZT 8	928	-91	969	9.58×10^{10}	7600	16.0	2.7	1.0

表 3.3 KNN の特性表

	Q_m	d_{31} [pC/N]	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	c_{11}^E [N/m ²]	密度 [kg/m ³]	長さ [mm]	幅 [mm]	厚み [mm]
KNN 1	73	-104	1545	9.16×10^{10}	4570	11.2	3.2	1.5
KNN 2	73	-101	1382	8.89×10^{10}	4549	11.1	3.4	1.1
KNN 3	59	-108	1794	8.68×10^{10}	4533	11.0	3.3	1.5
KNN 4	153	-48	565	1.29×10^{11}	4542	11.9	3.2	1.5
KNN 5	412	-19	266	1.40×10^{11}	4511	11.9	2.7	1.0
KNN 6	451	-18	251	1.40×10^{11}	4506	11.1	3.5	1.4
KNN 7	207	-88	1302	9.57×10^{10}	4530	12.2	3.1	1.2
KNN 8	86	-88	1369	9.20×10^{10}	4540	12.0	3.3	1.0
KNN 9	58	-136	2083	7.5×10^{10}	4490	12.0	3.0	1.0
KNN 10	64	-104	1344	8.24×10^{10}	4500	12.0	3.0	1.0
KNN 11	55	-110	1419	7.82×10^{10}	4430	12.0	3.0	1.0
KNN 12	104	-82	743	1.04×10^{11}	4496	11.3	3.3	1.4
KNN 13	72	-101	1262	7.77×10^{10}	4182	15.9	2.8	1.1

表 3.4 BZT-BCT の特性表

	Q_m	d_{31} [pC/N]	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	c_{11}^E [N/m ²]	密度 [kg/m ³]	長さ [mm]	幅 [mm]	厚み [mm]
BZT-BCT 1	145	-61	2246	1.00×10^{11}	6000	12.0	3.0	1.0
BZT-BCT 2	424	-71	1935	1.08×10^{11}	5556	12.0	3.0	1.0
BZT-BCT 3	1318	-33	1754	1.29×10^{11}	5759	12.0	3.0	1.0

表 3.5 BNBT の特性表

	Q_m	d_{31} [pC/N]	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	c_{11}^E [N/m ²]	密度 [kg/m ³]	長さ [mm]	幅 [mm]	厚み [mm]
BNBT 1	967	-14	494	1.27×10^{11}	5610	10.1	4.1	0.8
BNBT 2	195	-14	498	1.25×10^{11}	5780	10.0	4.0	1.0

BLSF、LN についてはそれぞれ 1 種類の振動子を用意した。特性を表 3.6 に示す。LN については電気機械結合係数が大きいカット角 Y-cut 128° のものを用いている。BLSF は日本特殊陶業株式会社、LN は株式会社山寿セラミックスによって製造されたものである。

表 3.6 BLSF、LN の特性表

	Q_m	d_{31} [pC/N]	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	c_{11}^E [N/m ²]	密度 [kg/m ³]	長さ [mm]	幅 [mm]	厚み [mm]
BLSF	3147	-2	160	1.10×10^{11}	6726	19.5	2.9	0.7
LN	11300	-26	53	1.41×10^{11}	4310	44.0	7.0	0.5

3.4 アドミッタンス測定

前節で示した圧電振動子に対して、3.2.1 節で示した測定系を用いてアドミッタンス曲線を測定した。PZT 1 の振動子のアドミッタンス測定結果を図 3.12 に示す。測定電圧はそれぞれの材料で非線形効果の小さい低電圧、非線形効果の大きい高電圧での測定を行う。PZT 1 の場合は 0.5 V_{pp} と 10 V_{pp} を用いた。また、高電圧駆動時にはアドミッタンス曲線はヒステリシスを示すため、周波数の掃引方向を UP スイープと DOWN スイープでそれぞれ測定している。高電圧測定時には、振動子の温度上昇が 1°C 以内に収まるよう、1 スイープの測定時間を 2 秒以内とするように測定点数を調整して測定を行った。PZT 1 の場合には低電圧測定時には 1000 点、高電圧測定時には 100 点とした。

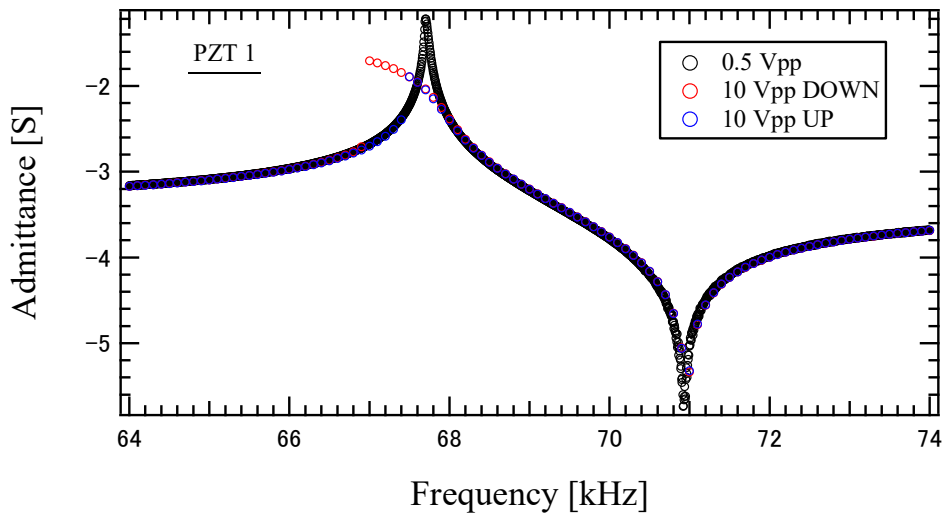


図 3.12 PZT 1 のアドミッタンス曲線

このように測定したアドミッタンス曲線に対し、カーブフィッティングを行って高次弾性定数を含めた圧電体の物性値を算出する。まず、低電圧での測定結果に対して 2.2.2 節で示した LCR 等価回路のアドミッタンスの式(2-55)

$$Y = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} + j\omega C_d \quad (2-55 \text{ 再掲})$$

を用いてカーブフィッティングを行い、等価回路パラメータ L , C , R , C_d を算出する。次に、式(2-60)(2-61)(2-62)、(2-50)(2-51)、および $C_d = \overline{\epsilon}_{33}^S \frac{wl}{h}$ と $Q_m = \frac{\omega L}{R}$

の関係から、圧電定数 \overline{e}_{31} 、弾性定数 \overline{c}_{11}^E 、誘電率 $\overline{\epsilon}_{33}^S$ 、機械的品質係数 Q_m を算

出する。ただし、等価質量については先に密度 ρ と寸法(長さ、幅、厚み)を測定しておき、 $m = \frac{\rho whl}{2}$ として計算した。

$$L = \frac{m}{A^2} \quad (2-60 \text{ 再掲})$$

$$R = \frac{r}{A^2} = \frac{2m\beta}{A^2} \quad (2-61 \text{ 再掲})$$

$$\frac{1}{C} = \frac{s}{A^2} = \frac{m\omega_r^2}{A^2} \quad (2-62 \text{ 再掲})$$

$$A = 2\overline{e}_{31}w \quad (2-50 \text{ 再掲})$$

$$\frac{1}{s_n} = \frac{2l}{(2n-1)^2\pi^2\overline{c}_{11}^E wh} \quad (2-51 \text{ 再掲})$$

得られた物性値は既に前節の特性表に示した。

次に、高電圧で測定したアドミッタンス曲線について、2.3.2 節で示した非線形LCR等価回路の回路方程式(2-65)

$$L \frac{di}{dt} + R_0 i + \eta i^3 + \frac{1}{C_0} \int i dt + \xi \omega^3 \left(\int i dt \right)^3 = V \quad (2-65 \text{ 再掲})$$

を用いて、カーブフィッティングを行う。ここでの C_0 , R_0 は低電圧での回路パラメータ C , R を表しており、低電圧でのフィッティング結果の C , R をそのまま使用してよい。この際、既に求めた L , C_0 , R_0 , C_d は固定し、非線形パラメータ η , ξ を変数としてフィッティングを行う。低電圧、高電圧それぞれのフィッティング結果を図 3.13 に示す。

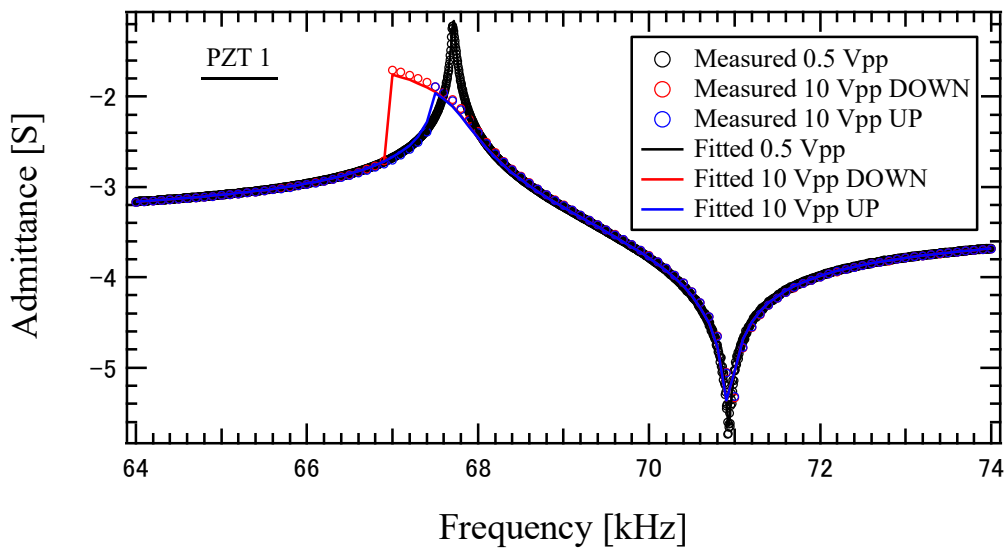


図 3.13 PZT 1 のアドミッタンス測定結果とフィッティング結果

その後、得られた非線形パラメータから、式(2-118)(2-121)

$$c_{3r} = \frac{32}{9} \frac{c_{1r}^2}{\rho \omega_0 l} q = \frac{16}{9} \frac{c_{1r}^2 A^2}{\rho \omega_0 L} \xi \quad (2-118 \text{ 再掲})$$

$$c_{3i} = \frac{32}{9} \frac{c_{1r}^2}{\rho \omega_0 l} p = \frac{16}{9} \frac{c_{1r}^2 A^2}{\rho \omega_0 L} \eta \quad (2-121 \text{ 再掲})$$

を用いることで、高次弾性定数実部 c_{3r} 、虚部 c_{3i} を計算する。

以上の測定手順を全ての振動子について行った。しかし、LN 振動子については高電圧測定を行った際に、アドミッタンス測定によって約 1 秒間にわたって大振幅で励振されることで、振動子の振動速度が破壊限界速度(3.3 m_{o-p}/s)^[19]を超えて破断してしまうという問題が生じた。そこで、LN 振動子については電氣的過渡応答測定法を用いて測定を行った。これについては次章で結果を示す。表 3.7、表 3.8、表 3.9、表 3.10、表 3.11 に PZT, KNN, BZT-BCT, BNBT, BLSF の高次弾性定数の測定結果を示す。

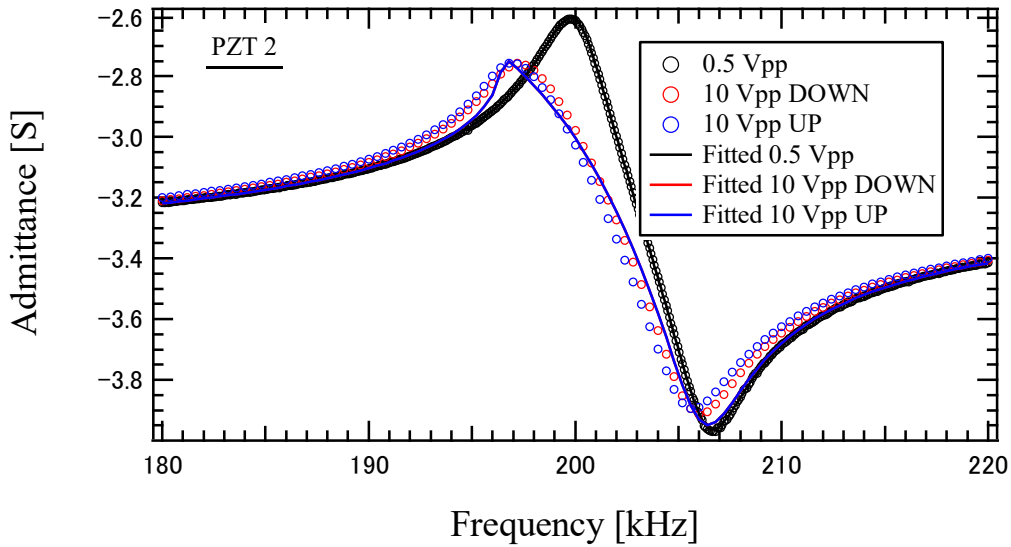


表 3.7 PZT の高次弾性定数の測定結果

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
PZT 1	-1.03×10^{17}	6.51×10^{15}
PZT 2	-1.24×10^{16}	1.72×10^{15}
PZT 3	-9.57×10^{15}	1.20×10^{15}
PZT 4	-2.73×10^{18}	1.04×10^{18}
PZT 5	-2.17×10^{16}	1.11×10^{15}
PZT 6	-2.21×10^{16}	2.12×10^{15}
PZT 7	-2.24×10^{16}	9.18×10^{14}
PZT 8	-2.06×10^{16}	1.30×10^{15}

表 3.8 KNN の高次弾性定数の測定結果

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
KNN 1	-3.37×10^{18}	1.21×10^{18}
KNN 2	-6.69×10^{18}	1.35×10^{18}
KNN 3	-7.27×10^{18}	1.84×10^{18}
KNN 4	-1.48×10^{17}	3.51×10^{17}
KNN 5	-3.28×10^{16}	9.88×10^{15}
KNN 6	-5.48×10^{16}	9.96×10^{15}
KNN 7	-7.85×10^{17}	1.21×10^{17}
KNN 8	-2.08×10^{18}	7.65×10^{17}
KNN 9	-8.96×10^{17}	1.75×10^{18}
KNN 10	-4.63×10^{18}	1.55×10^{18}
KNN 11	-7.78×10^{18}	3.77×10^{18}
KNN 12	-1.79×10^{18}	2.58×10^{17}
KNN 13	-7.67×10^{18}	2.20×10^{18}

表 3.9 BZT-BCT の高次弾性定数の測定結果

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
BZT-BCT 1	-4.35×10^{18}	7.89×10^{17}
BZT-BCT 2	-2.90×10^{17}	2.05×10^{16}
BZT-BCT 3	-1.03×10^{17}	2.05×10^{15}

表 3.10 BNBT の高次弾性定数の測定結果

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
BNBT 1	-1.38×10^{15}	3.20×10^{14}
BNBT 2	-2.55×10^{16}	2.43×10^{16}

表 3.11 BLSF の高次弾性定数の測定結果

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
BLSF	-1.16×10^{15}	7.45×10^{12}

3.5 電氣的過渡応答測定

前節で述べたように、LN 振動子については強度の問題から、数秒にわたって振動子が励振されるアドミッタンス測定を用いた高次弾性定数の測定が行えなかった。そこで、数ミリ秒での測定が行えるよう、3.2.2 節で述べた電氣的過渡応答測定法を用いた測定を行った。電圧振幅 2.5 V_{pp} で、3000 サイクルのバースト電圧を印加し、その後に駆動回路を短絡して減衰自由振動をさせた時の振動速度を、電流測定によって計測した。測定した電流から求めた振動速度と、印加電圧を図 3.14 に示す。振動速度は図 3.15 に示すように正弦波で振動しながら減衰している。

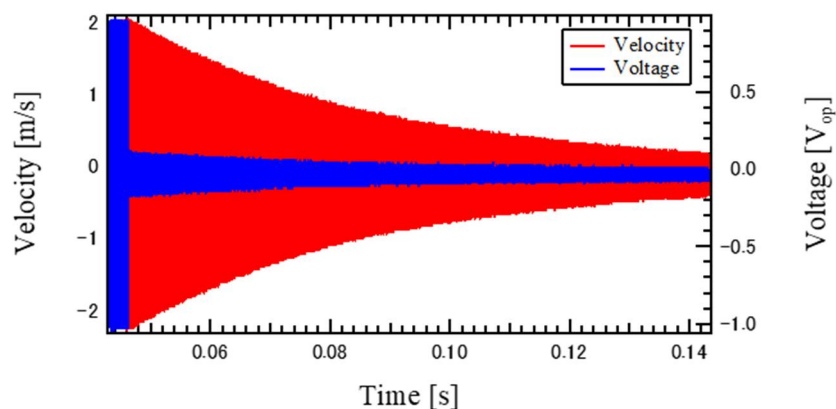


図 3.14 LN 振動子に印加した電圧と振動速度

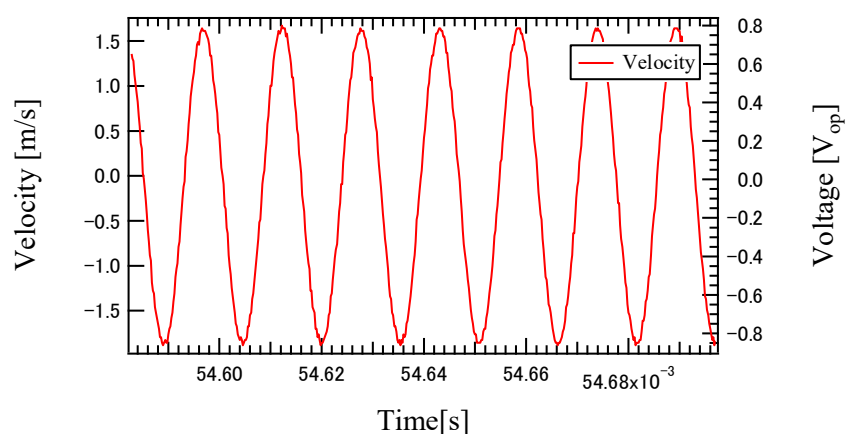


図 3.15 LN 振動子の減衰自由振動の様子

この振動速度に対して、式(2-56)

$$v = v_0 \sin[\omega_r(t)t + \varphi] e^{-\beta(t)(t-\tau)} \quad (2-56 \text{ 再掲})$$

でフィッティングを行い、共振周波数 ω_r 、減衰比 β を振動速度振幅 v_0 の関数としてプロットしたものが図 3.16、図 3.17 である。減衰自由振動の際は固有振動数で振動するため、通常は ω_r や β は定数となるはずである。しかし、振動速度に依存して変化している。

ここで、式(2-57)(2-58)

$$\beta = \beta_0 + p \frac{v_0^2}{l} \quad (2-57 \text{ 再掲})$$

$$\omega_r = \omega_0 + q \frac{v_0^2}{l} \quad (2-58 \text{ 再掲})$$

を用いてカーブフィッティングを行うことで、非線形パラメータ p 、 q を求める。さらに式(2-118)(2-121)

$$c_{3r} = \frac{32}{9} \frac{c_{1r}^2}{\rho \omega_0 l} q = \frac{16}{9} \frac{c_{1r}^2 A^2}{\rho \omega_0 L} \xi \quad (2-118 \text{ 再掲})$$

$$c_{3i} = \frac{32}{9} \frac{c_{1r}^2}{\rho \omega_0 l} p = \frac{16}{9} \frac{c_{1r}^2 A^2}{\rho \omega_0 L} \eta \quad (2-121 \text{ 再掲})$$

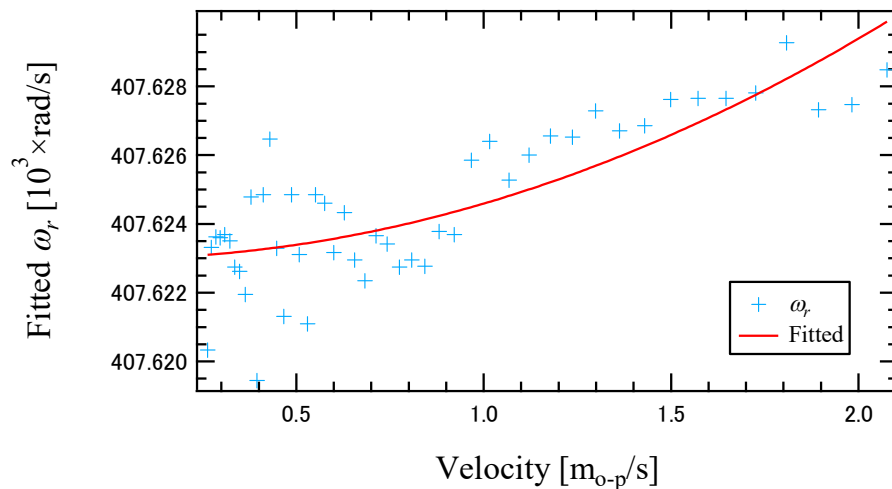
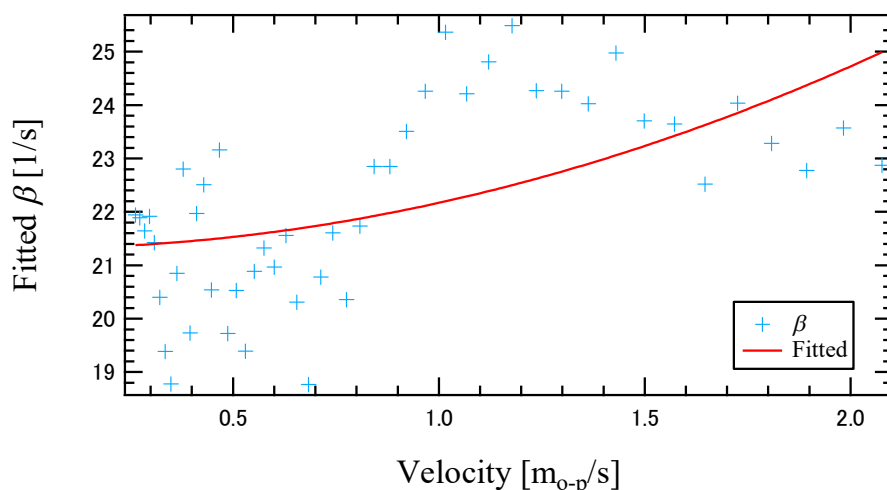
を用いることで、高次弾性定数実部 c_{3r} 、虚部 c_{3i} を計算する。これらの高次弾性定数は原理的にはアドミッタンス測定から求められるものと同じ値になる。本研究では、今後提案手法が圧電材料のハイパワー特性の測定方法として用いられることを考え、周波数特性分析器さえあれば測定が行えるアドミッタンス測定法を主に用いたが、強度の低い LN 振動子に対してのみ、電氣的過渡応答測定法を用いた。

図 3.16、図 3.17 では、カーブフィッティングを行っているが、振動速度が低い範囲では ω_r 、 β が大きくばらついている。これは振動速度が小さくなってくると S/N 比が悪くなり、式(2-56)によるフィッティング誤差が大きくなるためである。カーブフィッティングにより得られた p 、 q の値は、

$$p = 3.7 \times 10^{-2} \text{ s/m} \quad (3-1)$$

$$q = 7.0 \times 10^{-2} \text{ s/m} \quad (3-2)$$

となっているが、特に図 3.17 の減衰比 β については、フィッティング関数との誤差が大きい。フィッティングによって高次弾性定数の絶対値が小さく推定された場合、他の圧電材料との比較を行う上で問題となるため、ここでは p 、 q の値を変化させて、 ω_r 、 β の変化が計算値以下となる範囲を計算した。


 図 3.16 共振周波数 ω_r と振動速度振幅 v_0 の関係

 図 3.17 減衰比 β と振動速度振幅 v_0 の関係

式(2-57)(2-58)を用いて ω_r , β を計算する場合、 ω_0 , β_0 の値が必要となる。ここでは、振動速度が小さい範囲での ω_r , β の測定値の平均を ω_0 , β_0 として用いた。図 3.18、図 3.19 のように ω_r , β を2つの区間に分割し、第1区間のデータ群からは平均を計算し ω_0 , β_0 の推定に用い、第2区間は計算された ω_r , β との比較に用いた。振動速度が小さい範囲では測定誤差による測定値のばらつきが大きい場合、振動速度の増加に従って測定値のばらつきが小さくなり、標準偏差が小さくなる。一方で、式(2-57)(2-58)のような関係において、振動速度の増加によって ω_r , β が変化していく場合、振動速度が増加していくにつれて、 ω_r , β が初期値から離れていくため、標準偏差が増加していく。この

ことから、区間の分割閾値を決定するため、第一区間の速度閾値毎の標準偏差を計算し、標準偏差が極小となる速度を区間分割の閾値として用いた。速度閾値毎の ω_r , β の標準偏差を図 3.20 図 3.21 に示す。ただし、 ω_r においては、速度閾値が 0.36 m/s と 0.92m/s の 2 点で極小となっているが、0.36 m/s では測定点数が 9 点と少ないため、0.92 m/s を閾値として用いた。以上の検討により、 ω_r , β の速度閾値はそれぞれ 0.92 m/s、0.81 m/s とした。これによって求められた第 1 区間の ω_r , β の平均と標準偏差は $\bar{\omega}_r = 407623 \pm 2$ rad/s, $\bar{\beta} = 21 \pm 1$ 1/s となった。これらの値を ω_0 , β_0 として用いて、式(2-57)(2-58)から ω_r , β の値を計算し、第 2 区間の測定データと計算値の比較を行った。 ω_r , β の計算結果と測定結果をそれぞれ図 3.22、図 3.23 に示す。 ω_0 , β_0 の値として第 1 区間の平均値である $\bar{\omega}_r = 407623$ rad/s、 $\bar{\beta} = 21$ 1/s と、それぞれの標準偏差の 1.96 倍を引いた値を用いた。これは ω_0 , β_0 の値のばらつきによって ω_r , β の計算結果が変化するため、 ω_0 , β_0 の 95%信頼区間の中で最も小さい ω_0 , β_0 の値を用いた。第 2 区間の全ての測定データが、計算された ω_r , β 以下となるような非線形係数 p , q の値は、 ω_0 , β_0 に(第 1 区間の平均値)-1.96×(標準偏差)を用いた場合、

$$p = 2.7 \times 10^{-1} \text{ s/m} \quad (3-3)$$

$$q = 3.3 \times 10^{-1} \text{ s/m} \quad (3-4)$$

となった。これは測定された共振周波数、減衰比の内、振動速度に対して最も大きく増加した測定点を基準として計算された値であり、 ω_0 , β_0 の 95%信頼区間の中で、最大に見積もられている。そのため、フィッティングによって得られた値よりも大きくなっている。

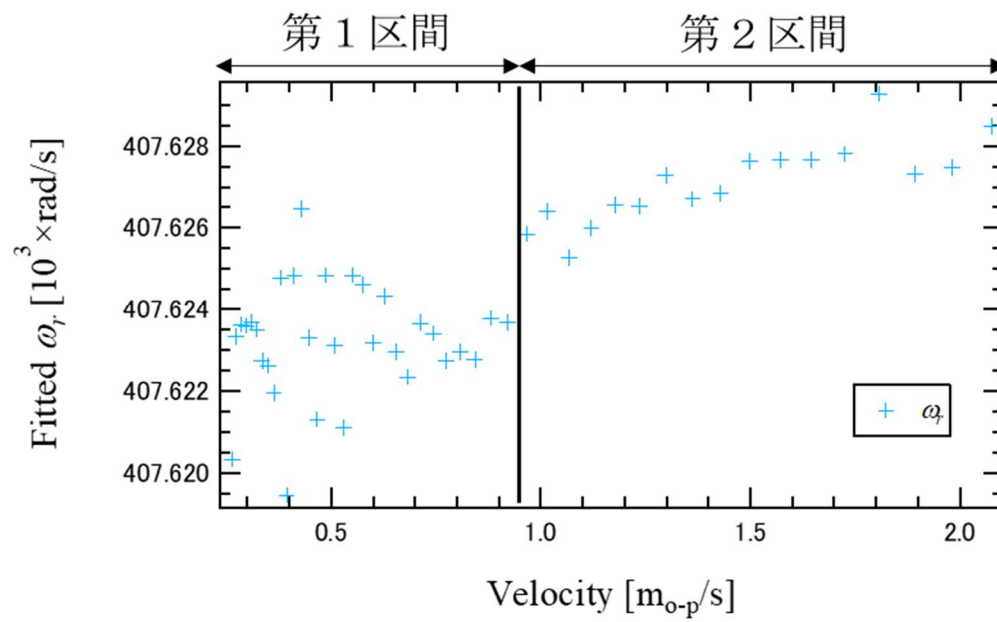


図 3.18 ω_r の区間分割

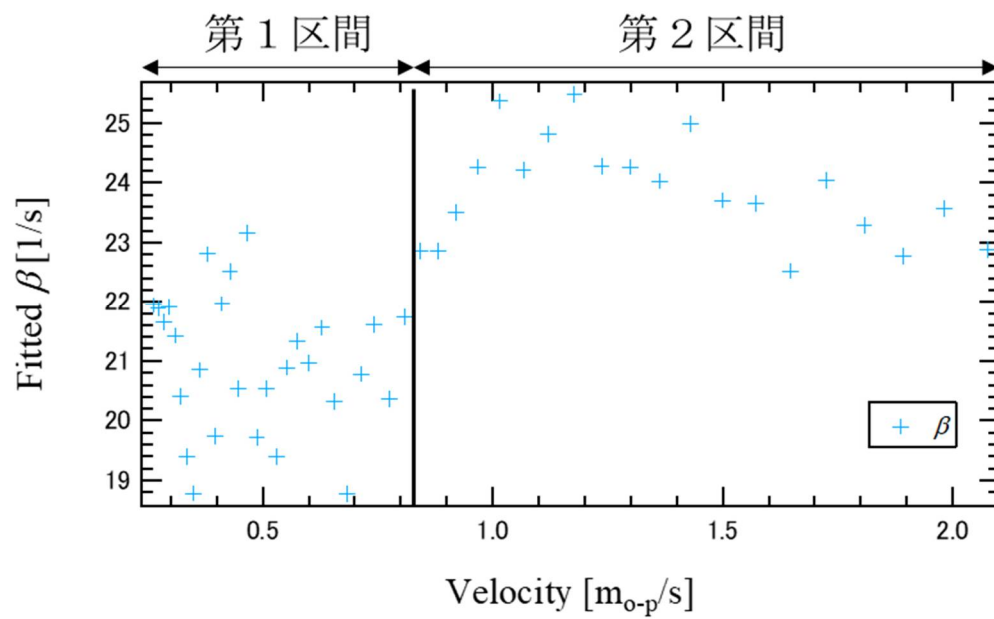
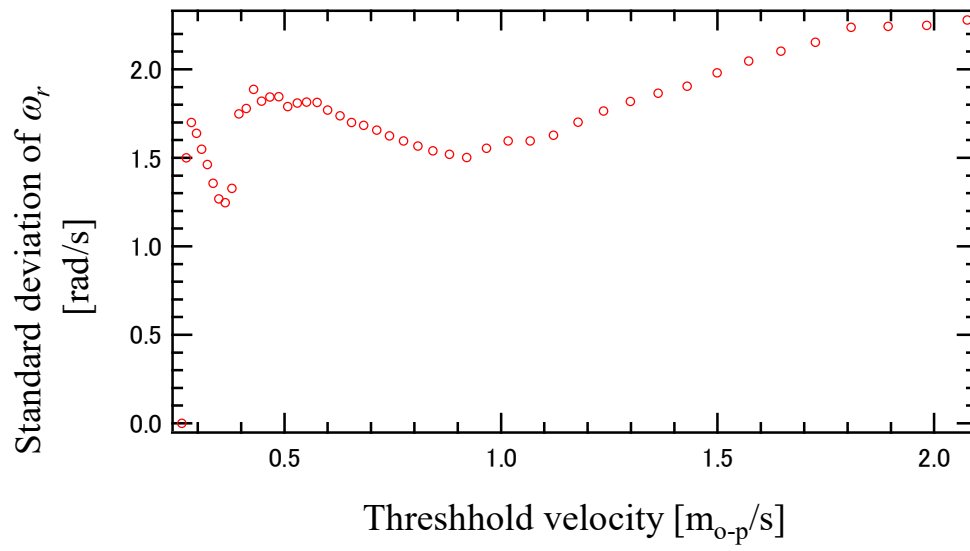
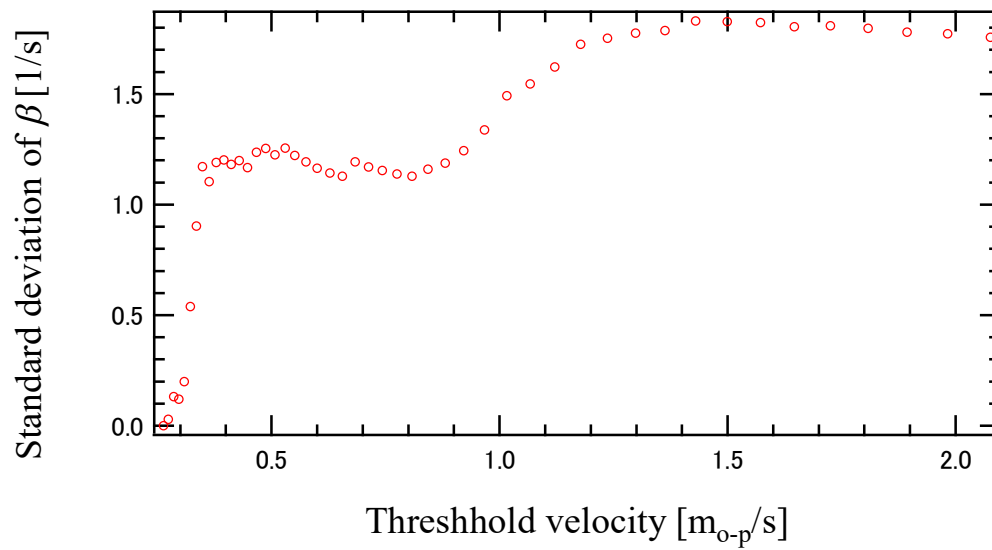


図 3.19 β の区間分割

図 3.20 ω_r の標準偏差図 3.21 β の標準偏差

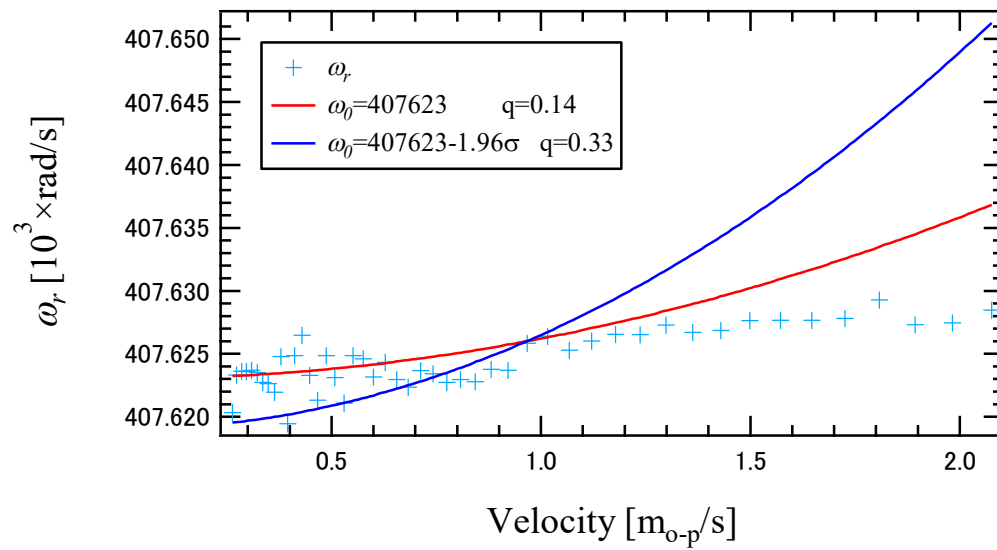


図 3.22 ω_r の計算結果と測定値

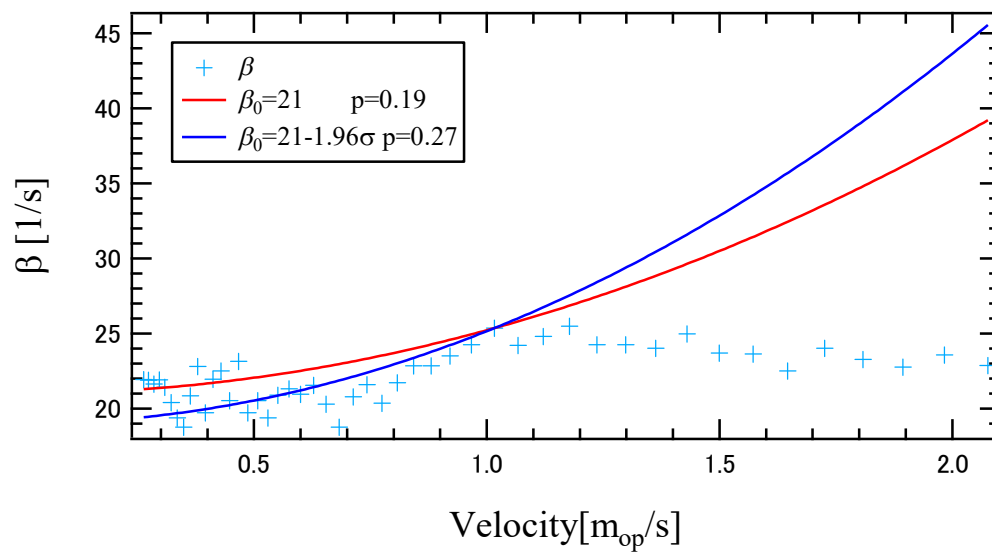


図 3.23 β の計算結果と測定値

以上の検討によって、フィッティングによって得られた LN の高次弾性定数と、計算によって見積もられた LN の高次弾性定数を表 3.12 に示す。

表 3.12 LN の高次弾性定数の測定結果

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
Fitting	6.58×10^{13}	4.10×10^{13}
Calculation	4.80×10^{14}	1.93×10^{14}

3.6 測定結果の考察

高次弾性定数は歪みの高次項の係数となるため、その絶対値が小さいほど歪みと応力の関係は線形に近くなり、歪みが大きくなっても共振周波数の変化や、損失の増加が抑えられる材料になるといえる。そこで、材料ごとの比較を行うため、それぞれの材料で最も高次弾性定数の絶対値が小さいものを選び表 3.13 に示す。

表 3.13 材料ごとの高次弾性定数の比較

	c_{3r} [N/m ²]	c_{3i} [N/m ²]
PZT 3	-9.57×10^{15}	1.20×10^{15}
KNN 5	-3.28×10^{16}	9.88×10^{15}
BZT-BCT 3	-1.03×10^{17}	2.05×10^{15}
BNBT 1	-1.38×10^{15}	3.20×10^{14}
BLSF	-1.16×10^{15}	7.45×10^{12}
LN(Fitting)	6.58×10^{13}	4.10×10^{13}
LN(Calculation)	4.80×10^{14}	1.93×10^{14}

圧電セラミックスに比べて、圧電単結晶である LN の高次弾性定数絶対値は計算によって大きく見積もった場合であっても、非常に小さくなっている。この理由として、結晶粒界(結晶粒の境界)やドメイン壁の存在が高次弾性定数を下げる要因になっていることが考えられる。また、PZT を基準として非鉛圧電セラミックスを評価した場合、BNBT、BLSF では PZT よりも高次弾性定数の絶対値が小さくなっているため、低振幅での振動効率が劣っていたとしても、大振幅で振動させた場合には PZT よりも高効率で駆動できる可能性がある。次章では、これらの値を元に、実際の駆動特性を計算する。

また、PZT、KNN、BZT-BCT の 3 種類の材料については添加物や組成比の異なる複数の振動子の測定を行った。そこで、 $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ の逆数を縦軸にとり、1 次の弾性定数 $\overline{c_{11}^E}$ を横軸にとったグラフを図 3.24、図 3.25 に示す。逆数をとった理由は、高次弾性定数の小さい材料に着目して議論するためである。ここから、3 つの異なる材料系で、 $\overline{c_{11}^E}$ が高くなるにつれて $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ が小さく

なる、という同様の傾向があることが分かる。また、縦軸は同様に $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ の逆数を取り、横軸に圧電定数 d_{31} をとったグラフを図 3.26、図 3.27 に示す。ここから、 d_{31} が低くなるにつれて $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ が小さくなる、という傾向があることが分かる。今回測定した PZT、KNN、BZT-BCT 振動子はそれぞれ異なる添加物の添加や、組成比の変更を行って特性の異なる材料を作製している。にもかかわらず、同様の傾向を示すことが明らかになった。すなわち、圧電材料の高次弾性について、一般化された法則がある可能性を示唆している。一方で、縦軸は同様に $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ の逆数を取り、横軸に Q_m をとったグラフを図 3.28、図 3.29 に示す。KNN、BZT-BCT については実部、虚部共に Q_m の増加と共に高次弾性定数絶対値が減少しているが、PZT については、 Q_m の増加と共に高次弾性定数実部は絶対値が減少し、虚部は $Q_m = 830$ を境に絶対値が増加する傾向となっている。ハイパワー特性はしばしば Q_m と関連付けて評価されるが、この結果から単純に Q_m の増加が高次弾性定数絶対値の減少に繋がるわけではないことが明らかとなった。

これまで、圧電材料のハイパワー特性については、振動速度を測定する等の方法で測定がなされてきた^[1-2]。しかし、複数の材料について定量的に比較した測定は、測定に伴う発熱を切り分けることが難しく、どのようなモデルでの測定を行うかも解明されていなかったため、行えなかった、ハイパワー特性の向上のためにどのような材料開発プロセスを導入すべきなのか、手がかりが存在しなかった。今回の測定から得られた以下のような関係は、このような一般概念を新たに見出したことによって、様々な種類の圧電材料について、同じ戦略で $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ を小さくし、ハイパワー特性を向上させることができるため、今後のハイパワー向け圧電材料の特性向上に大きく貢献することが期待される。

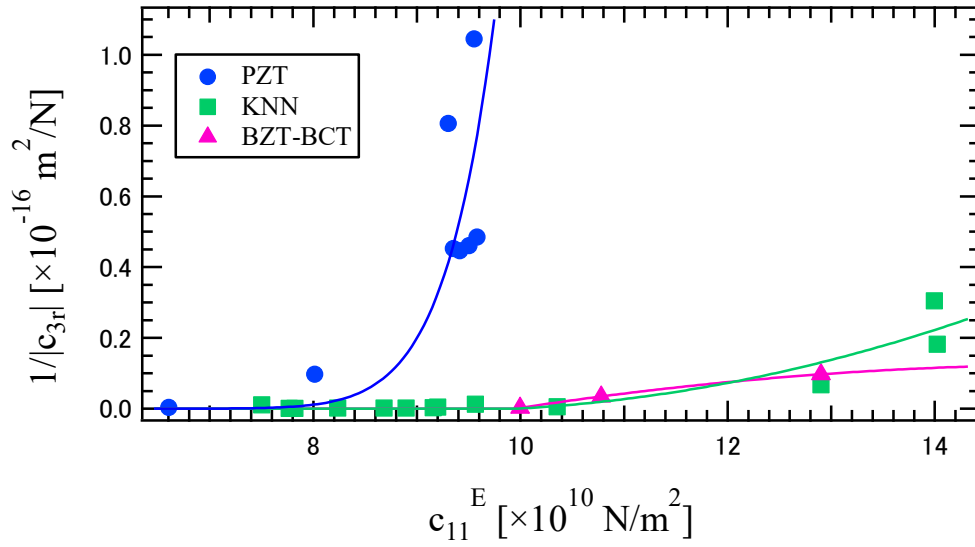


図 3.24 高次弾性定数実部の絶対値 $|c_{3r}|$ の逆数と1次弾性定数 $\overline{c_{11}^E}$ の関係

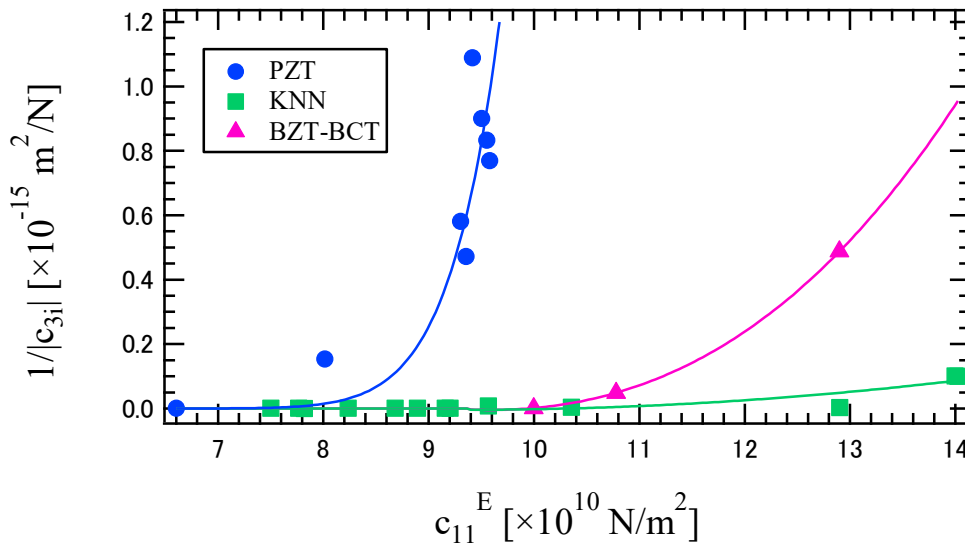


図 3.25 高次弾性定数虚部の絶対値 $|c_{3i}|$ の逆数と1次弾性定数 $\overline{c_{11}^E}$ の関係

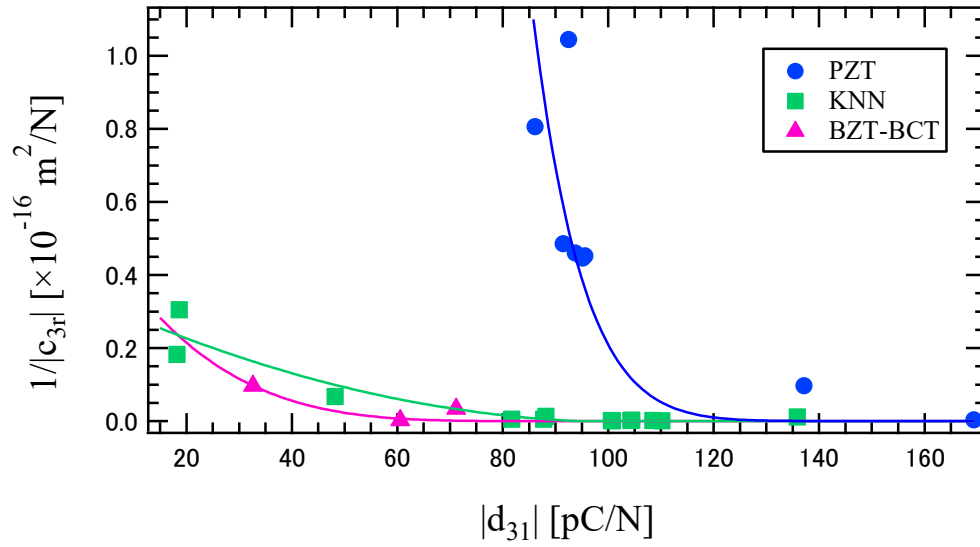


図 3.26 高次弾性定数実部の絶対値 $|c_{3r}|$ の逆数と圧電定数 d_{31} の関係

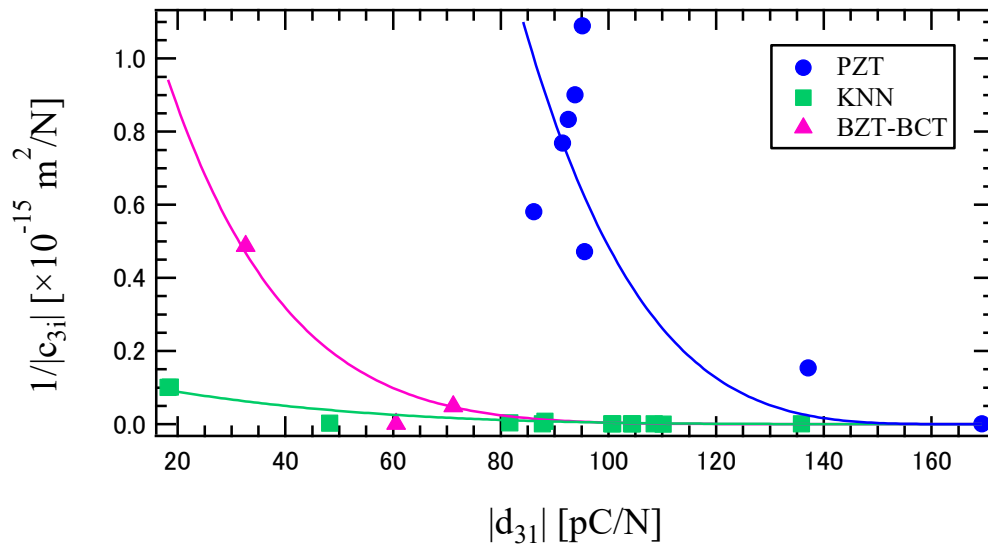


図 3.27 高次弾性定数虚部の絶対値 $|c_{3i}|$ の逆数と圧電定数 d_{31} の関係

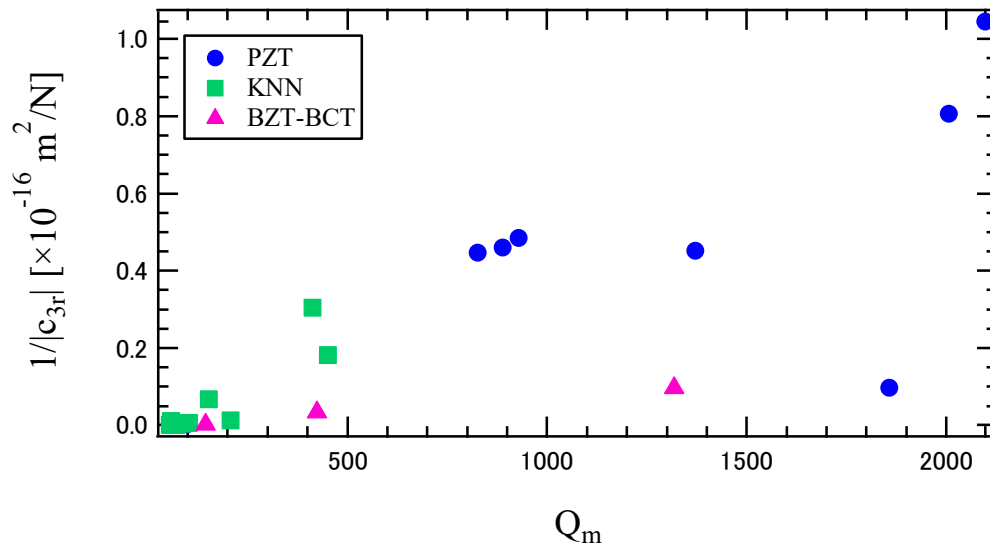


図 3.28 高次弾性定数実部の絶対値 $|c_{3r}|$ の逆数と Q_m の関係

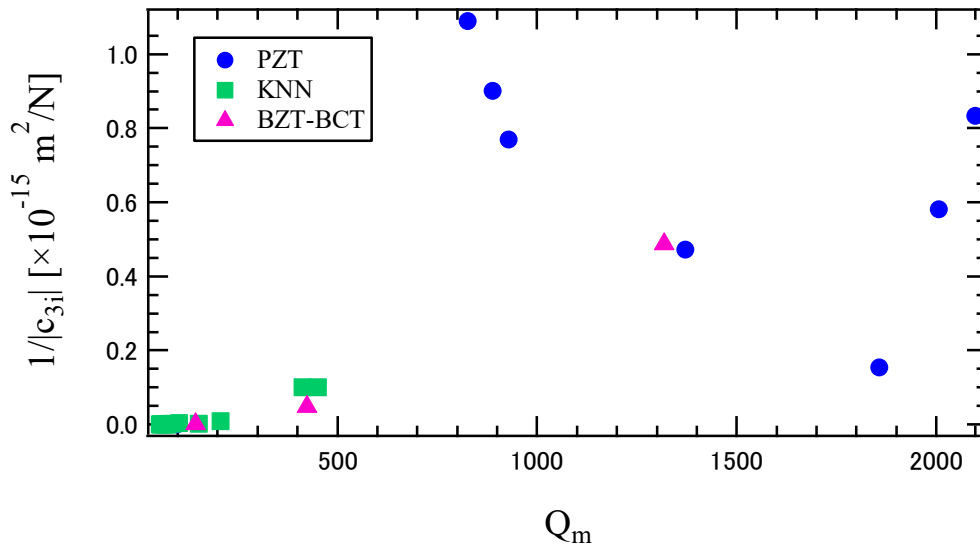


図 3.29 高次弾性定数虚部の絶対値 $|c_{3i}|$ の逆数と Q_m の関係

BZT-BCT と KNN について、実際の材料作製手法による高次弾性定数への影響を検討する。

今回測定した BZT-BCT 振動子は、 MnCO_3 添加によって特性を制御している。それぞれの振動子の MnCO_3 添加量と、 $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ の逆数の関係を図 3.30、図 3.31 に示す。 MnCO_3 の添加は結晶内に酸素空孔を導入し、ドメイン壁の動きを抑制する効果がある。そのため、今回の測定試料では Q_m を上昇させる目的で導入された。しかし、今回の測定で、 MnCO_3 の添加は $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ を小

さくすることにも効果があることが明らかになった。単結晶の $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ が小さいことは上述したが、その原因として結晶粒界やドメイン壁がないことを挙げた。セラミックスの場合でも、ドメイン壁の動きを抑制することで同様の効果を得ることができると考える。ただし、2章では、圧電材料のハイパワー駆動時には誘電率や圧電定数を定数とし、弾性定数の非線形性のみで非線形特性を再現することができると述べた。これはハイパワー駆動時の印加電界はドメイン壁を動かすほどの高電界ではないためであった。今回の測定方法も以上のような事実に基づいており、「ドメイン壁が動きにくい材料は $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ が小さい」からといって、「駆動中にドメイン壁が動いている」わけではないことは改めて注意しておかなければならない。

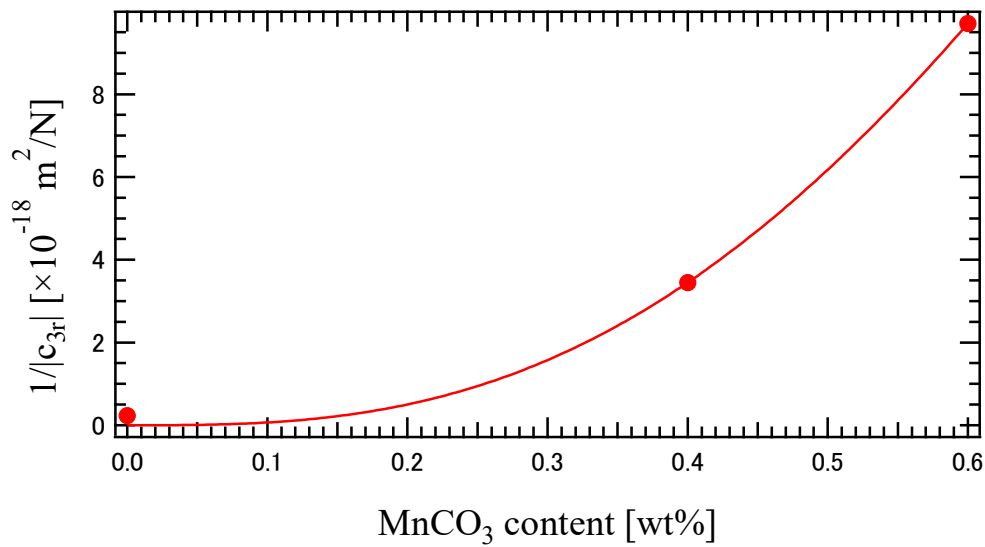
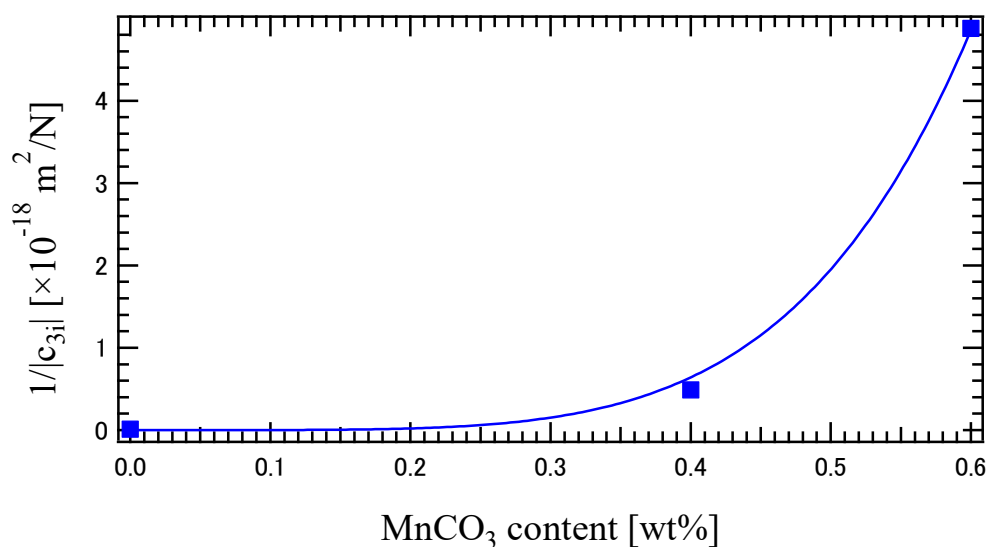


図 3.30 BZT-BCT の $|c_{3r}|$ の逆数と MnCO_3 添加量の関係

図 3.31 BZT-BCT の $|c_{3i}|$ の逆数と MnCO_3 添加量の関係

次に、KNN について、Na:K 比と高次弾性定数の関係について述べる。今回測定に用いた KNN 系の材料では、Na:K 比を変更することによって特性を変更している。 $0.56 \leq \text{Na}/(\text{Na}+\text{K}) \leq 0.67$ の範囲で菱面体晶と正方晶が共存し、結晶構造を不安定にすることで圧電定数を大きくしている^[10]。Na の比率を大きくすることによって結晶構造は正方晶に近づいていく。図 3.32、図 3.33 に KNN の $\text{Na}/(\text{Na}+\text{K})$ と $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ の逆数の関係を示す。今回の測定から、Na の比率を大きくすることで、 $|c_{3r}|$ 、 $|c_{3i}|$ を小さくする効果が得られると明らかになった。この理由として、結晶構造の安定化が挙げられる。すなわち、圧電材料は複数の異なる結晶構造を持った材料を固溶させ、MPB を利用して圧電定数を高めるという手法が広く用いられる。しかし、MPB を利用することによる結晶構造の不安定化が、高次弾性定数の絶対値を大きくする要因となっていることが考えられる。

添加物量の変更、組成比変更は独立して行われる一般的な材料開発手法であり、これらの既存の材料開発手法が高次弾性定数の調整に有効であると明らかになったことは、今後のハイパワー向け圧電材料の開発に有益である。

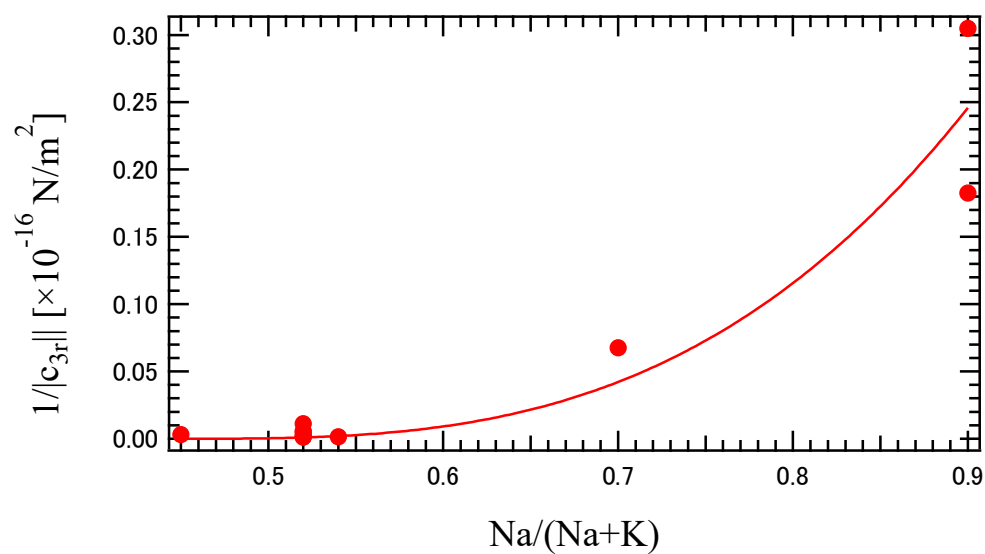


図 3.32 KNN の $|c_{3r}|$ の逆数と Na:K 比の関係

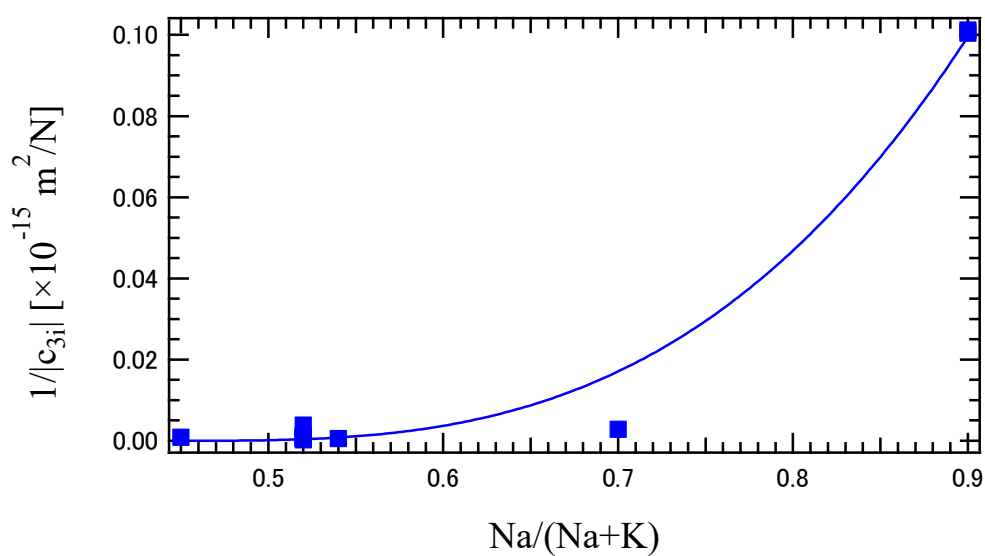


図 3.33 KNN の $|c_{3i}|$ の逆数と Na:K 比の関係

3.7 結論

本章では、アドミッタンス測定法と電氣的過渡応答測定法を用いて高次弾性定数を測定することで、圧電材料のハイパワー特性を定量的に評価する手法を提案した。測定結果から、圧電単結晶は圧電セラミックスに比べて高次弾性定数が小さく、高次弾性に結晶粒界やドメイン壁等の構造欠陥が影響を及ぼしていることが明らかになった。また、高次弾性定数と1次弾性定数、圧電定数の関係という高次弾性定数について、異なる材料間でも共通の関係を発見し、ドメイン壁のピン止めによる効果、組成比の変更による結晶構造安定化の寄与などが、高次弾性定数の絶対値を減少させるための材料開発方針となり得る結果が得られた。

本章では測定上の問題点が少ないことから、圧電横効果振動子を用いて材料評価を行った。ただし、一般的には圧電縦効果振動子が圧電デバイスに用いられる場合が多い。そこで次章では、圧電縦効果振動子の測定・解析手法について述べる。

参考文献

- [1] Y. Noumura, S. Sato, Y. Hiruma, H. Nagata and T. Takenaka: “High-Power Piezoelectric Characteristics at Large-Amplitude Vibration of Bismuth Layer-Structured Ferroelectrics, $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9\text{-Bi}_3\text{TaTiO}_9$ Solid Solution”, *Transactions of the Materials Research Society of Japan*, Vol. 36 pp. 363-366, 2011
- [2] Y. Doshida, H. Shimizu, Y. Mizuno and H. Tamura: “Investigation of High-Power Properties of $(\text{Bi,Na,Ba})\text{TiO}_3$ and $(\text{Sr,Ca})_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ Piezoelectric Ceramics”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 52 07HE01, 2013
- [3] T. R. Shrout and S. J. Zhang: “Lead-free piezoelectric ceramics: Alternatives for PZT?”, *Journal of Electroceramics*, Vol.19 pp.111-124, 2007
- [4] Y. Saito, H. Takao, T. Tani, T. Nonoyama, K. Takatori, T. Homma, T. Nagaya and M. Nakamura: “Lead-free piezoceramics”, *Nature*, Vol.432 pp.84-87, 2004
- [5] S. Kawada, M. Kimura, Y. Higuchi and H. Takagi: “ $(\text{K,Na})\text{NbO}_3$ -Based Multilayer Piezoelectric Ceramics with Nickel Inner Electrodes”, *Applied Physics Express*, Vol.2 111401, 2009
- [6] Y. Liu and T. Morita: “Nonlinear coefficients in lead-free CuO-(K,Na)NbO_3 transducers”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol.54 07HC01, 2015
- [7] T. Matsuoka, H. Kozuka, K. Kitamura, H. Yamada, T. Kurahashi, M. Yamazaki and K. Ohbayashi: “KNN-NTK composite lead-free piezoelectric ceramic”, *Journal of Applied Physics*, Vol.116 154104, 2014
- [8] H. Yamada, T. Matsuoka, H. Kozuka, M. Yamazaki, K. Ohbayashi and T. Ida: “Improvement of the piezoelectric properties in $(\text{K,Na})\text{NbO}_3$ -based lead-free piezoelectric ceramic with two-phase co-existing state”, *Journal of Applied Physics*, Vol.117 214102, 2015
- [9] H. Yamada, T. Matsuoka, H. Kozuka, M. Yamazaki, K. Ohbayashi and T. Ida: “Crystal structure and phase transition behavior in $(\text{K}_{1-x}\text{Na}_x)\text{NbO}_3$ -based lead-free

piezoelectric ceramic over a wide range of temperatures”, *Journal of Applied Physics*, Vol.120 214102, 2016

[10] K. Ohbayashi: “Piezoelectric Properties and Microstructure of (K,Na)NbO₃-KTiNbO₅ Composite Lead-Free Piezoelectric Ceramic”, T. Ogawa(Ed.), *InTech*, 2016

[11] D. Xue, Y. Zhou, H. Bao, C. Zhou, J. Gao and X. Ren: “Elastic, piezoelectric, and dielectric properties of Ba(Zr_{0.2}Ti_{0.8})O₃-50(Ba_{0.7}Ca_{0.3})TiO₃ Pb-free ceramic at the morphotropic phase boundary”, *Journal of Applied Physics*, Vol.109 054110, 2011

[12] [1] (株)ティー・アイ・シー 編集部: “注目の誘電体セラミックス材料(1) シリーズ「ナノからテラへ」 応用に根ざした非鉛圧電材料の設計”, ティー・アイ・シー, 2014

[13] 竹中 正: “超音波圧電デバイスの無鉛材料化”, 日本音響学会誌, 66 巻 7 号, pp.331-338, 2010

[14] Y. Himura, T. Watanabe, H. Nagata and T. Takenaka: “Piezoelectric Properties of (Bi_{1/2}Na_{1/2})TiO₃-Based Solid Solution for Lead-Free High Power Applications”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol.47, No. 9, pp.7659-7663, 2008

[15] 「無鉛ボルト締めランジュバン型振動子」, < <https://www.honda-el.co.jp/ceramics/Lead-off.html> > 2018 年 1 月 12 日アクセス

[16] Masaru Miyayama: “Function Design of Bismuth Layer-Structured Ferroelectrics”, *Journal of the Ceramic Society of Japan*, Vol.114[7] pp.583-589, 2006

[17] Y. Nomura, S. Sato, Y. Himura, H. Nagata and T. Takenaka: “High-Power Piezoelectric Characteristics at Large-Amplitude Vibration of Bismuth Layer-Structured Ferroelectrics, SrBi₂Ta₂O₉-Bi₃TaTiO₉ Solid Solution”, *Transactions of the Materials Research Society of Japan*, Vol.36[3] pp.363-366, 2011

[18] 松岡 誉幸: “圧電磁器組成物及びこれを用いた圧電素子”, JP 5714819,

2015

[19] 岩瀬正志, 田村英樹, 広瀬清二, 青柳学, 高野剛浩, 富川義郎: “LiNbO₃ バルクモードの大振幅励振破壊限界に関する測定”, 日本音響学会講演論文集 2007 秋季, pp.1281-1284, 2007

第4章 圧電縦効果振動子の測定

4.1 序論	117
4.2 圧電縦効果での圧電非線形振動モデル	118
4.3 アドミッタンス測定による高次弾性定数の算出	127
4.4 5次弾性項の影響についての考察	129
4.5 結論	132

4.1 序論

前章まで、圧電横効果振動子を用いてハイパワー特性評価を行ってきた。しかし、一般的には圧電デバイスに用いられることが多いのは圧電定数が高い圧電縦効果振動子である。そこで本章では、圧電縦効果振動子の場合の非線形振動解析手法について述べる。

圧電縦効果の場合、電界印加方向を振動方向が同方向であるため、圧電振動子の振動によって内部に電界分布が生じる。このため、圧電横効果とは異なる導出方法で非線形伝達マトリックスを導出する必要があるため、まずその導出方法について述べる。次に、導出した非線形マトリックスを用いてアドミタンス測定結果に対してフィッティングを行い、PZT 振動子の高次弾性定数を求め、圧電横効果から求めた高次弾性定数との比較を行う。さらに、印加電界の強さに応じて必要となる 5 次以上の弾性定数の導入について述べる。

4.2 圧電縦効果での圧電非線形振動モデル

前章までに、2章で述べたような圧電横効果の非線形振動モデルを用いて非線形振動解析を行ったが、本章では圧電縦効果でも同様の高次弾性を考慮した非線形モデルを考案する。線形の圧電方程式(d 形式)は次のように表される。 $[d_t]$ は $[d]$ の転置であることを表す^[1]。

$$\mathbf{S} = [s^E]\mathbf{T} - [d_t]\mathbf{E} \quad (4-1)$$

$$\mathbf{D} = [d]\mathbf{T} - [\varepsilon^T]\mathbf{E} \quad (4-2)$$

ここで、応力 \mathbf{T} 、歪み \mathbf{S} 、電束密度 \mathbf{D} 、電界 \mathbf{E} はそれぞれ次のようなテンソル表示で表される。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

また、コンプライアンス $[s^E]$ 、圧電定数 $[d]$ 、誘電率 $[\varepsilon^T]$ はそれぞれ

$$[s^E] = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

$$[d] = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d & d_{33} & d_{34} & d & d_{36} \end{pmatrix} \quad (4-8)$$

$$[\varepsilon^T] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

となっている。ここで図 4.1 のような z 方向に分極処理された圧電セラミックス振動子を考える。分極処理されたことにより、コンプライアンス $[s^E]$ 、圧電定数 $[d]$ 、誘電率 $[\varepsilon^T]$ はいくつかの成分が対称性により打ち消される、あるいは同値とすることができるので、次のようになる^[2]。

$$[s^E] = \begin{pmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E \end{pmatrix} \quad (4-10)$$

$$[d] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

$$[\varepsilon^T] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

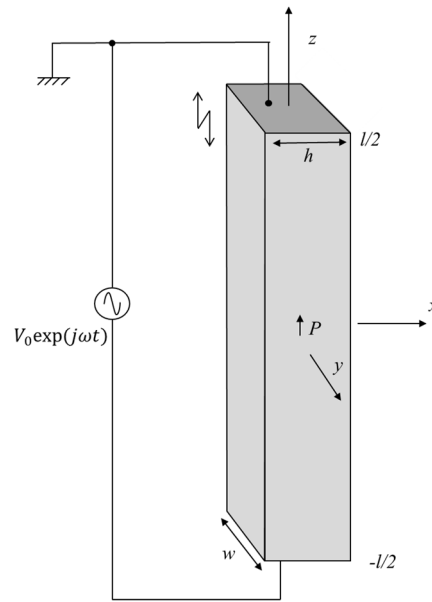


図 4.1 圧電縦効果振動子

圧電縦効果振動子場合、分極方向(z 方向)と同方向に電界を印加できるように電極面を形成し、振動子寸法は x, y 方向に対して z 方向を長くとした細棒形状として、x, y 方向の変位に比べて z 方向の変位は顕著に表れるように工夫がなされている。このような場合、応力、電界、電束密度はそれぞれ z 方向の成分 T_3 、 E_3 、 D_3 以外の成分は全て 0 と考えることができる。式(4-1)より、z 方向の歪み S_3 は

$$S_3 = s_{33}^E T_3 + d_{33} E_3 \quad (4-13)$$

となり、応力 T_3 は

$$T_3 = \overline{c_{33}^E} S_3 - \overline{e_{33}} E_3 \quad (4-14)$$

と表される。ただし、 $\overline{c_{33}^E} = \frac{1}{s_{33}^E}$ 、 $\overline{e_{33}} = \frac{d_{33}}{s_{33}^E}$ とおいた。この式と式(4-2)より、電束密度 D_3 は

$$\begin{aligned} D_3 &= d_{33} T_3 + \varepsilon_{33}^T E_3 \\ &= \overline{e_{33}} S_3 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \end{aligned} \quad (4-15)$$

と表される。ただし、 $\overline{\varepsilon_{33}^S} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E}$ とおいた。

さらに、本章では高次弾性を考慮するため、歪み S_3 の高次項を圧電方程式に導入する。式(4-14)(4-15)に高次弾性項を含めた、非線形圧電方程式は以下のように表される。

$$\begin{cases} T_3 = \overline{c_{33}^E} S_3 + c_{33(3)}^E S_3^3 - \overline{e_{33}} E_3 \\ D_3 = \overline{e_{33}} S_3 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \end{cases} \quad (4-16)$$

ここで $c_{33(3)}^E$ は 3 次弾性定数である。ただし、弾性定数は弾性損失を含むため、1 次、3 次ともに以下のように複素数とした。

$$\overline{c_{33}^E} = \text{Re}(\overline{c_{33}^E}) + j\text{Im}(\overline{c_{33}^E}) \quad (4-17)$$

$$c_{33(3)}^E = \text{Re}(c_{33(3)}^E) + j\text{Im}(c_{33(3)}^E) \quad (4-18)$$

この非線形圧電方程式から、2.5 節での圧電横効果の場合で導出したような、非線形伝達マトリックスを導出する。ただし、圧電縦効果の場合には印加電界と同方向に圧電体が振動するため、圧電体の歪み分布に伴って圧電体内部に電界分布が生じ、この点が圧電横効果とは異なる点となる。よって、圧電縦効果の場合には、電束密度 D_3 が位置に依らず一定 ($\frac{\partial D_3}{\partial x} = 0$) となることを用

いる。

この条件からまず電界分布を求めると、式(4-15)より、

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = -\frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^S} \frac{\partial S_3}{\partial z} = -\frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^S} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4-19)$$

となり、

$$E_3 = -\frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^S} \frac{\partial u}{\partial z} + C_1 \quad (4-20)$$

となる。ただし C_1 は積分定数である。

式(4-20)を圧電方程式(4-16)に代入すると、応力 T_3 は

$$\begin{aligned} T_3 &= \left(\overline{c_{33}^E} + \frac{\overline{e_{33}}^2}{\varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 - \overline{e_{33}} C_1 \\ &= \overline{c_{33}^D} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 - C_1 \end{aligned} \quad (4-21)$$

となる。ただし、 $\overline{c_{33}^D} = \overline{c_{33}^E} + \frac{\overline{e_{33}}^2}{\varepsilon_{33}^S}$ とおいた。

ここで、右辺第1、2項に着目し、変位 $u(x, t) = u_x e^{j\omega t}$ のように表されるとすると、

$$\overline{c_{33}^D} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 = \overline{c_{33}^D} \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^3 (e^{j\omega t})^3 \quad (4-22)$$

となるが、ここで、 $(e^{j\omega t})^3$ の取り扱いについて、実部のみに注目し、2.5 節と同様に、

$$\cos^3 \omega t = \frac{3 \cos \omega t + \cos 3\omega t}{4} \quad (4-23)$$

となることから、角周波数 ω の振動に加えて、高次弾性項の影響で角周波数 3ω の高調波が励振されていることが分かる。高調波成分を除くことで、 $(e^{j\omega t})^3$ の部分を $\frac{3}{4} e^{j\omega t}$ と表すと、式(4-21)は

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \overline{c_{33}^D} \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} + \frac{3}{4} c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^3 e^{j\omega t} - \overline{e_{33}} C_1 \\
 &= \left\{ \overline{c_{33}^D} + \frac{3}{4} c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} - \overline{e_{33}} C_1 \\
 &= c' \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} - \overline{e_{33}} C_1
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

となる。ここで、非線形成分を含んだスティフネスを

$$c' = \overline{c_{33}^D} + \frac{3}{4} c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \tag{4-25}$$

とおいた。これは歪み振幅に応じて見かけのスティフネスが変化することを表している。次に、積分定数 C_1 を求める。

振動変位 u の一般式を

$$\begin{aligned}
 u(z, t) &= \left(A \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) \right) e^{j\omega t} \\
 &= u_z e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{4-26}$$

とおく。ただし ω を駆動周波数、 c を音速、 θ を位相遅れとする。

印加電圧を $V = -V_0 e^{j\omega t}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 -V_0 e^{j\omega t} &= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_3 dz \\
 &= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\overline{e_{33}}}{\overline{\epsilon_{33}^S}} \frac{\partial u}{\partial z} + C_1 \right) dz \\
 &= \frac{\overline{e_{33}}}{\overline{\epsilon_{33}^S}} \left\{ u\left(\frac{l}{2}, t\right) - u\left(-\frac{l}{2}, t\right) \right\} - C_1 l \\
 &= 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\overline{\epsilon_{33}^S}} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) e^{j\omega t} - C_1 l
 \end{aligned} \tag{4-27}$$

となり、積分定数 C_1 は以下のように表される。

$$C_1 = 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\overline{\epsilon_{33}^S} l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) e^{j\omega t} + \frac{V_0}{l} e^{j\omega t} \tag{4-28}$$

よって、電界分布は

$$E_3 = - \frac{\overline{e_{33}}}{\overline{\epsilon_{33}^S}} \frac{\partial u}{\partial z} + 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\overline{\epsilon_{33}^S} l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) e^{j\omega t} + \frac{V_0}{l} e^{j\omega t} \tag{4-29}$$

となり、応力 T_3 は

$$T_3 = \left\{ c' \frac{\partial u_z}{\partial z} - 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^s l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - \overline{e_{33}} \frac{V_0}{l} \right\} e^{j\omega t} \quad (4-30)$$

と表される。よって、振動子先端($z = -\frac{l}{2}$)にかかる力の大きさを F_1 とすると、

$$\begin{aligned} F_1 e^{j\omega t} &= -wh T_{3_{z=-\frac{l}{2}}} \\ &= -wh \left[c' \left(\frac{\omega}{c} \right) \left\{ A \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right\} - 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^s l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\overline{e_{33}} V_0}{l} \right] e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4-31)$$

両辺 $e^{j\omega t}$ で割って、

$$F_1 = -wh \left[c' \left(\frac{\omega}{c} \right) \left\{ A \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right\} - 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^s l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - \frac{\overline{e_{33}} V_0}{l} \right] \quad (4-32)$$

となる。同様に $z = \frac{l}{2}$ の端面にかかる力の大きさを F_2 とすると、

$$F_2 = -wh \left[c' \left(\frac{\omega}{c} \right) \left\{ -A \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right\} - 2B \frac{\overline{e_{33}}}{\varepsilon_{33}^s l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - \frac{\overline{e_{33}} V_0}{l} \right] \quad (4-33)$$

となる。

ここで、 $z = -\frac{l}{2}$ 、 $z = \frac{l}{2}$ の両端の振動速度をそれぞれ $v_1 e^{j\omega t}$ 、 $v_2 e^{j\omega t}$ とすると、

$$v_1 = j\omega \left(A \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - B \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right) \quad (4-34)$$

$$v_2 = j\omega \left(A \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right) \quad (4-35)$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & -\sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (4-36)$$

よって定数 A, B は

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2j\omega \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \\ -\cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) & \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (4-37)$$

と表される。

式(4-32)に代入して、

$$\begin{aligned}
 F_1 - \frac{wh\bar{e}_{33}}{l}V_0 &= -whc' \frac{\omega}{c} \frac{1}{2j\omega \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \left\{ (v_1 + v_2) \sin^2\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right. \\
 &\quad \left. + (-v_1 + v_2) \cos^2\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \right\} \\
 &\quad + \frac{-\cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right)v_1 + \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right)v_2}{2j\omega \cos\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} 2wh \frac{\bar{e}_{33}}{\varepsilon_{33}^S l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) \\
 &= \frac{jwhc'}{2c} \left\{ (v_1 + v_2) \tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + (-v_1 + v_2) \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \right\} + \frac{wh\bar{e}_{33}}{j\omega \varepsilon_{33}^S l} (v_2 - v_1) \\
 &= \frac{jwhc'}{2c} \left\{ \left(\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \right) v_1 + \left(\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{2c}\right)} \right) v_2 \right\} \\
 &\quad + \frac{wh\bar{e}_{33}}{j\omega \varepsilon_{33}^S l} (v_2 - v_1) \\
 &= \frac{jwhc'}{c} \left\{ -\frac{1}{\tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)} v_1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)} v_2 \right\} + \frac{wh\bar{e}_{33}}{j\omega \varepsilon_{33}^S l} (v_2 - v_1)
 \end{aligned} \tag{4-38}$$

となる。ただし、式変形の途中で以下の関係式を用いた。

$$\tan \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = -\frac{2}{\tan \theta} \tag{4-39}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\sin \theta} \tag{4-40}$$

ここで波数 k 、力係数 A 、音響インピーダンス Z_0 、断面積 S 、制動容量 C_d を以下のようにおく。

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{4-41}$$

$$A = \frac{wh\bar{e}_{33}}{l} \tag{4-42}$$

$$Z_0 = \frac{c'}{c} \tag{4-43}$$

$$S = wh \quad (4-44)$$

$$C_d = \frac{\overline{\varepsilon}_{33}^S wh}{l} \quad (4-45)$$

また、これにより式(4-38)は、

$$\begin{aligned} F_1 - AV_0 &= -\left\{ \frac{jSZ_0}{\tan(kl)} + \frac{A^2}{j\omega C_d} \right\} v_1 + \left\{ \frac{jSZ_0}{\sin(kl)} + \frac{A^2}{j\omega C_d} \right\} v_2 \\ &= -av_1 + bv_2 \end{aligned} \quad (4-46)$$

となる。同様に式(4-33)についても、

$$\begin{aligned} F_2 - AV_0 &= -\left\{ \frac{jSZ_0}{\sin(kl)} + \frac{A^2}{j\omega C_d} \right\} v_1 + \left\{ \frac{jSZ_0}{\tan(kl)} + \frac{A^2}{j\omega C_d} \right\} v_2 \\ &= -bv_1 + av_2 \end{aligned} \quad (4-47)$$

となる。ただし、 $a = \frac{jSZ_0}{\tan(kl)} + \frac{A^2}{j\omega C_d}$ 、 $b = \frac{jSZ_0}{\sin(kl)} + \frac{A^2}{j\omega C_d}$ とおいた。

式(4-46)(4-47)より、 v_1 を消去して、 F_1 を F_2 と v_2 の式で表すと、

$$F_1 = -\frac{a}{b}F_2 + \frac{-a^2 + b^2}{b}v_2 + \frac{a+b}{b}AV_0 \quad (4-48)$$

また、 F_1 を消去して、 v_1 を F_2 と v_2 の式で表すと、

$$v_1 = -\frac{1}{b}F_2 - \frac{a}{b}v_2 + \frac{1}{b}AV_0 \quad (4-49)$$

となる。また、このとき圧電体を流れる電流 I は、式(4-16)(4-29)より、

$$\begin{aligned} I &= wh \frac{\partial D_3}{\partial t} \\ &= wh \frac{\partial}{\partial t} (\overline{e}_{33} S_3 + \overline{\varepsilon}_{33}^S E_3) \\ &= wh \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2B \frac{\overline{e}_{33}}{l} \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + \overline{\varepsilon}_{33}^S \frac{V_0}{l} \right\} e^{j\omega t} \\ &= \left\{ \frac{j\omega wh \overline{e}_{33}}{l} 2B \sin\left(\frac{\omega l}{2c}\right) + \frac{j\omega wh}{l} \overline{\varepsilon}_{33}^S V_0 \right\} e^{j\omega t} \\ &= \{A(v_2 - v_1) + j\omega C_d V_0\} e^{j\omega t} \\ &= \frac{c}{b}F_2 + \frac{c(a+b)}{b}v_2 + \frac{bd - c^2}{b}V_0 \end{aligned} \quad (4-50)$$

となるので、以上をまとめて、

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \\ V_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} & \frac{-a^2 + b^2}{b} & \frac{a+b}{b}A & 0 \\ -\frac{1}{b} & -\frac{a}{b} & \frac{1}{b}A & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{b} & \frac{c(a+b)}{b} & \frac{bd-c^2}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \\ V_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \quad (4-51)$$

となり、圧電体の伝達マトリックスが得られる。

33 効果の圧電振動の場合には振動方向に対して電束密度が一定であるため、電束密度 D_3 を用いて伝達マトリックスの計算を行う。 D_3 を求めるためには、以下の式を用いる。

$$D_3 = \frac{\overline{\varepsilon_{33}^s}}{l} V + \frac{\overline{e_{33}}}{j\omega l} (v_2 - v_1) \quad (1)$$

ここで印加電圧を V 、振動子の長さを l 、振動子両端の振動速度を v_1 、 v_2 とした。式(9)は印加電圧 V によって電束密度 D_3 と先端振動速度 v_1 、 v_2 との関係が決まることを表しており、式(9)と振動子の両端面間での伝達マトリックスを合わせて計算することで、33 効果の圧電振動子の変位や応力のモード形状を計算できる。さらに、圧電振動子に流れる電流 I を

$$I = \frac{d}{dt} \int_S D_3 dS = j\omega S D_3 \quad (2)$$

として求めることで、圧電振動子のアドミッタンス $Y = \frac{I}{V}$ を計算することができる。以上のように導出した非線形伝達マトリックスは、2.5 節で述べたような圧電横効果の場合と同様に、ループ計算のアルゴリズムを用いて計算することで、振動速度や応力のモード形状、アドミッタンスを求めることができる。

4.3 アドミッタンス測定による高次弾性定数の算出

前節で導出した非線形伝達マトリックスを用いたアドミッタンス計算手法を用いて、ハード系 PZT セラミックス振動子(富士セラミックス PZT C-203 $3 \times 3 \times 15$ mm)のアドミッタンス曲線に対してカーブフィッティングを行い、高次弾性定数を推定した。実行プログラムを付録(3)に示す。測定系は前節の図 3.1 と同様であるが、3 章での圧電横効果の場合には振動子の支持面が電極面であるため、支持を行うピンから直接電界印加が可能であったが、本章のような圧電横効果の場合では支持面は電極面とはならないため、電極面に導線をはんだ付けして電界印加を行った。このような場合、微量のはんだや導線が負荷質量となって計測に影響を与える場合もあり、この点も圧電縦効果振動子の測定の困難さの一因となっている^[3]。

1 次共振周波数付近でのアドミッタンス測定結果を図 4.2 に示す。測定電圧は 10Vpp から 300Vpp の範囲で、10Vpp を除く各測定電圧ではヒステリシスの観測のため、周波数のスイープ方向を UP、DOWN の 2 種類計測した。この結果にフィッティングを行い、3 次弾性定数を算出した。図 4.3 に測定した 3 次弾性定数の実部 $\text{Re}(c_{11(3)}^E)$ 、虚部 $\text{Im}(c_{11(3)}^E)$ と印加電界の関係を示す。測定した 3 次弾性定数は印加電界の増加に従って変化しており、本来定数であるはずの 3 次弾性定数に何らかの非線形成分の影響が加わっていることを表している。本結果に対して、振幅の増加による 5 次弾性振動の影響が表れているものと仮説を立て、次節でその検証を行う。

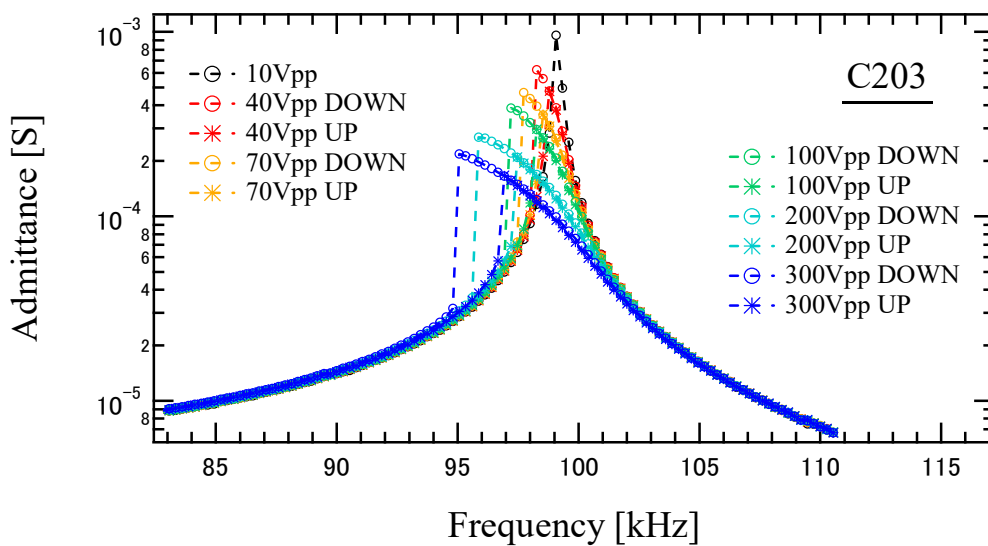


図 4.2 ハード系 PZT(C-203)のアドミッタンス測定結果

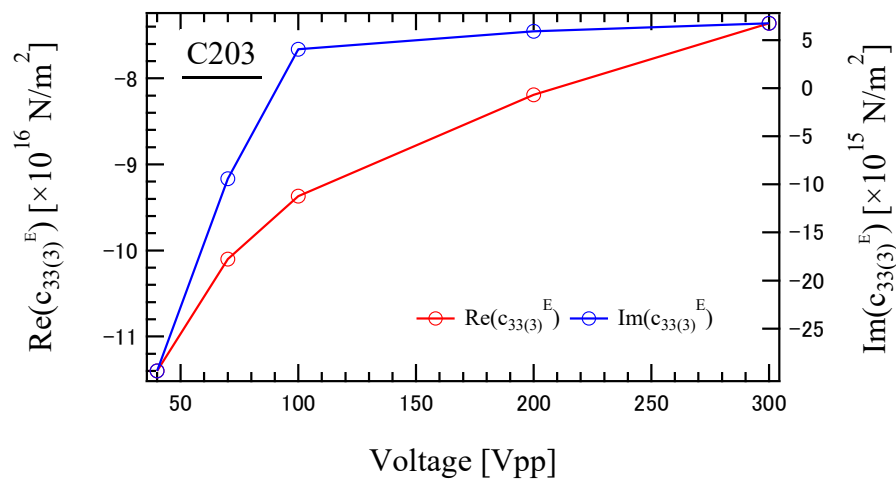


図 4.3 測定した 3 次弾性定数と印加電界の関係

4.4 5 次弾性項の影響についての考察

前節において、3 次弾性定数が定数とならず、印加電界依存性があることが示された。これは、印加電界の増加に従って歪み振幅が大きくなり、3 次弾性振動に加えて 5 次弾性振動の影響が大きくなっていることが原因であると考えられる。そこで、3 次弾性項に加えて、5 次弾性項を加えた圧電方程式からモデルを構築し、3 次のみのモデルと測定結果の比較を行った。

3 次弾性項を加えた非線形圧電方程式は式(4-16)のように表されたが、これに加えて歪みの 5 次の項を加える事で、非線形圧電方程式は次のように表される。

$$\begin{cases} T_3 = \overline{c_{33}^E} S_3 + c_{33(3)}^E S_3^3 + c_{33(5)}^E S_3^5 - \overline{e_{33}} E_3 \\ D_3 = \overline{e_{33}} S_3 + \overline{\varepsilon_{33}^S} E_3 \end{cases} \quad (4-52)$$

ここで、 $c_{33(5)}^E$ は 5 次弾性定数である。前節の式(4-17)-(4-20)と同様に計算を行うと、応力 T_3 は、

$$\begin{aligned} T_3 &= \left(\overline{c_{33}^E} + \frac{\overline{e_{33}}^2}{\overline{\varepsilon_{33}^S}} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 + c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^5 - \overline{e_{33}} C_1 \\ &= \overline{c_{33}^D} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 + c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^5 - C_1 \end{aligned} \quad (4-53)$$

と表される。

ここで、右辺第 1、2、3 項に着目し、変位 $u(x, t) = u_x e^{j\omega t}$ のように表されるとすると、

$$\begin{aligned} &\overline{c_{33}^D} \frac{\partial u}{\partial z} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 + c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^5 \\ &= \overline{c_{33}^D} \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} + c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^3 (e^{j\omega t})^3 \\ &\quad + c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^5 (e^{j\omega t})^5 \end{aligned} \quad (4-54)$$

となるが、ここで $(e^{j\omega t})^5$ の取り扱いについて、2.5 節と同様に $e^{j\omega t}$ の実部の 5 乗である $\cos^5 \omega t$ に着目し、

$$\cos^5 \omega t = \frac{10 \cos \omega t + 5 \cos 3\omega t + \cos 5\omega t}{16} \quad (4-55)$$

となることから、高調波成分を除くと、式(4-21)は

$$\begin{aligned}
 T_3 &= \overline{c_{33}^D} \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} + \frac{3}{4} c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^3 e^{j\omega t} + \frac{5}{8} c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^5 e^{j\omega t} - \overline{e_{33}} C_1 \\
 &= \left\{ \overline{c_{33}^D} + \frac{3}{4} c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{5}{8} c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^4 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} - \overline{e_{33}} C_1 \\
 &= c' \frac{\partial u_z}{\partial z} e^{j\omega t} - \overline{e_{33}} C_1
 \end{aligned} \tag{4-56}$$

となる。よって、3次弾性、5次弾性成分を含んだスティフネスは

$$c' = \overline{c_{33}^D} + \frac{3}{4} c_{33(3)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{5}{8} c_{33(5)}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^4 \tag{4-57}$$

と表される。この非線形スティフネスを用いて、式(4-46)-(4-51)と同様の計算を行うことで、5次弾性を考慮した非線形伝達マトリックスを導出することができる。

このように導出した5次弾性まで含めた非線形モデル(5次モデル)を用いて、図4.2 ハード系 PZT(C-203)のアドミッタンス測定結果に示したアドミッタンス測定結果をフィッティングし、3次弾性定数、5次弾性定数を算出した。実行プログラムを付録(4)に示す。前節で用いたモデル(3次モデル)と本節で導出した5次モデルによって算出された、3次弾性定数の実部、虚部と印加電界の関係を図4.4に示す。40Vpp、70Vpp印加時と100Vpp以上印加時では、3次弾性定数のみを考慮したモデルでは虚部の値の正負が反転しており、5次を加えたモデルではフィッティング計算が収束せず値を得ることができなかった。これらの原因としては、40Vpp、70Vpp印加時には高次弾性振動を評価するために十分な振幅が得られていなかったためであると考えられる。そこで、以降の議論では100Vpp以上の印加電圧に着目して議論を行う。3次弾性定数のみを考慮したモデルの場合、印加電圧の増加に対して3次弾性定数の変化は大きく、実部で21%、虚部で66%となっている。これに対して、5次弾性定数を考慮に加えたモデルの場合では、3次弾性定数の値の変化は小さく、変化の割合は実部で0.5%、虚部で39%となった。これにより、200Vpp、300Vpp印加時には圧電振動子の大幅振動によって、5次弾性振動の影響が3次弾性振動と同様に顕著となり、圧電材料の非線形特性評価を行う上で考慮する必要があることが明らかとなった。

また、5次モデルによって算出された5次弾性定数の実部、虚部と印加電界の関係を図4.4 3次モデル、5次モデルにより算出した3次弾性定数と印加電界の関係図4.5に示す。こちらも5次弾性定数まで考慮したモデルでフィッティングが収束した100Vpp以上の電圧について、5次弾性定数の値を示した。図2における3次弾性定数と同様に、印加電圧の増加に従って5次弾性定数が変化しており、7次以上の高次成分の影響が表れていると考えら

れる。

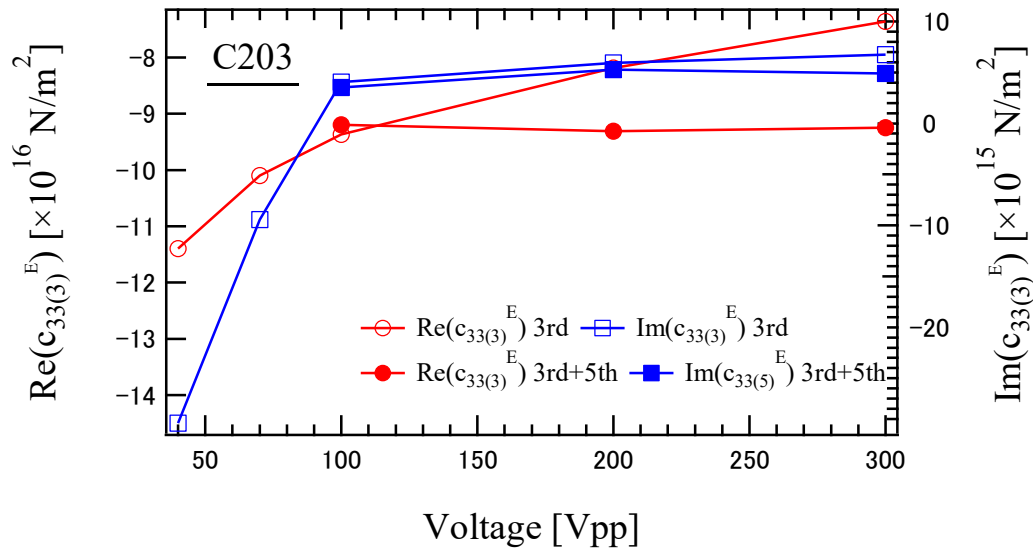


図 4.4 3 次モデル、5 次モデルにより算出した 3 次弾性定数と印加電界の関係

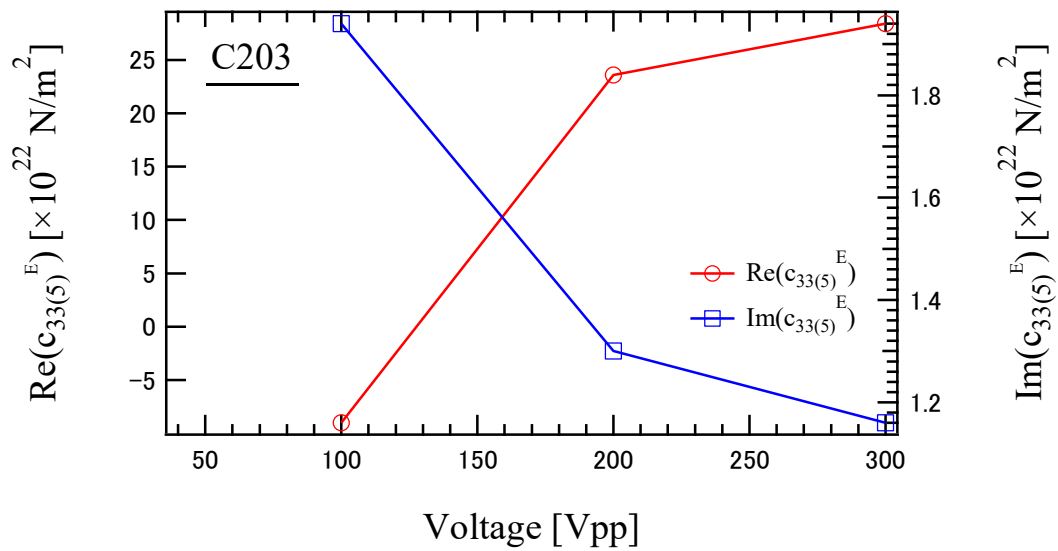


図 4.5 5 次モデルにより導出した 5 次弾性定数と印加電界の関係

4.5 結論

本章では、圧電デバイスで利用されることの多い、33 効果の圧電振動のハイパワー特性の評価指標とするため、圧電材料の 3 次弾性定数を測定した。33 効果の 3 次弾性定数を求める手法として、非線形伝達マトリックスを用いた計算によるアドミタンス曲線のフィッティングを考案した。提案する手法を用いてハード系 PZT セラミックス振動子のアドミタンス測定結果をフィッティングし、3 次弾性定数を算出したところ、3 次弾性定数が印加電界の変化に従って変化を示した。そこで、3 次弾性定数に加えて 5 次弾性定数を考慮した非線形伝達マトリックスを考案し、5 次弾性定数を考慮しないモデルとの比較を行った。その結果、圧電材料の歪み・応力が比較的大きくなった場合には、5 次弾性振動が顕著となり、5 次弾性定数を考慮したモデルを用いることで、3 次弾性定数のより正確な測定が行えることが明らかとなった。ただし、5 次弾性定数の測定結果が電圧依存性を示していたことから、歪みの増加に従って、7 次以上の弾性振動の振幅も同様に大きくなるものと考えられる。

参考文献

- [1] 森田剛：“圧電現象”，森北出版, 2017
- [2] T. L. Jordan, and Z. Ounaies: “Piezoelectric Ceramics Characterization”, *National Aeronautics and Space Administration (NASA) ICASE Report*, No. 2001-28, 2001
- [3] M. Slabki, J. Wu, M. Weber, P. Breckner, D. Isaia, K. Nakamura and J. Koruza: “Anisotropy of the high-power piezoelectric properties of $\text{Pb}(\text{Zr,Ti})\text{O}_3$ ”, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 102, pp. 6008-6017, 2019

第5章 自己発熱を考慮した圧電 非線形振動モデル

5.1 序論	135
5.2 圧電体の物性値の温度依存性測定	136
5.3 非線形振動と温度上昇の相互影響のモデル化	143
5.4 単板振動子のアドミッタンス計算	149
5.5 単板振動子のハイパワー駆動実験	151
5.6 結論	154

5.1 序論

前章まで、圧電材料のハイパワー特性評価の指標として高次弾性定数を用いる方法を提案した。しかし、実際の圧電振動子のハイパワー駆動時には、大振幅の振動に伴って自己発熱が生じることが避けられず、温度上昇によって圧電材料の物性値は変化する。特に、図 5.1 に示すように機械的品質係数 Q_m は大幅に減少する^[1]。加えて、高次弾性定数にも温度依存性があると考えられる。そこで本章では、高次弾性定数を含めた圧電材料の物性値の温度依存性を測定すると共に、圧電横効果振動子を対象として、非線形伝達マトリックスを用いた非線形振動の計算と、発熱による温度上昇の相互影響を考慮した計算モデルを考案し、より実際の駆動状況に近い計算を実現することを目指す。

はじめに非線形伝達マトリックスと温度分布計算を組み合わせる手法について述べ、その後圧電振動子のバースト駆動と連続駆動時の温度分布と振動速度を計算し、測定結果との比較を行う。

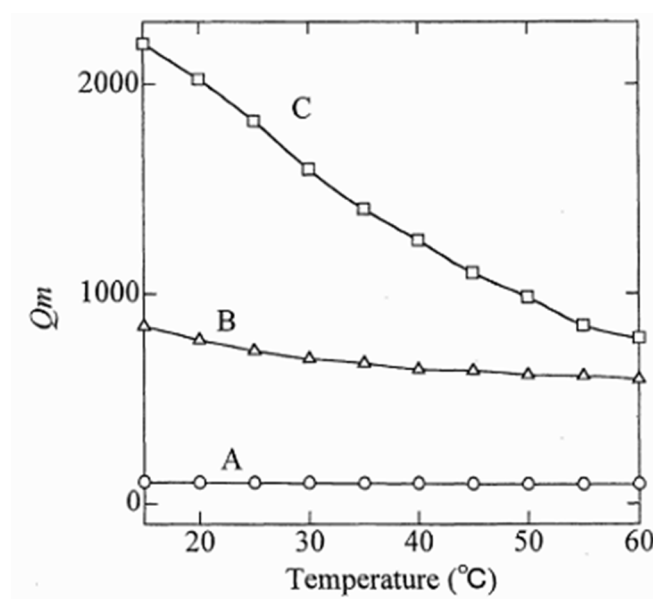


図 5.1 圧電振動子の機械的品質係数 Q_m と温度の関係^[1]

5.2 圧電体の物性値の温度依存性測定

圧電振動子のハイパワー駆動時には自己発熱が避けられず、温度上昇によって物性値が変化すると考えられる。特に本研究で導入した高次弾性定数は温度依存性が未知である。そこで本節では、PZTの圧電横効果振動子(富士セラミックス C-203 7×2×44 mm)を用いて、高次弾性定数を含めた圧電振動子の物性値について、温度依存性を測定した。図 5.2 に測定系を示す。3章で用いたものと同様のアドミッタンス測定系でアドミッタンス曲線を測定し、物性値はアドミッタンス曲線のフィッティングによって推定したが、圧電振動子を送風定温恒温器(Yamato DKN302)内に設置し、環境温度を変化させながらアドミッタンス測定を行った。環境温度は 28℃から 60℃の範囲で変化させ、各環境温度において振動子が均一に環境温度と同じ温度となるまで十分に時間をとる必要がある。そこで、各温度の間に 1 時間以上の測定間隔をとり、データロガーによって測定する振動子中心温度が飽和し、アドミッタンス測定結果が変化しなくなることを確認した上でアドミッタンス測定を行った。また、アドミッタンス測定時には測定による支持点の発熱が 1℃未満となるよう、短時間での測定を行った。500mVpp で測定したアドミッタンス曲線を図 5.3 に、その共振周波数近傍の図を図 5.4 に、10Vpp で測定したアドミッタンス曲線を図 5.5 に、その共振周波数近傍の図を図 5.6 に示す。

駆動電圧 500mVpp、環境温度 60℃のアドミッタンス曲線に対してフィッティングを行った結果を図 5.7 に、駆動電圧 10Vpp、環境温度 60℃のアドミッタンス曲線に対してフィッティングを行った結果を図 5.8 に示す。各温度で測定されたアドミッタンス曲線に対するフィッティングにより得られた圧電振動子のコンプライアンス、減衰係数、圧電定数、誘電率の温度依存性を図 5.9 に示す。コンプライアンスは他の物性値に比べて温度依存性が非常に小さく、平均値 1.33×10^{-11} [m²/N] から $\pm 0.6\%$ の範囲に収まっている。一方、減衰係数、圧電定数、誘電率はそれぞれ温度の上昇に従って増加した。それぞれの測定結果に対して線形回帰を行い、得られた温度係数は、以下のようになった。減衰係数の温度係数が最も大きく、温度上昇によって特に損失が増大することが明らかになった。すなわち、温度上昇による物性値変化は発熱をさらに増加させ、発熱と損失の相互影響によって振動効率が急激に低下することが予想される。

$$\alpha_{\beta_0} = 2.68 \times 10^{-2} [^{\circ}\text{C}^{-1}] \quad (5-1)$$

$$\alpha_{d_{31}} = 1.64 \times 10^{-3} [^{\circ}\text{C}^{-1}] \quad (5-2)$$

$$\alpha_{\epsilon_{33}^S} = 3.86 \times 10^{-3} [^{\circ}\text{C}^{-1}] \quad (5-3)$$

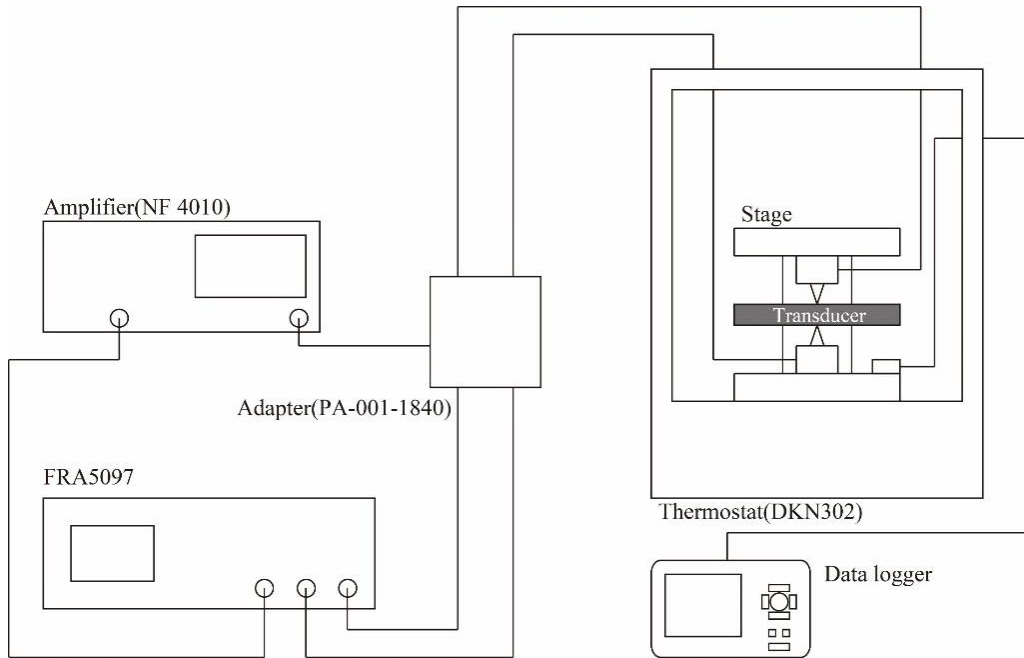


図 5.2 圧電振動子の物性値の温度依存性測定系

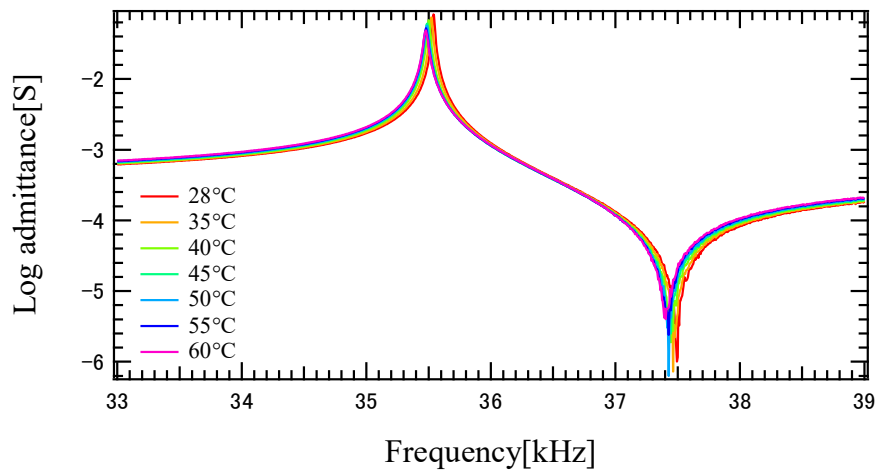


図 5.3 圧電体の温度を一様にした状態でのアドミッタンス測定(500mV_{pp}駆動)

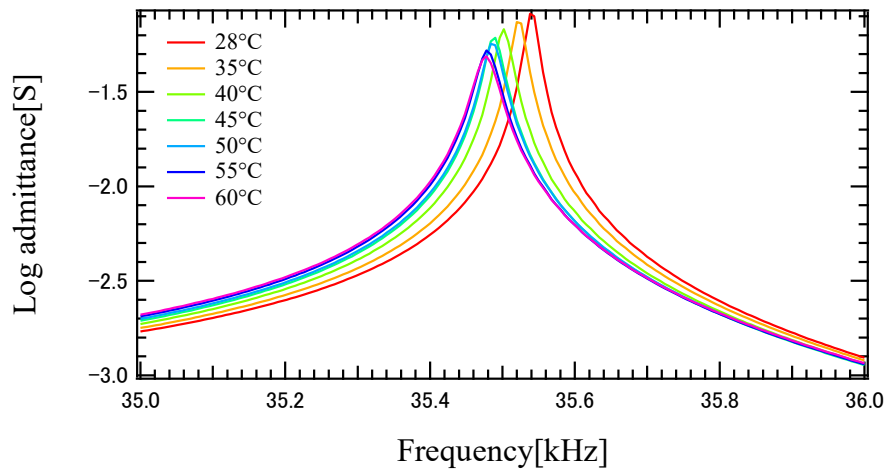


図 5.4 共振周波数近傍でのアドミッタンス (500mV_{pp}駆動)

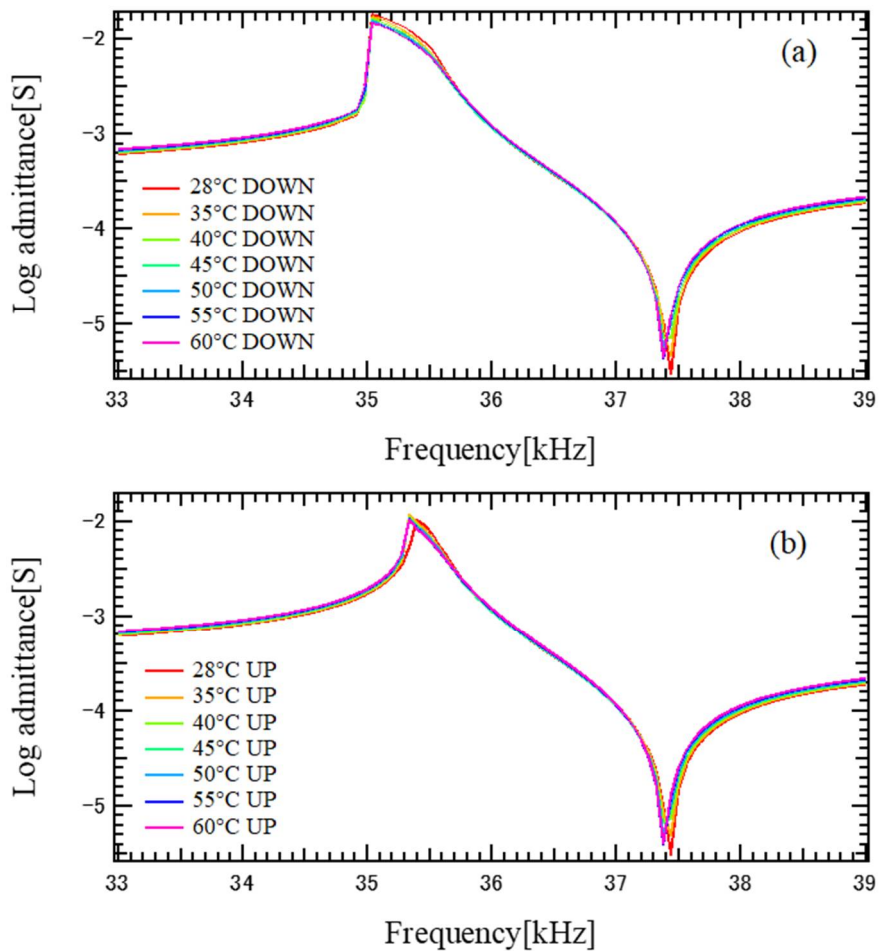


図 5.5 圧電体の温度を一様にした状態でのアドミッタンス測定(10V_{pp}駆動)
(a)DOWN スイープ測定、(b)UP スイープ測定

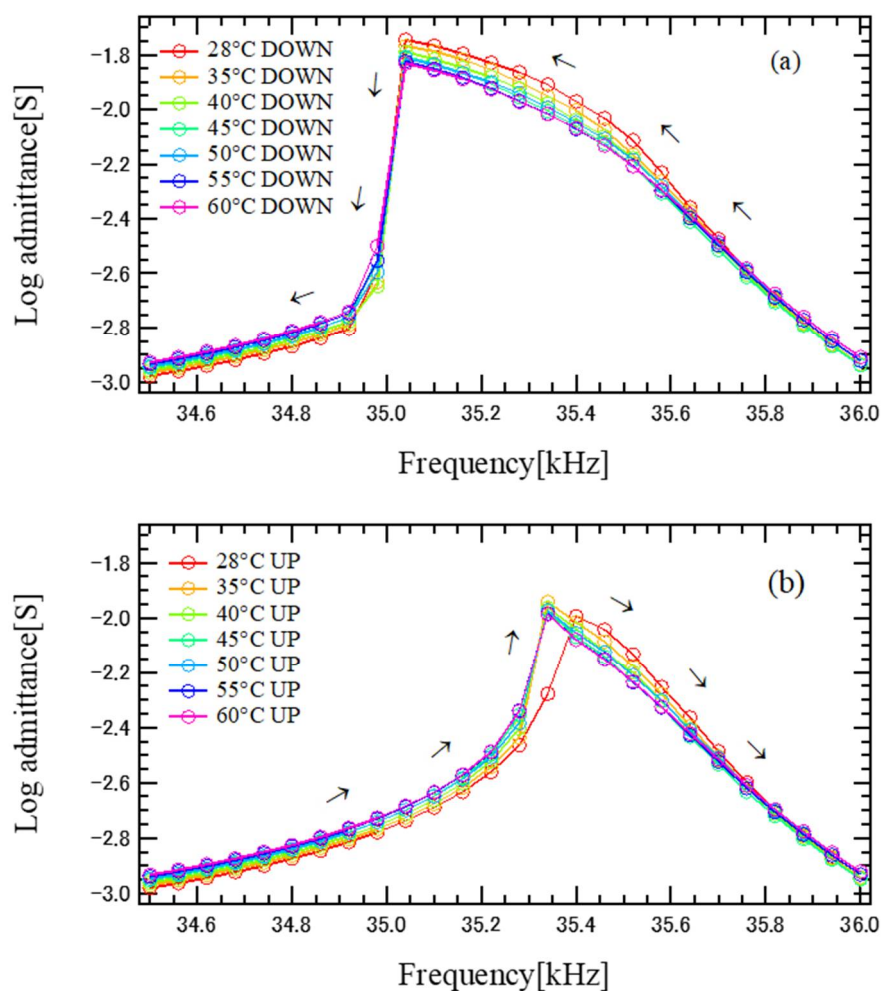


図 5.6 共振周波数近傍でのアドミッタンス($10V_{pp}$ 駆動)
(a)DOWN スイープ測定、(b)UP スイープ測定

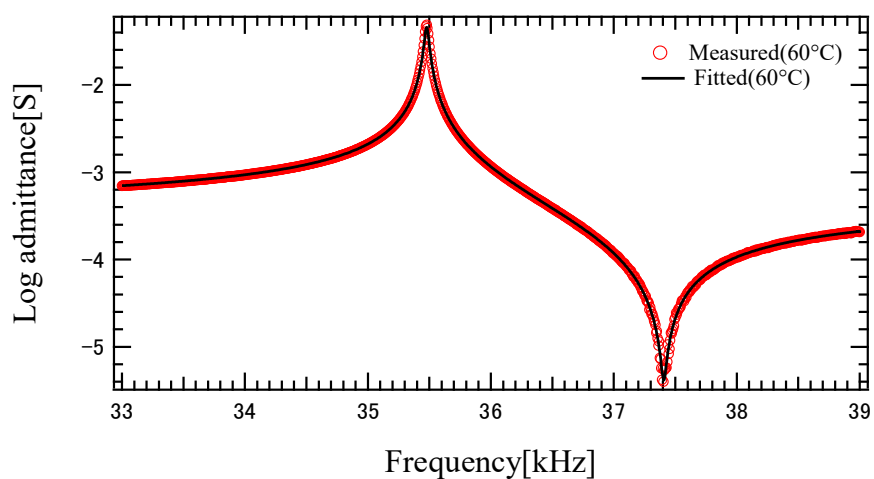


図 5.7 アドミッタンスカーブのフィッティング結果(500mV_{pp}駆動、60°C)

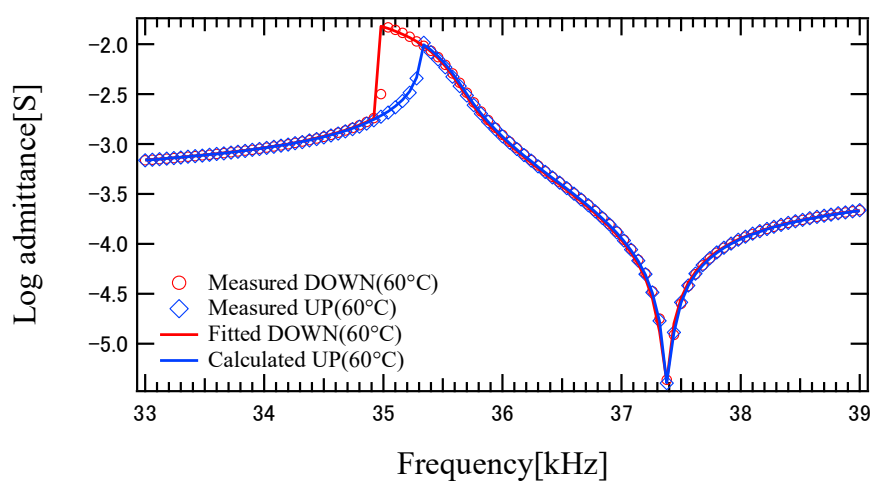


図 5.8 アドミッタンスカーブのフィッティング結果(10V_{pp}駆動、60°C)

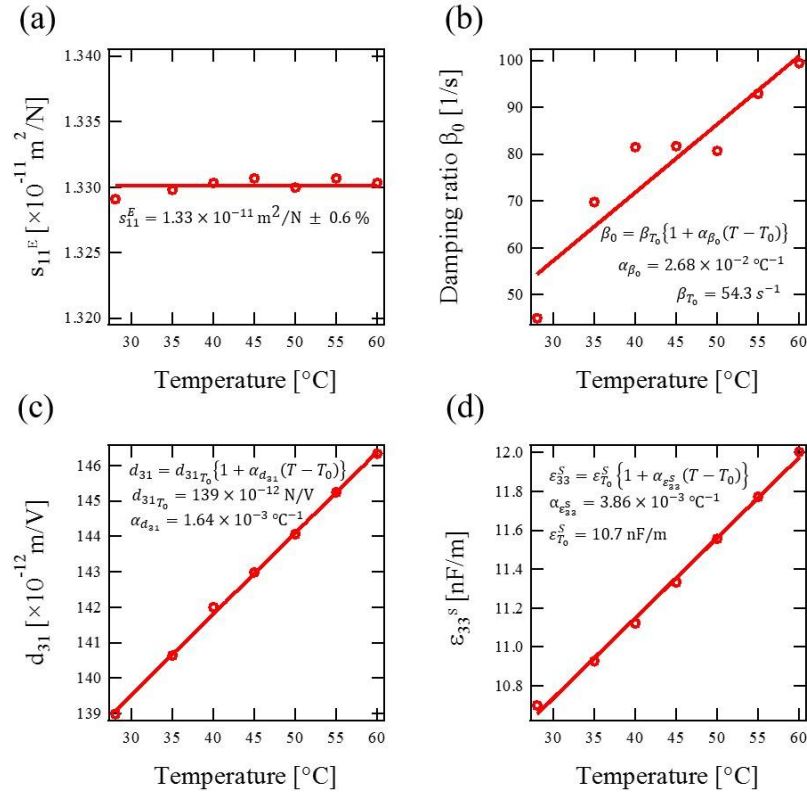


図 5.9 PZT 振動子の物性値の温度依存性

(a)コンプライアンス (b) 減衰係数 (c) 圧電定数 (d) 誘電率

次に、高次弾性定数の実部、虚部の温度依存性を図 5.10 に示す。実部虚部のいずれも、温度上昇によって絶対値が増加する結果となった。これにより、振動子の自己発熱によって、共振周波数の変化はより大きくなり、損失の増加についても前述した減衰係数の増加に加えて、さらに大きくなることが明らかとなった。

ハイパワー駆動の際には温度上昇が避けられないため、以上の測定から得られたそれぞれの物性値の温度依存性は、圧電材料のハイパワー駆動特性を評価するために重要な指標となる。

また、ハイパワー駆動の振動特性をモデル化する際にもこれらの測定は重要である。次節では、本節で各物性値の測定結果に対して線形回帰を行って得られた式を用いて、温度上昇を考慮したハイパワー駆動特性のモデル化を行う。

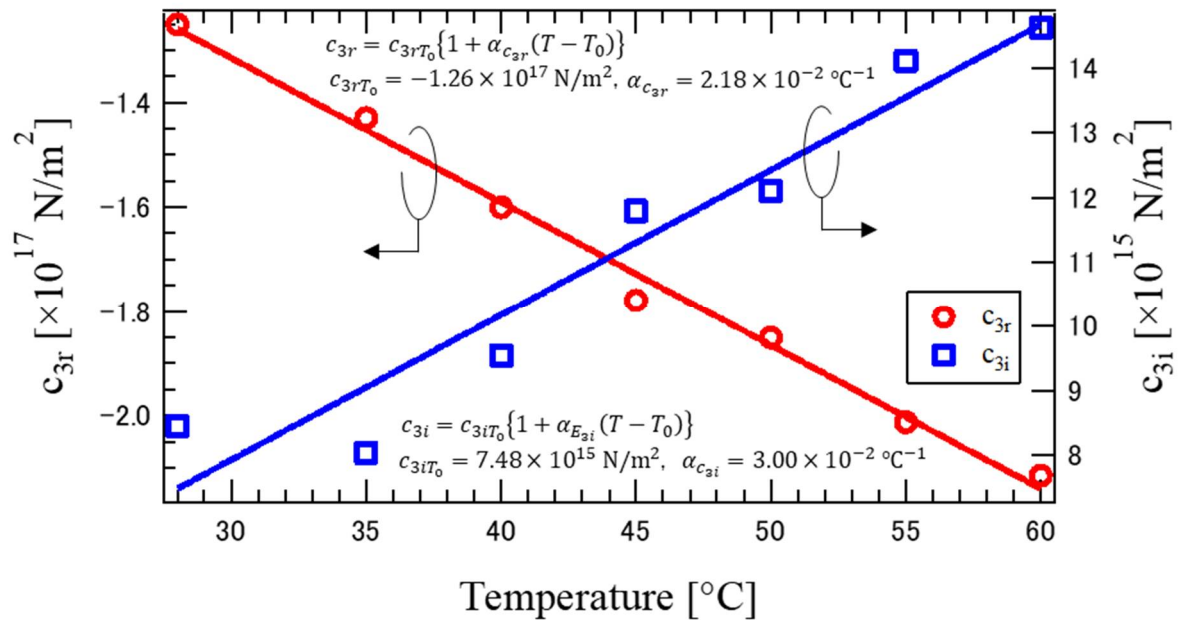


図 5.10 PZT 振動子の高次弾性定数実部、虚部の温度依存性

5.3 非線形振動と温度上昇の相互影響のモデル化

本章では、非線形振動と自己発熱による温度上昇の相互影響を考慮した、実際の駆動状況に近い計算モデルを提案する。まず、ハイパワー駆動により大振幅励振された振動体の振動損失により、温度上昇が起きる仕組みを定式化する。本節では熱伝導方程式を用いて圧電体の温度上昇について述べる。

3次元熱伝導方程式は

$$\rho\gamma\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} \quad (5-4)$$

と表される。ただし ρ を密度、 γ を比熱、 $T(x,y,z,t)$ を温度、 λ を熱伝導率、 $\dot{q}(x,y,z,t)$ を単位時間当たりの発熱とする^[2]。

本研究では圧電体の長手方向のみに温度が分布を持つと考える。長手方向に x 軸をとり、1次元熱伝導を考えると、式(5-4)は

$$\rho\gamma wh\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda wh\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \dot{q}(x,t) \quad (5-5)$$

となる。ただし、 w は振動子の幅、 h は厚みである。ここに圧電体と空気の境界面における対流熱伝達による項を加えることにより、

$$\rho\gamma\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda wh\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} - 2\alpha wh(T - T_\infty) \quad (5-6)$$

となる。ただし、 α を対流熱伝達率、 T_∞ を空気の温度とする。さらに、定常温度分布を求めることとすると、 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ より、

$$0 = \lambda wh\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q} - \alpha wh(T - T_\infty) \quad (5-7)$$

となる。ここに境界条件として、振動子先端からの放熱を考慮した式

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x_{x=\pm l/2}} = \alpha(T - T_\infty) \quad (5-8)$$

を与え、これを解くことで圧電体の温度分布を求めることができる。

発熱量 \dot{q} については圧電体の振動によるエネルギー損失が全て発熱に使われると考え、 \dot{q} の1次振動による成分を \dot{q}_1 、3次振動による成分を \dot{q}_3 とおくと、2.5節での非線形振動のエネルギーの関係式を導出する過程において、 x 軸方向に微小長さ dx を持つ微小部分のエネルギー損失の1次成分 $\dot{q}_1 dx$ は式(2-100)より、

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 dx &= jwhc_{1i} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= jwhc_{1i} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\
 &= \frac{whc_{1i}}{\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{whc_{1i}}{\omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 dx
 \end{aligned} \tag{5-9}$$

であるから、

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2} \frac{whc_{1i}}{\omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \tag{5-10}$$

と表される。

また、式(2-106)より、エネルギー損失の3次成分は振動子全体で

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} jwhc_{3i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} e^{j(\omega t + \theta)} dx \\
 &= -\frac{9}{4} whc_{3i} \omega (e^{j(\omega t + \theta)})^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} u_x dx \\
 &= -\frac{9}{4} whc_{3i} \omega (e^{j(\omega t + \theta)})^2 \left\{ \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 u_x \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\partial u_x}{\partial x} \left(2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} u_x - \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dx \right\} \\
 &= -2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} whc_{3i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} e^{j(\omega t + \theta)} dx \\
 &\quad - \frac{9}{4} whc_{3i} \omega (e^{j(\omega t + \theta)})^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^4 dx
 \end{aligned} \tag{5-11}$$

であるから、左辺と右辺第一項をまとめて、

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{9}{4} jwhc_{3i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} e^{j(\omega t + \theta)} dx \\
 & = -\frac{3whc_{3i}}{4\omega^3} (e^{j(\omega t + \theta)})^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^4 dx
 \end{aligned} \tag{5-12}$$

となるので、微小部分のエネルギー損失の3次成分 $\dot{q}_3 dx$ は

$$\dot{q}_3 dx = \frac{3whc_{3i}}{8\omega^3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^4 dx \tag{5-13}$$

であるから、

$$\dot{q}_3 = \frac{3whc_{3i}}{8\omega^3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^4 \tag{5-14}$$

と表され、発熱量は振動子の速度分布から求めることができる。ここで、発熱量 \dot{q}_1, \dot{q}_3 は時間的に平均をとっているため時間の関数ではない。しかし、ここでの1次弾性定数虚部 c_{1i} 、3次弾性定数虚部 c_{3i} は温度による物性値変化のため、温度 T の関数となっている。そのため、発熱量 \dot{q}_1, \dot{q}_3 は位置 x 、温度 T の関数となっている。式(5-14)から、発熱に関しても高次弾性定数虚部が関係しているため、高次弾性定数絶対値の小さい材料を用いることで、非線形振動と同時に発熱も抑えることができる。

全発熱量を

$$\dot{q}(x, T) = \dot{q}_1(x, T) + \dot{q}_3(x, T) \tag{5-15}$$

として式(5-6)に代入して解くことにより、ある振動分布を持つ圧電体の温度分布を求めることができる。

以上のような温度分布の計算を非線形伝達マトリックスの計算と組み合わせることで、温度上昇の影響下での圧電体の非線形振動をモデル化することができる。

ただし、2.5節で述べたように非線形スティフネス c' の計算と伝達マトリックスの計算がループ構造になっていることに加え、前節で述べた発熱量 \dot{q} と伝達マトリックスを構成する圧電定数 d_{31} 、コンプライアンス s_{11}^E 、誘電率 ϵ_{33}^S 、減衰係数 β_0 、高次弾性定数 $c_{11(3)}^E = c_{3r} + jc_{3i}$ が温度の関数になっているため、

伝達マトリックスの計算により得られる速度分布により発熱量 \dot{q} が決定され、 \dot{q} を用いて熱伝導方程式を解くことで温度分布 $T(x)$ が決定され、物性値の温度依存性を参照して伝達マトリックスを計算することにより速度分布が算出されるというループ構造が生じている。そのため、図 5.11 のようなアル

ゴリズムを用いてシミュレーションを行った。詳細は後述するが、2.5 節で採用したスティフネス E' と伝達マトリックスのループ計算のアルゴリズムと同様に、伝達マトリックスの計算と熱伝導方程式による計算をループ構造としている。

物性値の温度依存性については、図 5.9、図 5.10 の図中に示しているように、測定結果を線形回帰することにより得られた式を用い、コンプライアンス s_{11}^E については温度に対してほぼ一定の値であったため、平均値 1.33×10^{-11} [m²/N]を計算に用いた。

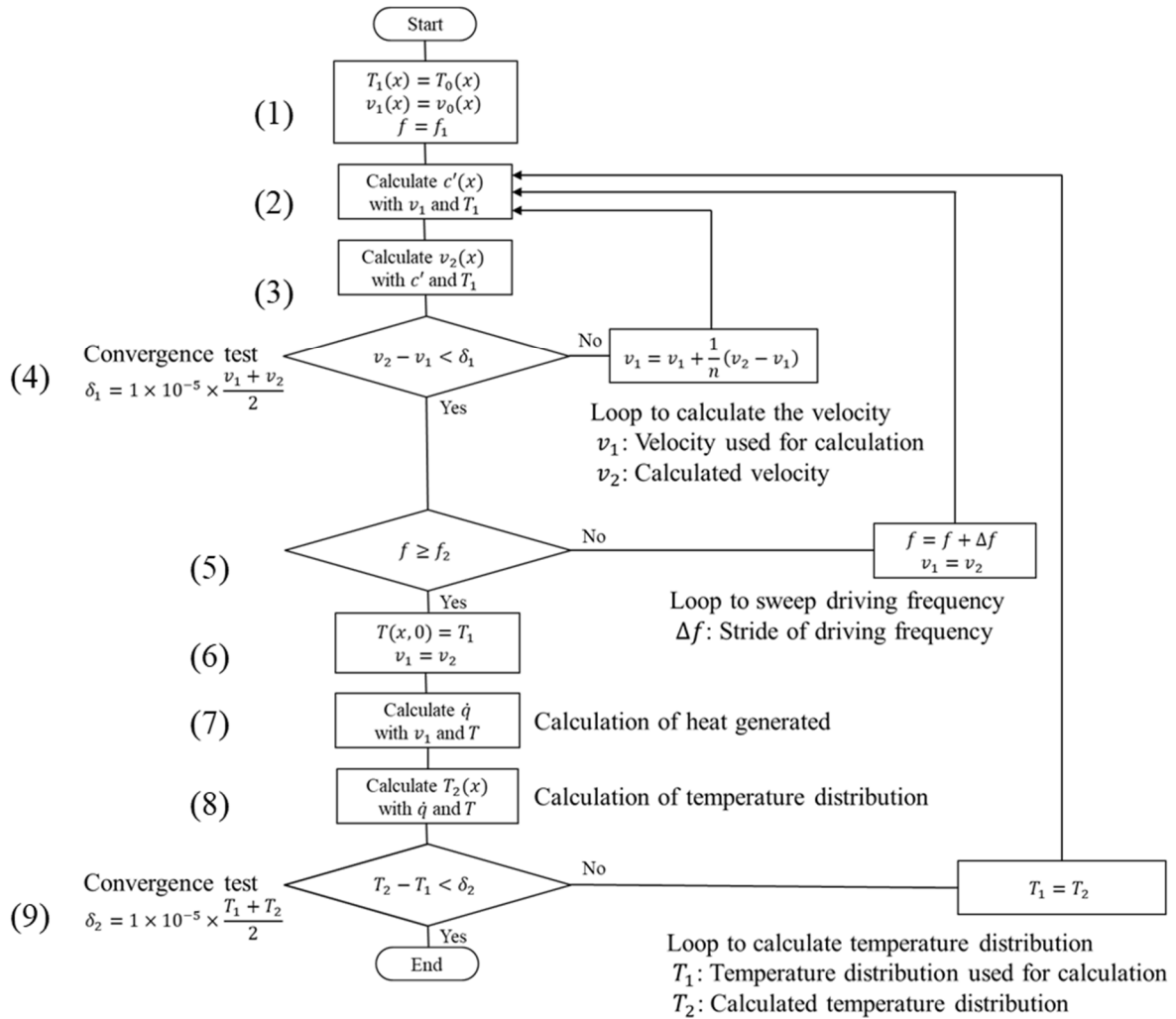


図 5.11 温度上昇の影響下での非線形振動の計算のフローチャート

本アルゴリズムは、圧電横効果振動子を周波数 f_1 を始点とし、周波数 f_2 までスイープした後、周波数を f_2 に固定し連続駆動した際の定常状態での温度分布および振動状態を計算するものである。図中の v_0 は初期値として代入する速度分布、 v_1 は非線形スティフネス c' の計算に用いる速度分布、 v_2 は伝達マ

トリックスの計算により得られる速度分布を表す。また、 T_0 は初期値として代入する温度分布、 T_1 はスティフネス c' および伝達マトリックスの計算の際に用いる温度分布、 T は熱伝導方程式の計算に用いる温度分布、 T_2 は熱伝導方程式の計算により得られた温度分布である。図中の番号に沿って説明を行う。

- (1) 圧電体の各物性値は温度依存性を持つため、計算を開始する際に初期温度分布として $T_0(x)$ を入力する。また、2.5 節と同様のループ計算を行うため、初期速度分布 $v_0(x)$ を入力する。ここでは $T_0(x)$ の全ての成分を 28°C とし、 $v_0(x)$ の全ての成分を 0 として計算を始めた。
- (2) 2.5 節と同様に、式(2-152)より、速度分布 $v_1(x)$ と温度分布 $T_1(x)$ を用いてスティフネス c' を計算する。2.5 節では温度一定としていたが、ここでは温度分布 T_1 によって各位置 x において物性値が変化する。
- (3) 2.5 節と同様に、スティフネス c' と温度分布 $T_1(x)$ を元に非線形成分を含めた伝達マトリックスを用いて力 $F(x)$ 、速度 $v(x)$ 、電流 $I(x)$ の計算を行う。
- (4) 2.5 節と同様に、速度分布 v_2 と $v_1(x)$ を比較し、その差が δ_1 以上であれば速度分布 v_1 を更新してスティフネス c' の計算(2)に戻る。また、速度の急激な変化を避けるため速度変化に対して $1/n$ の割合で速度の更新を行った。ここでも 2.5 節と同様に $n = 10$ 、 $\delta_1 = 1.0 \times 10^{-5}$ とした。
- (5) 周波数 f が f_2 未満であれば周波数を刻み幅 Δf で増加または減少させて、スティフネス c' の計算(2)に戻る。その際収束した速度分布 $v_2(x)$ を次の周波数でのループ計算の 1 回目の計算に用いる。一度 $f \geq f_2$ となればそれ以降周波数は更新されることなく、 f_2 に固定される。
- (6) 伝達マトリックスの計算に用いた温度分布 T_1 を、熱伝導方程式(5-7)を解く際の温度分布を決定する初期温度分布 T に代入する。伝達マトリックスによる計算により得られた速度分布 v_2 を発熱量 \dot{q} および次のスティフネス c' の計算に用いる速度分布 v_1 に代入する。
- (7) 速度分布 v_1 と温度分布 T を元に発熱量 \dot{q} を式(5-10),(5-14),(5-15)

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2} \frac{whE_i}{\omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \quad (5-10 \text{ 再掲})$$

$$q_3 = \frac{3whE_{3i}}{8\omega^3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^4 \quad (5-14 \text{ 再掲})$$

$$\dot{q}(x, T) = \dot{q}_1(x, T) + \dot{q}_3(x, T) \quad (5-15 \text{ 再掲})$$

を用いて計算する。

(8) 熱伝導方程式(5-7)を解く。発熱量 \dot{q} とともに、境界条件として式(5-8)を用いる。室温は28[°C]とし、PZT セラミックスの熱伝導率を 1.25W/m°C^[3]、比熱を 600J/kg·m^[3]、PZT 表面と空気間の対流熱伝達率を 70W/m²°C^[4]とした。

(9) 熱伝導方程式の計算により得られた温度分布 T_2 と、伝達マトリックスの計算に用いた温度分布 T_1 が一致すれば伝達マトリックスと熱伝導方程式を同時に満たす温度分布や振動速度が求められたことになる。 T_2 と T_1 を比較し、その差が δ_2 以上であれば T_1 を T_2 に更新し、非線形スティフネス c' の計算(2)に戻る。ここでは $\delta_2 = \frac{T_2 + T_1}{2} \times 1.0 \times 10^{-6}$ とした。

。

5.4 単板振動子のアドミッタンス計算

前節で述べたような計算手法を用いて、5.2 節で温度依存性を求めた際と同様の PZT 圧電板状振動子を想定して、温度を室温に固定し温度上昇しないようにした条件と、連続駆動での温度上昇を考慮した定常状態でのアドミッタンス曲線の計算を行った。実行プログラムを付録(2)に示す。駆動電圧は $30V_{pp}$ とし、計算上の長手方向分割数は 101 とした。また、駆動周波数については、非線形効果により周波数掃引する方向により振動状態が変わるため、目的の周波数まで UP スweep と DOWN スweep を行い、その後それぞれ周波数を固定して連続駆動したとして計算した。それぞれのアドミッタンスカーブを図 5.12 に示す。温度上昇を考慮した計算の場合では、振動子の自己発熱によってアドミッタンスの最大値が 37 % 減少し、その駆動周波数は 480 Hz 上昇した。図 5.10 に示したように、高次弾性定数の実部の絶対値は温度上昇によって上昇するため、この変化の傾向だけを考慮した場合、発熱を考慮した計算では共振周波数がさらに減少するように予想される。しかし、減衰係数と高次弾性定数虚部の温度依存性が大きく、アドミッタンスのピーク値の減少が著しいため、結果的に共振周波数が増加する結果となった。

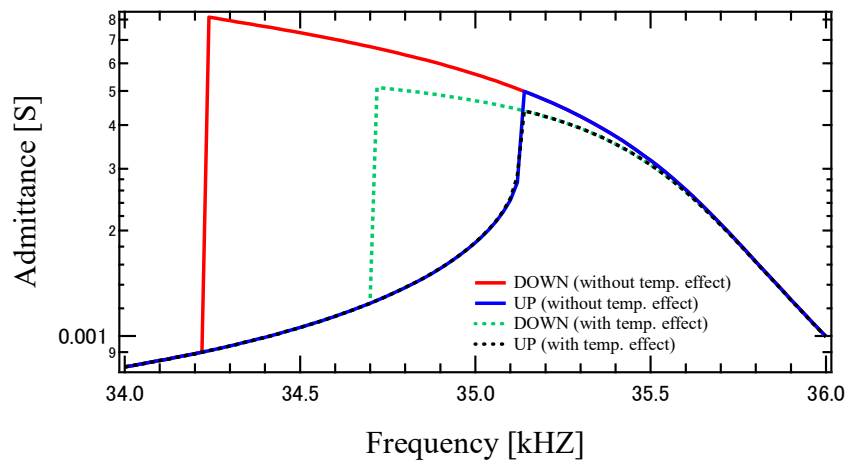


図 5.12 駆動電圧 $30V_{pp}$ でのアドミッタンスカーブ

また、アドミッタンス最大時の計算上の温度分布と、実際に圧電体に $30V_{pp}$ の電圧を印加して連続駆動した際の温度分布を図 5.13 に示す。圧電体への電圧印加時には、周波数を下方に掃引しながら温度一定となるまで待機し、ジャンプする直前の温度分布を測定した。温度分布は表面温度を赤外線サーモグラフィ (InfReC F30W, 日本アビオニクス株式会社) で計測し、解析を行った。中心温度は計算値で 67.0°C 、実測値で 73.1°C となり、測定した温度分布は計算値に比べて温度が高くなっている。これは圧電体表面と空気の間での対流熱伝達率の値が大きすぎたためであると考えられる。今回の計算で

は文献値を用いたが、特に高速で振動している先端部からの放熱は振動速度に応じて変化するため、より高精度な温度分布の計算のためには、熱伝達率の測定が必要になると考えられる。アドミタンスが最大となる周波数は計算値、実測値でそれぞれ 34.72 kHz、34.27 kHz となった。

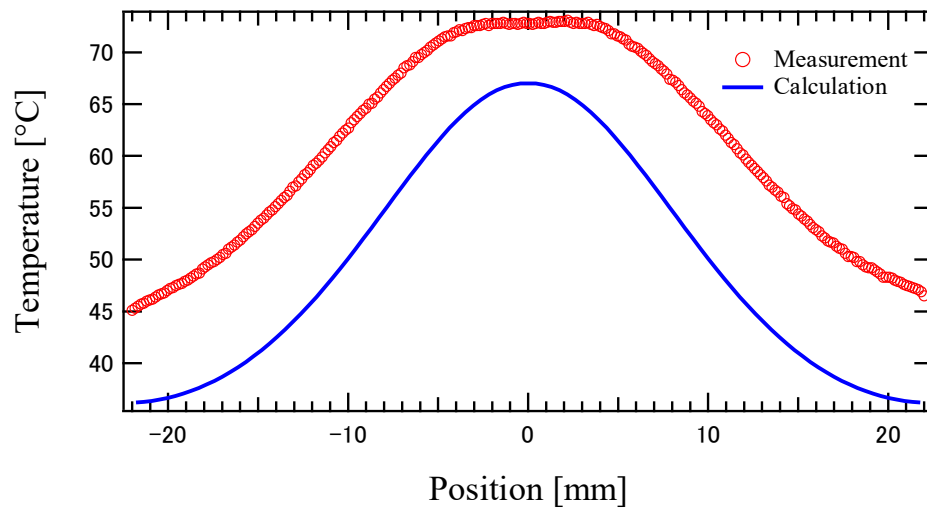


図 5.13 駆動電圧 30Vpp で連続駆動した際の圧電体の温度分布

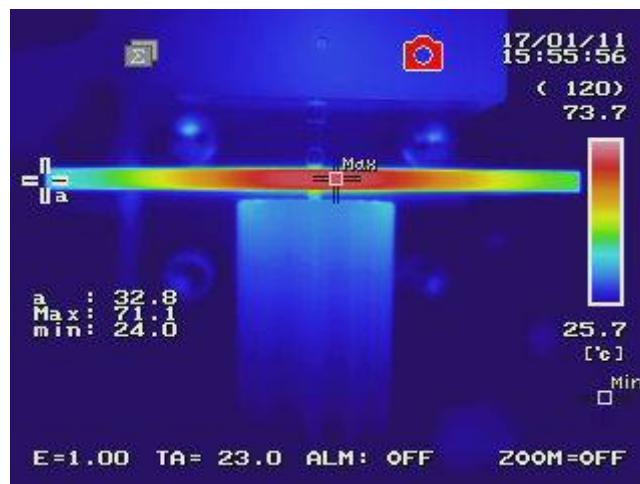


図 5.14 駆動電圧 30Vpp で連続駆動した際の圧電体の熱画像

5.5 単板振動子のハイパワー駆動実験

前節と同様の PZT 振動子を用いて、温度上昇を抑えた Burst 駆動と、温度が定常状態となるまで連続駆動した場合での振動速度の測定・比較を行った。測定は図 5.15 に示す測定系で行い、振動速度の駆動周波数成分をロックインアンプで検波し解析した。測定結果を図 5.16 に示す。Burst 駆動条件下の振動速度と、連続駆動によって定常状態となった場合の振動速度・中心温度を示している。Burst 駆動条件では非線形振動による振動速度飽和が見取れる。一方、連続駆動条件では、印加電圧の上昇に従って中心温度が上昇し、その影響でより低電圧で振動速度の飽和が生じている。連続駆動によって、30 Vpp 駆動時の振動速度は Burst 駆動に比べ 33.9 %減少した。測定結果と計算結果を比較すると、飽和振動速度の曲線はよく一致しており、非線形伝達マトリックスによる計算の妥当性をよく表している。また、連続駆動の場合には駆動電圧が 5 Vpp 付近で既に振動速度がほぼ飽和しており、以降は入力エネルギーの増加が殆ど発熱の増加に消費されていることが分かる。

前章まで、高次弾性定数を評価指標として鉛系・非鉛系圧電材料の比較を行ってきたが、温度上昇を排除した非線形振動特性の評価に留まっていた。これは温度上昇が抑えられる Burst 駆動時の特性を評価することを意味する。しかし、強力超音波デバイスの駆動条件としては連続駆動を用いることが多く、本章で提案したモデルを用いることで、より実際の駆動状況に近い評価を行うことができる。特に、非鉛圧電材料の中には発熱が抑えられると報告されているものも存在する。本研究で測定された PZT 振動子は連続駆動時の最大振動速度 $1.1 \text{ m}_{\text{pp}}/\text{s} = 0.39 \text{ m}_{\text{rms}}/\text{s}$ 時に 73°C まで温度上昇しているが、図 5.17 に示すような $(\text{Bi,Na,Ba})\text{TiO}_3$, $(\text{Sr,Ca})_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ セラミックス振動子では、 $0.39 \text{ m}_{\text{rms}}/\text{s}$ 時に約 40°C となっており、PZT 振動子に比べ発熱が抑えられている。また、図 5.18 に示すように、同様の振動子では共振周波数変化についても 1%以下に抑えられており、このような材料を用いることで、共振駆動デバイスとしての制御性も向上する可能性がある。

以上のような検討は圧電定数や機械的品質係数、電気機械結合係数や LCR 等価回路では行うことができず、本章での提案手法を用いることで、発熱の影響を考慮した強力超音波デバイス向け圧電材料の実用に即した評価を行うことができる。

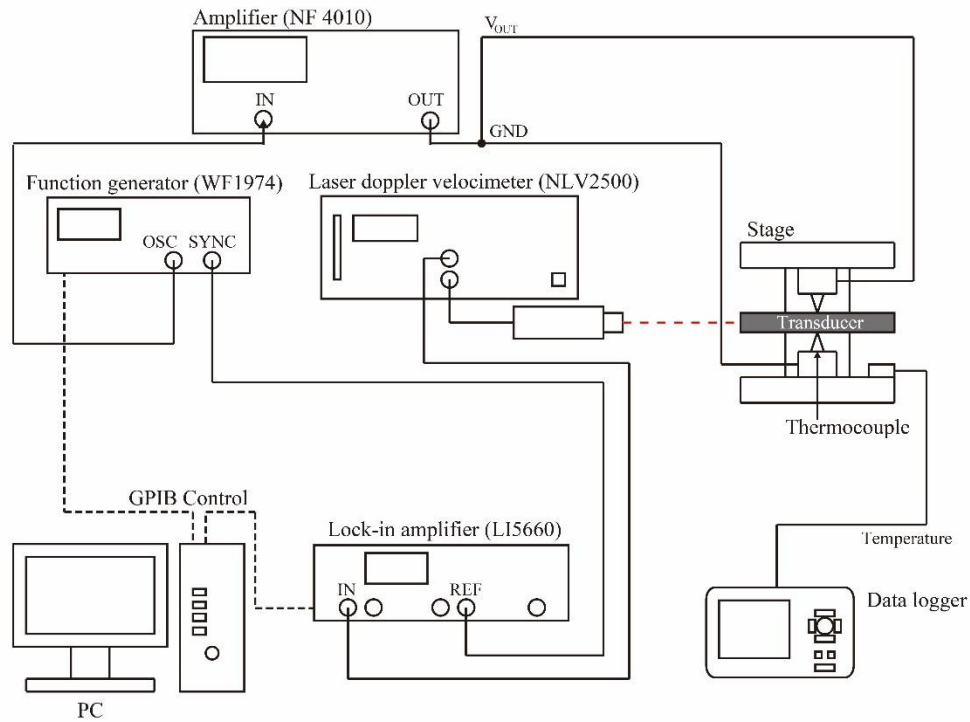


図 5.15 連続駆動による飽和振動速度の測定系

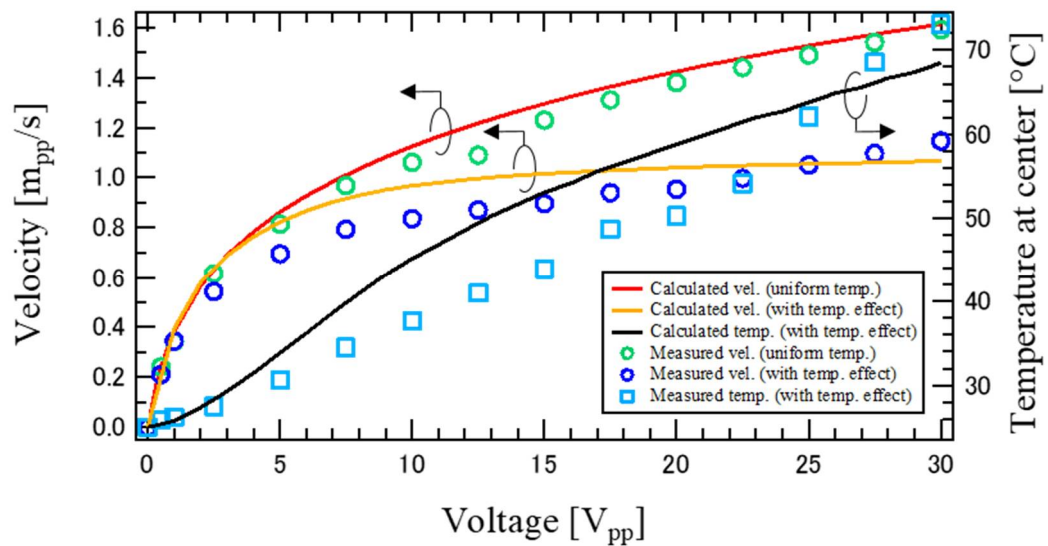


図 5.16 印加電圧に対する振動速度と中心温度の測定結果と計算結果

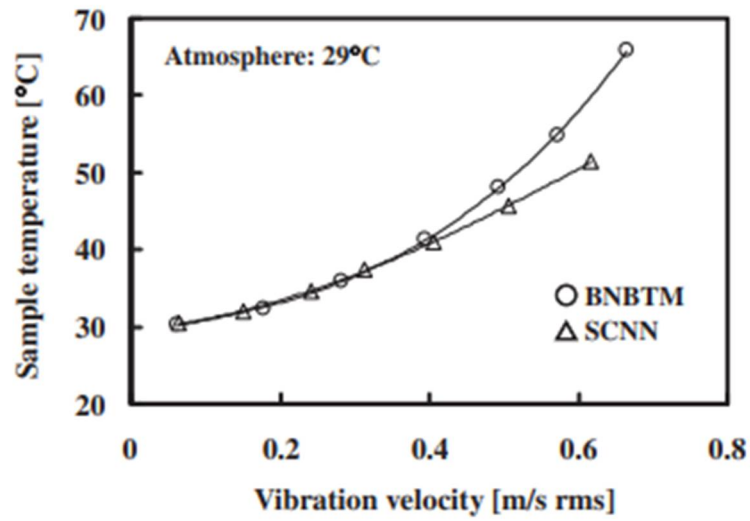


図 5.17 (Bi,Na,Ba)TiO₃, (Sr,Ca)₂NaNb₅O₁₅ セラミックス振動子の駆動中の温度^[5]

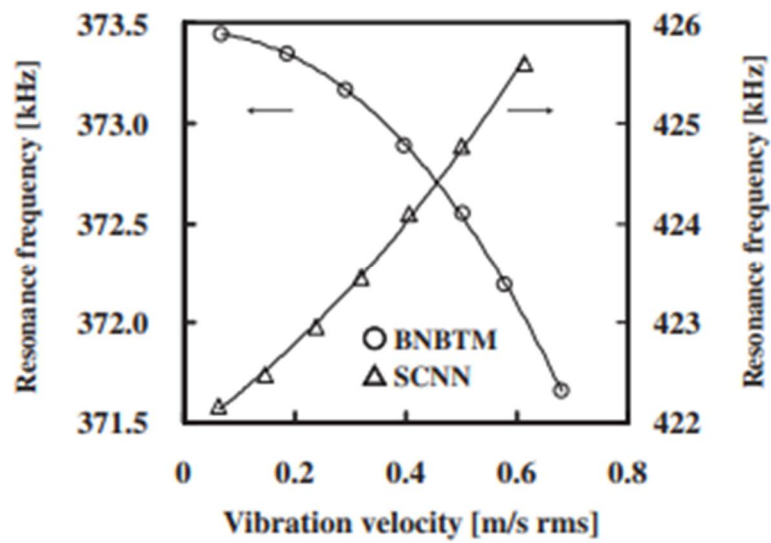


図 5.18 (Bi,Na,Ba)TiO₃, (Sr,Ca)₂NaNb₅O₁₅ セラミックス振動子の共振周波数変化^[5]

5.6 結論

本章では、圧電体のハイパワー駆動時の2つの問題点として、非線形効果と温度上昇を双方とも考慮したモデルを構築すること、また、圧電材料のハイパワー駆動特性を評価するための指標として重要な、物性値の温度依存性を測定することを目的とした。

まず、圧電体を一様に温度上昇させて測定を行い、非線形係数を含む圧電体の物性値の温度依存性を算出した。その結果、PZTの場合、今回の測定温度範囲内では、スティフネス c_{11}^E は温度に対してほぼ一定であること、減衰係数、高次弾性定数実部、虚部が温度変化により受ける影響が大きいことが明らかとなった。

さらに、非線形伝達マトリックスと前述した物性値の温度依存性の測定結果、熱伝導方程式を用いた計算手法を用いることで、ハイパワー駆動による温度上昇の影響と非線形効果を同時に考えるモデルを構築した。これにより、ハイパワー駆動時の温度分布や飽和振動速度曲線を計算することができる。駆動電圧 $30V_{pp}$ までの計算を行った結果、飽和振動速度曲線の計算結果は測定結果によく一致し、提案手法の妥当性が示された。また、今回測定に用いたPZT振動子の場合、連続駆動では駆動電圧 $5V_{pp}$ でほぼ振動速度が飽和しており、圧電定数や機械的品質係数が高い材料であっても、ハイパワー駆動には適していない場合があることが明らかになった。そのため、本章で提案したような計算手法を用いて実際の駆動特性を推定することは、圧電デバイスの材料選定や設計を行う上で有益であると考えられる。

参考文献

- [1] S. Tashiro, M. Ikehiro and H. Igarashi: “Influence of Temperature Rise and Vibration Level on Electromechanical Properties of High-Power Piezoelectric Ceramics”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 36, pp. 3004-3009, 1997
- [2] 相原利雄 : ”エスプレッソ 伝熱工学”, 裳華房, 2009
- [3] 株式会社富士セラミックス”圧電セラミック テクニカル・ハンドブック”, < <http://www.fujicera.co.jp/product/> > 2020 年 9 月 15 日アクセス
- [4] Hyun-Woo Joo, Chang-Hwan Lee, Jong-Seok Rho, and Hyun-Kyo Jung: “Analysis of Temperature Rise for Piezoelectric Transformer Using Finite-Element Method”, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol.53, No.8, pp. 1449-1457, 2006
- [5] Y. Doshida, H. Shimizu, Y. Mizuno, K. Itoh, S. Hirose and H. Tamura: "Nonlinear Behavior and High-Power Properties of (Bi,Na,Ba)TiO₃ and (Sr,Ca)₂NaNb₅O₁₅ Piezoelectric Ceramics", *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 50, 09ND06, 2011

第6章 結論

6.1 本論文のまとめ	157
-------------------	-----

6.1 本論文のまとめ

本論文では、圧電方程式に高次弾性定数を導入することにより、圧電ハイパワー特性の定量的な評価手法と、発熱と非線形振動の相互影響を考慮した計算手法を確立した。

第1章では、非鉛圧電材料の強力超音波デバイスへの適用可能性と、従来の圧電材料のハイパワー特性評価手法の問題点について述べた。

第2章では、先行研究での圧電非線形振動の測定・解析手法として、電氣的過渡応答測定法と非線形 *LCR* 等価回路について述べ、従来手法の問題点である、境界条件が限定される、発熱の計算が困難であるという点を克服するため、高次弾性定数を導入し、非線形現象の計算に有効であることを示した。さらに、要素分割での非線形振動計算手法である、非線形伝達マトリックスを提案した。

第3章では、圧電非線形振動の定量的評価手法として、高次弾性定数を評価指標とすることを考案し、その測定手法として、アドミッタンス測定と非線形 *LCR* 等価回路を用いたフィッティングによる手法を提案した。さらに、異なる組成・添加物の非鉛圧電材料を高次弾性定数という評価指標から比較を行った。その結果、ニオブ酸リチウム単結晶(LN)の高次弾性定数実部、虚部はそれぞれ 6.58×10^{13} [N/m²]、 4.10×10^{13} [N/m²]、チタン酸ジルコン酸鉛(PZT)の高次弾性定数実部、虚部はそれぞれ -9.57×10^{15} [N/m²]、 1.20×10^{15} [N/m²]となり、単結晶とセラミックスの間で高次弾性定数の絶対値が大きく異なることが示された。これにより、圧電セラミックスに存在するドメイン構造や結晶粒界は高次弾性を助長することが明らかになった。また、BZT-BCT、KNN において、置換型添加物の添加、組成比を独立に調整することにより、高次弾性定数絶対値が変化することを明らかにした。以上のことから、ハイパワー特性の向上のために必要な材料開発指針として、ドメイン壁や結晶粒界などの構造欠陥を減らすことや、ドメイン壁のピン止め等が有効となることが示された。

第4章では、圧電縦効果振動の高次弾性定数の測定手法として、圧電縦効果の非線形伝達マトリックスを導出し、これを用いたアドミッタンスのフィッティング手法を提案した。さらに、大振幅振動の場合に現れる3次弾性定数の電界依存性に対して、5次以上の弾性定数の導入についても検討した。

第5章では、ハイパワー駆動時に避けられない問題でありながら、従来の評価手法では考慮されてこなかった圧電振動子の自己発熱について、高次弾性定数を含めた物性値の温度依存性を測定することで、発熱によって損失が急激に増大する可能性を示した。さらに、非線形伝達マトリックスと熱伝導方程式を組み合わせることで、発熱と非線形振動が相互に影響するハイパワー駆動時の圧電振動特性を高い精度で計算することに成功した。

以上のように、本論文では、高次弾性定数を圧電方程式に導入することにより、圧電材料のハイパワー特性の定量的評価手法の確立、実用上避けられない発熱を含めた評価、ハイパワー特性向上に適した材料開発手法の発見等、多岐にわたる応用が可能であることを示した。

これまで、圧電材料のハイパワー特性については定量的評価法が無かったため、飽和振動速度や共振周波数の変化率、温度の実測によって評価が行われてきた。しかし、これらは振動子寸法に左右され、材料間の比較が困難であった。また、機械的品質係数や圧電定数等が評価される場合にも、ハイパワー駆動時の振動特性に対して、低振幅と同様のモデルを用いて評価がなされており、誤った評価が行われていた。ハイパワー駆動を用いて大きな機械エネルギーを応用した圧電デバイスは非常に多いにも関わらず、材料ごとにその特性が推定できないことは大きな問題である。非鉛圧電材料では **PZT** を超える圧電性・温度安定性を実現する材料の探索が行われてきたが、未だ発見されていない。しかし、今回の測定結果からは高次弾性定数は圧電定数の上昇と共に上昇するという結果が示されている。圧電材料のハイパワー特性向上のためには、圧電定数を大きくするだけでなく、高次弾性定数を小さくする必要がある。これは、圧電定数で劣るとされていた非鉛圧電材料がハイパワー応用分野では **PZT** に勝る可能性があることを示している。本論文の提案手法を元に評価と材料開発を行っていくことで、特に非鉛圧電材料については、高い圧電定数と低い高次弾性定数、及び熱安定性を持った、**PZT** に代替する材料を開発できる可能性が十分にある。

また、本研究で非線形伝達マトリックスの計算手法と、高次弾性定数を測定する方法を確立したことで、圧電材料の高次弾性を含めたデバイス設計手法の実現にも貢献することができた。提案手法を応用し、長手1次モードでない振動モードについて測定を行うことで、高次弾性テンソルのその他の成分についても測定が可能になると考える。高次弾性定数テンソルを測定することができれば、非線形振動を含めた圧電デバイスの有限要素法解析を行うことができるようになり、より実際の特性に近い評価が行えるようになる。

以上のように、本研究での提案手法を用いることで、ハイパワー特性に優れた非鉛圧電材料の開発と、非線形振動に着目したデバイス設計が可能となり、環境負荷が低く、高出力な強力超音波デバイスの実現に貢献することができた。

付録

以下に本研究で使用したプログラムを示す。
計算は全て MATLAB(MathWorks)を用いて行った。

(1)31 効果：温度一定条件の計算

※構成

- ①Admittance.m：アドミッタンスの周波数特性の計算を行う。
 - ②MasonHIGH2.m：伝達マトリックスの計算を行う関数。①の内部で用いられる。
 - ③A.m：力係数の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
 - ④Er.m：1次弾性定数実部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
 - ⑤Ei.m：1次弾性定数虚部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
 - ⑥E2r.m：3次弾性定数実部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
 - ⑦E3i.m：3次弾性定数虚部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
 - ⑧epsilon.m：誘電率の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
- (2.5 節で使用)

①アドミッタンス特性の計算

```
%%%%%%%%Admittance.m%%%%%%%%%
%非線形伝達マトリックスでアドミッタンスカーブのシミュレーションを
%行う
%初期化
clear all;
%入力
div=101;           %分割数
V0=0.25;           %電圧[V](pp 値の半分)
omega1=34000;      %周波数スイープ始点
omega2=40000;      %周波数スイープ終点
divfreq=100;       %周波数スイープ分割数
tmp=25;            %温度の初期値
```

```

%圧電振動子パラメータ
w=0.007;
h=0.002;
L=0.044;
density=7.7*10^3; %密度
LL=L/div;

%初期温度分布を設定(均一温度)
for p=1:1:div
    TMP(1,p)=tmp;
end

%E3 の計算に使う v をはじめ全て 0 としておく
for p=1:1:div+1
    vv(1,p)=0;
end

%周波数スイープ
for q=1:1:divfreq+1
    omega=2*pi*(omega1+(q-1)*(omega2-omega1)/divfreq);

    %Mason 解く
    M=MasonHIGH2(V0, omega, TMP, div, vv);

    %収束した v 分布を次の周波数ループに用いる
    vv=M(3,1:div+1);

    X=M(1,1:div+1);
    XX=X(1,1:div);
    F=M(2,1:div+1);
    v=M(3,1:div+1);
    u=v/j/omega;
    i0=M(4,div+1);
    vr(1,:)=X;
    vi(1,:)=X;

```

```

vr(2,:)=real(v);
vi(2,:)=imag(v);
v0=abs(M(3,1));

I(1,q)=omega/2/pi;
I(2,q)=log10(abs(i0)/V0);
I(3,q)=atan(imag(i0)/real(i0))/pi*180;
I(4,q)=M(5,1);
I(5,q)=v0;
Ph(q)=atan(imag(i0)/real(i0))./pi.*180;

preal(q)=real(i0);
pimag(q)=imag(i0);

end

csvwrite('admittancehigh2.csv',I,');
subplot(1,2,1);
plot(I(1,:),I(2,:));
subplot(1,2,2);
plot(I(1,:),Ph);

```

②伝達マトリックス

```

%input:電圧，周波数，温度分布，分割数，前の速度分布
function out = MasonHIGH2(V0, omega, TMP, div, vv)

    %パラメータ
    density=7.7*10^3;           %密度
    S=0.007*0.002;             %断面積
    L=0.044/div;               %長さ
    w=0.007;
    h=0.002;
    %更新係数
    nn=10;

    %v が収束するまでループする

```

```

count=0;          %ループカウント
while 1
    %全体の伝達マトリックス(Cd の情報入り)
    TransMatrix=eye(4);          %単位行列用意
    for p=1:1:div
        %x=L の方から順に掛け合わせ
        %非線形係数計算(温度依存)
        %温度依存パラメータ計算
        c=((Er(TMP(1,div+1-p))+j*Ei(TMP(1,div+1-
p))+3/4*E3r(TMP(1,div+1-p))*((abs(vv(1,div+1-p+1)/j/omega)-abs(vv(1,div+1-
p)/j/omega))/L)^2+j*3/4*E3i(TMP(1,div+1-p))*(((abs(vv(1,div+1-
p+1)/j/omega)-abs(vv(1,div+1-p)/j/omega))/L)^2))/density)^(1/2);    %音速(Er
温度依存)

        k=omega/c;          %波数
        AA=A(TMP(1,div+1-p))/2;          %力係数(温度
依存)

        Z0=density*c;          %音響インピー
ダンス

        IPS=ipsilon(TMP(1,div+1-p));          %誘電率(温度依
存)

        TransMatrix=TransMatrix*[cos(k*L)    -S*Z0*sin(k*L)/i    (1-
cos(k*L))*AA 0; -sin(k*L)/i/S/Z0 cos(k*L) sin(k*L)*AA/i/S/Z0 0; 0 0 1 0;
AA*sin(k*L)/j/S/Z0          AA*(1-cos(k*L))          j*omega*IPS*w*L/h-
sin(k*L)/j/S/Z0*AA^2 1];
    end

    %境界条件求める(x=0 の方)
    v1=-TransMatrix(1,3)*V0/TransMatrix(1,2);

    %入力行列(F,v,V0,I)
    IN=[0;v1;V0;0];

    %各要素の x,F,v,I を記録する行列
    M(1,1)=0;          %M は 1 行目:x, 2 行目:F, 3 行目:v, 4 行
目:I

```

```

M(2:3,1)=IN(1:2,1);
M(4,1)=IN(4,1);
%各要素で計算(x=0 の方から)
for p=1:1:div
    %非線形係数計算(温度依存)
    %温度依存パラメータ計算

    c=((Er(TMP(1,p))+j*Ei(TMP(1,p))+3/4*E3r(TMP(1,p))*((abs(vv(1,p+1)
/j/omega)-
abs(vv(1,p)/j/omega))/L)^2+j*3/4*E3i(TMP(1,p))*(((abs(vv(1,p+1)/j/omega)-
abs(vv(1,p)/j/omega))/L)^2))/density)^(1/2);    %音速(Er 温度依存)
    k=omega/c;                                %波数
    AA=A(TMP(1,p))/2;                        %力係数(温度依存)
    Z0=density*c;                            %音響インピーダンス
    IPS=ipsilon(TMP(1,p));                  %誘電率(温度依存)

    %伝達マトリックス逐次計算
    TransMatrix(1,:)=[cos(k*L) -S*Z0*sin(k*L)/i (1-cos(k*L))*AA 0];
    TransMatrix(2,:)=[-sin(k*L)/i/S/Z0 cos(k*L) sin(k*L)*AA/i/S/Z0
0];
    TransMatrix(3,:)=[0 0 1 0];
    TransMatrix(4,:)=[AA*sin(k*L)/j/S/Z0 AA*(1-cos(k*L))
j*omega*IPS*w*L/h-sin(k*L)/j/S/Z0*AA^2 1];
    IN=TransMatrix*IN;

    %代入
    M(1,p+1)=M(1,p)+L;
    M(2:3,p+1)=IN(1:2,1);
    M(4,p+1)=IN(4,1);
    %%デバッグ用
    ccr(1,p)=real(c);    %各要素の音速実数成分
    cci(1,p)=imag(c);    %各要素の音速虚数成分
end

%%%デバッグ%%%

```

```
%v 分布をプリント
printvv(1,count+2)=count;
printvv(1,1)=0;
printvv(2:div+2,1)=M(1,:).';
    for p=1:1:div+1
        if imag(M(3,p))<0
            printvv(p+1,count+2)=-abs(M(3,p).');
        else
            printvv(p+1,count+2)=abs(M(3,p).');
        end
    end
end
%v 実部
printvvr(1,count+2)=count;
printvvr(1,1)=0;
printvvr(2:div+2,1)=M(1,:).';
    for p=1:1:div+1
        printvvr(p+1,count+2)=real(M(3,p).');
    end
end
%v 虚部
printvvi(1,count+2)=count;
printvvi(1,1)=0;
printvvi(2:div+2,1)=M(1,:).';
    for p=1:1:div+1
        printvvi(p+1,count+2)=imag(M(3,p).');
    end
end

%c 分布をプリント
%実数部分
printccr(1,count+2)=count;
printccr(1,1)=0;
printccr(2:div+1,1)=(M(1,1:div)+L/2).';
    for p=1:1:div
        printccr(p+1,count+2)=ccr(1,p).';
    end
end
%虚数部分
printcci(1,count+2)=count;
```



```

printcci(1,1)=0;
printcci(2:div+1,1)=(M(1,1:div)+L/2).';
    for p=1:1:div
        printcci(p+1,count+2)=cci(1,p).';
    end

%アドミッタンス,位相
printii(count+1,1)=log10(abs(M(4,div+1)/V0));
printii(count+1,2)=atan(imag(M(4,div+1))/real(M(4,div+1)))/pi*180;

t=0;
%ループ抜けチェック
CHECK=0;
for p=1:1:div+1
    if
        abs((real(M(3,p))-
real(vv(1,p)))/(real(M(3,p))+real(vv(1,p)))*2) >= 1e-5
        %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループを続ける
        break
    end
    if
        abs((imag(M(3,p))-
imag(vv(1,p)))/(imag(M(3,p))+imag(vv(1,p)))*2) >= 1e-5
        %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループを続ける
        break
    end
    if p==div+1
        CHECK=1;
        break
    end
end

%ループ抜ける場合
if CHECK==1
    break
elseif count == 10000%%%% %100 回ループしたら抜け出す
    break
end

```

```

        %ループ抜けない場合
        %vv 更新
        for p=1:1:div+1
            vv(1,p)=vv(1,p)+(M(3,p)-vv(1,p))/nn;           % 変 化 を
            抑える為に nn で割る
        end

    end

    %出力
    %ループ回数を出力
    OutputMatrix(1:4,:)=M(1:4,:);
    OutputMatrix(5,1)=count;
    for p=2:1:div+1
        OutputMatrix(5,p)=0;
    end
    out=OutputMatrix;

```

③ 力係数

```

%input:temperature
function out0=A(in0)
A0=0.146;
out0=A0*(1+1.62*10^(-3)*(in0-28));

```

④ 1 次弾性定数実部

```

%input:temperature
function out0=Er(in0)
a=7.52*10^10;
out0=a;

```

⑤ 1 次弾性定数虚部

```

%input:temperature
function out0=Ei(in0)
Ei0=3.6702*10^7;
out0=Ei0*(1+2.7069*10^(-2)*(in0-28));

```

⑥ 3 次弾性定数実部

```
%input:temperature
function out0=E3r(in0)
a=-1.261e17*(1+0.02176*(in0-28));
out0=a;
```

⑦ 3 次弾性定数虚部

```
%input:temperature
function out0=E3i(in0)
a=7.483e15*(1+0.03*(in0-28));
out0=a;
```

⑧ 誘電率

```
%input:temperature
function out0=ipsilon(in0)
ipsilon0=10.7*10^(-9);
out0=ipsilon0*(1+3.86*10^(-3)*(in0-28));
```

(2)31 効果：温度変化を含めた計算

※構成

- ①AdmittanceHIGHTemp.m：アドミッタンスの周波数特性の計算を行う。
- ②MasonHIGH2.m：伝達マトリックスの計算を行う関数。①の内部で用いられる。
- ③A.m：力係数の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
- ④Er.m：1 次弾性定数実部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
- ⑤Ei.m：1 次弾性定数虚部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
- ⑥E2r.m：3 次弾性定数実部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
- ⑦E3i.m：3 次弾性定数虚部の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。
- ⑧ipsilon.m：誘電率の測定情報が含まれる。②の内部で用いられる。

(5.4 節で使用)

①アドミッタンス特性の計算

```
%%%%AdmittanceHIGHTemp.m%%%%%
%温度分布の影響下でのアドミッタンスカーブ
%初期化
```

```

clear all;
%入力
div=101;                %分割数
V0=15;                  %電圧[V](pp 値の半分)
tmp=25;                 %温度の初期値

%シミュレーション設定値
omegastart=34000;       %周波数スイープ始点
omegaend=36000;         %周波数スイープ終点
divf=100;                %出力するアドミッタンスカーブでの
周波数分割数
samplingfreq=10;        %計算の中での周波数刻み幅

%圧電振動子パラメータ
w=0.007;
h=0.002;
L=0.044;
density=7.7*10^3;        %密度
LL=L/div;
lamda=1.5;               %熱伝導率[W/mK]
htf=17.9;                %熱伝達率[W/m^2.K]
htf_T=17.9;              %熱伝達率先端[W/m^2.K]

%周波数スイープ
for ffrp=1:1:divf+1
    omega1=omegastart;
    omega2=omegastart+(ffrp-1)*(omegaend-omegastart)/divf;

    %初期温度分布を設定(均一温度)
    for p=1:1:div
        TMP(1,p)=tmp;
    end

    %E3 の計算に使う v をはじめ全て 0 としておく
    for p=1:1:div+1
        vv(1,p)=0;
    end
end

```

```

end

roop=0;      %ループ回数
while 1
    %omega1 から omega2 まで周波数スイープ
    %周波数分割数を計算
    divfreq=abs(omega2-omega1)/samplingfreq;
    %UP と DOWN を分ける処理
    if omega1 <= omega2
        %omega1 より omega2 の方が大きい場合(UP スイープ)
        %omega1==omega2 の場合も含む
        kk=1;
    else
        %omega1 より omega2 の方が小さい場合(DOWN スイープ)
        kk=-1;
    end
    for q=1:1:divfreq+1
        omega=2*pi*(omega1+kk*(q-1)*samplingfreq);

        %Mason 解く
        M=MasonHIGH2(V0, omega, TMP, div, vv);

        %収束した v 分布を次の周波数ループに用いる
        vv=M(3,1:div+1);
    end
    %一度スイープし終えたらその周波数で固定
    omega1=omega2;

    X=M(1,1:div+1);
    XX=X(1,1:div);
    F=M(2,1:div+1);
    v=M(3,1:div+1);
    u=v/j/omega;
    i0=M(4,div+1);

```

```

vr(1,:)=X;
vi(1,:)=X;
vr(2,:)=real(v);
vi(2,:)=imag(v);

%発熱量の分布
for p=1:1:div

    Q1(1,p)=1/2*w*h*LL*Ei(TMP(1,p))/omega*((abs(v(p+1)-v(p)))/LL)^2;

    Q3(1,p)=3/8*w*h*LL*E3i(TMP(1,p))/omega^3*((abs(v(p+1)-
v(p)))/LL)^4;

    Q(1,p)=Q1(1,p)+Q3(1,p);
    %こ こ で (abs(v(p+1))-abs(v(p)))/LL=dv/dx
end
for p=1:1:div
    if p==1
        XXX(1,p)=LL/2;
    else
        XXX(1,p)=XXX(1,p-1)+LL;
    end
end

%熱伝導方程式
dx=LL;
MATRIX=zeros(div);
MATRIX(1,1)=-dx*htf_T*(w*h)/w/h-lamda;
MATRIX(1,2)=lamda;
MATRIX(div,div-1)=lamda;
MATRIX(div,div)=-dx*htf_T*(w*h)/w/h-lamda;
b(1,1)=-dx*htf_T*(w*h)*tmp/w/h;
b(div,1)=-dx*htf_T*(w*h)*tmp/w/h;
for p=2:1:div-1
    MATRIX(p,p-1)=lamda;
    MATRIX(p,p)=-dx^2*htf*(2*w+2*h)/w/h-2*lamda;
    MATRIX(p,p+1)=lamda;

```

```

        b(p,1)=-dx^2*(Q(1,p)/w/h/dx+htf*(2*w+2*h)*tmp/w/h);
    end
    TT=inv(MATRIX)*b;
    %次の準備
    %TMP2 は入力された速度分布で収束した温度分布
    TMP2=TT.';

    %ループ抜けチェック
    LASTCHECK = 0;

    %%%周波数、中心温度表示%%%
    debug_omega=[omega/2/pi/1e3                TMP(1,(div-1)/2+1)
TMP2(1,(div-1)/2+1)]
    %%%%%%%%%%%%%%%

    for p=1:1:div
        %前回伝達マトリックスを計算した時の入力温度分
        布と比較
        if                                abs((TMP2(1,p)-
TMP(1,p))/((TMP2(1,p)+TMP(1,p))/2)) >= 1e-5
            break  %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループ
            を続ける
        end
        if p==div
            LASTCHECK=1;
            break
        end
    end

    if LASTCHECK == 0
        %抜けないとき(次の速度分布を求めに行くとき)
        for p=1:1:div
            TMP(1,p)=TMP2(1,p);
        end
    elseif LASTCHECK == 1
        %抜けるとき

```

```

                                for p=1:1:div
                                    %LASTOUT は最終的に収束した温度分布
                                    LASTOUT(1,p)=TMP2(1,p);
                                end
                                break;
                            end
                        end

%アドミッタンス、速度(実部・虚部)
Admittance=log10(abs(i0)/V0);
Phase=atan(imag(i0)/real(i0))/pi*180;

%周波数とアドミッタンス、位相、中心最高温度
LASTAdmittance(1,ffroop)=omega2;
LASTAdmittance(2,ffroop)=Admittance;
LASTAdmittance(3,ffroop)=Phase;
LASTAdmittance(4,ffroop)=LASTOUT(1,(div-1)/2+1);
%周波数と温度分布
LASTTemp(1,ffroop)=omega2;
LASTTemp(2:div+1,ffroop)=LASTOUT(1,:).';
end

csvwrite('Admittancecurve.csv',LASTAdmittance. ');
csvwrite('Temperature.csv',LASTTemp);

```

②伝達マトリックス

(1)②と同じものを用いた

③力係数

(1)③と同じものを用いた

④ 1 次弾性定数実部

(1)④と同じものを用いた

⑤ 1 次弾性定数虚部

(1)⑤と同じものを用いた

⑥ 3 次弾性定数実部

(1)⑥と同じものを用いた

⑦ 3 次弾性定数虚部

(1)⑦と同じものを用いた

⑧ 誘電率

(1)⑧と同じものを用いた

(3)33 効果：3 次弾性定数を考慮したアドミッタンス特性のフィッティング
※構成

- ①FittingNonLIN.m：アドミッタンス曲線のフィッティングを行う。
- ②YNonLIN.m：アドミッタンスの計算を行う関数。①、④の内部で用いられる。
- ③MasonNonLIN.m：伝達マトリックスの計算を行う。②の内部で用いられる。
- ④CalcErrorNonLIN.m：アドミッタンスの計算結果と測定結果の誤差計算を行う。①の内部で用いられる。

(4.3 節で使用)

①フィッティング

```
%%%%%%%% FittingNonLIN.m %%%%%%%%%
% 非線形計算でアドミッタンス曲線の Fitting を行う
```

```
% 初期化
clear all
format short e;

global Info;
global div;
global Vpp;
global f1;
global f2;
global divfreq;
global Admref;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
力 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

入

```
%%% 計算条件 %%%
div=101;          %分割数
Vpp=40;           %電圧[V](pp 値)
f1=170e3;         %周波数スイープ始点
f2=70e3;          %周波数スイープ終点
divfreq=300;      %周波数スイープ分割数
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 物性値 %%%%%%%%%
%初期値
E1r=1.2072e11;                                %c33D
E1i=3.2657e8;                                %E1i
e33=18.481;                                    %e33
EPS=5.9501e-9;                                %epsilon33S
E3r=-5.0e16;
E3i=0.5e15;

%固定値
density=7.7e3;                                %密度
w=3.0e-3;                                    %サイズ(幅)
h=3.0e-3;                                    %サイズ(厚み)
L=15e-3;                                    %サイズ(長さ)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% 測定データファイル名 %%%
AdmFile='AdmDOWN40Vpp.csv';    %アドミッタンスは log 値(data
フォルダに入れておく)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% 開始時刻出力
c = clock;
[sprintf('%d/', c(1:2)), sprintf('%d\t', c(3)), sprintf('%2d:', c(4:5)),
sprintf('%d', fix(c(6)))]

Admref=csvread(strcat('data/',AdmFile));

% イメージ表示(測定データ)
figure(3)

```

```

clf
hold on
plot(Admref(:,1),Admref(:,2), 'r');

% サンプル情報
Info(1,1)=E1r;
Info(2,1)=E1i;
Info(3,1)=e33;
Info(4,1)=EPS;
Info(5,1)=density;
Info(6,1)=w;
Info(7,1)=h;
Info(8,1)=L;
Info(9,1)=E3r;
Info(10,1)=E3i;

% fminsearch を使う準備
model = @CalcErrorNonLIN; % 二乗誤
差を求める関数(関数ハンドル:引数や配列にできる)
initial = Info(9:10,1); % 初期値

% 局所最小解を求める
% model:func(param を与えると sse を返す)
% TolFun:Fun の許容誤差, TolX:x の許容誤差, MaxIter:反復回数,
MaxFunEvals:関数評価の最大回数
param = fminsearch(model, initial, optimset('TolFun',1e-4,'TolX',1e-
1,'MaxIter',1e+6,'MaxFunEvals',1e+6,'PlotFcns',@optimplotfval));

paramResult(1:4,1)=Info(1:4,1);
paramResult(5:6,1)=param;

%最適化されたパラメータで再計算
Admittance=YNonLIN(paramResult);

Admcal(:,1)=Admittance(1,:).';
Admcal(:,2)=log10(Admittance(2,:).');

```

```

%参照・計算したアドミッタンスを保存
AdmResult(:,1:2)=Admref;
AdmResult(:,3:4)=Admcal;
csvwrite(strcat('Fitted_', AdmFile), AdmResult);

%パラメータを保存
csvwrite(strcat('Param_', AdmFile), paramResult);

%計算結果表示
figure(3)
plot(Admcal(:,1),Admcal(:,2), 'b');
hold off

display(param)

%終了時刻出力
c = clock;
[sprintf('%d/', c(1:2)), sprintf('%d\t', c(3)), sprintf('%2d:', c(4:5)),
sprintf('%d', fix(c(6)))]

```

②アドミッタンス計算

```

%%% YNonLIN.m %%%
% アドミッタンスの周波数特性を線形計算して返す

function Admittance = YNonLIN(param)

    global Info;
    global div;
    global Vpp;
    global f1;
    global f2;
    global divfreq;
    global Admref;

```

```

%与えられたパラメータからサンプル情報を再構成
InfoYNonLIN(1:4,1)=param(1:4,1);
InfoYNonLIN(5:8,1)=Info(5:8,1);
InfoYNonLIN(9:10,1)=param(5:6,1);

%電圧を op 値にする
V0=Vpp/2;

%E3 の計算に使う v をはじめ全て 0 としておく
for p=1:1:div+1
    vv(1,p)=0;
end

%周波数スイープ
for q=1:1:divfreq+1
    omega=2*pi*(f1+(q-1)*(f2-f1)/divfreq);

    %Mason 解く
    M=MasonNonLIN(V0, omega, div, vv, InfoYNonLIN);

    %収束した速度分布を次の周波数の初期速度分布と
    して用いる

    vv=M(3,1:div+1);

    X=M(1,1:div+1);
    XX=X(1,1:div);
    F=M(2,1:div+1);
    v=M(3,1:div+1);
    u=v/j/omega;
    vr(1,:)=X;
    vi(1,:)=X;
    vr(2,:)=real(v);
    vi(2,:)=imag(v);
    v0(1,:)=X(1,:);
    current=M(4,2);

```

```

        Y=current/V0;
        Ym=abs(Y);
        Phase=atan(imag(Y)/real(Y))/pi*180;

        for p=1:1:div+1
            if imag(v(1,p)) > 0
                v0(2,p)=abs(v(1,p));
            elseif imag(v(1,p)) < 0
                v0(2,p)=-abs(v(1,p));
            end
        end

        Admittance(1,q)=omega/2/pi;
        Admittance(2,q)=Ym;
        Admittance(3,q)=Phase;
        Admittance(4,q)=abs(M(3,1));           %速度振幅
        Admittance(5,q)=M(4,1);                %

ループ回数

        end
    end
end

```

③伝達マトリックス

```

%%%%%% MasonNonLIN.m %%%%%%%%%
% 縦効果の伝達マトリックス(非線形)
% input:電圧, 周波数, 分割数, 前の速度分布, サンプル情報

function out = MasonNonLIN(V0, omega, div, vv, Info)

%サンプル情報読み込み
Elr=Info(1,1);           %c33D
Eli=Info(2,1);
e33=Info(3,1);
EPS=Info(4,1);           %epsilon33S
density=Info(5,1);       %密度
w=Info(6,1);

```

```

h=Info(7,1);
Lall=Info(8,1);
E3r=Info(9,1);
E3i=Info(10,1);

L=Lall/div; %1 分割分の長さ
S=w*h; %断面積

%%% 更新係数(1/nn) %%%
nn=10;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%v が収束するまでループする
count=0; %ループカウンタ
countv=0;
while 1
    %全体の伝達マトリックス
    TransMatrix=eye(3); %単位行列用意
    TransMatrix2=eye(3); %単位行列用意

    for p=1:1:div
        %パラメータ計算
        A=e33*S;
        c=((E1r+j*E1i+3/4*E3r*((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-
abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^2+j*3/4*E3i*(((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-
abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^2)/density)^(1/2); %音速(Er 温度依存)
        k=omega/c; %波数
        Z0=density*c; %音響インピーダンス

        aa=j*S*Z0*(tan(k*L/2)-1/sin(k*L));
        bb=j*S*Z0/sin(k*L);
        cc=A/EPS;

        TransMatrix2(1,:)=[-aa/bb (-aa^2+bb^2)/bb
cc*(aa+bb)/bb];

```



```

TransMatrix2(2,:)=[-1/bb -aa/bb cc/bb];
TransMatrix2(3,:)=[0 0 1];

TransMatrix=TransMatrix2*TransMatrix;
end

%境界条件求める(x=0の方)
Lall=L*div;

D=EPS/Lall*V0/(1+2*e33*TransMatrix(1,3)/(j*omega*Lall*TransMatrix(1,2)));

v2=-TransMatrix(1,3)/TransMatrix(1,2)*D;

%入力行列(F,v,D)
IN=[0;v2;D];

%各要素の x,F,v を記録する行列
M(1,1)=0; %M は 1 行目:x, 2 行目:F, 3 行目:v

M(2:3,1)=IN(1:2,1);

%各要素で計算(x=0の方から)
for p=1:1:div
    %パラメータ計算
    A=e33*S;
    c=((E1r+j*E1i+3/4*E3r*((abs(vv(1,p+1)/j/omega)-abs(vv(1,p)/j/omega))/L)^2+j*3/4*E3i*(((abs(vv(1,p+1)/j/omega)-abs(vv(1,p)/j/omega))/L)^2))/density)^(1/2); %音速(Er 温度依存)
    k=omega/c; %波数
    Z0=density*c; %音響インピーダンス

    aa=j*S*Z0*(tan(k*L/2)-1/sin(k*L));
    bb=j*S*Z0/sin(k*L);
    cc=A/EPS;

```

```

                                TransMatrix(1,:)=[-aa/bb      (-aa^2+bb^2)/bb
cc*(aa+bb)/bb];

                                TransMatrix(2,:)=[-1/bb -aa/bb cc/bb];
                                TransMatrix(3,:)=[0 0 1];

                                IN=TransMatrix*IN;

                                %代入
                                M(1,p+1)=M(1,p)+L;
                                M(2:3,p+1)=IN(1:2,1);
                                end

                                %ループ抜けチェック
                                CHECK=0;
                                for p=1:1:div+1
                                    if
                                        abs((real(M(3,p))-
real(vv(1,p)))/(real(M(3,p))+real(vv(1,p)))*2) >= 1e-5
                                        %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループを続け
る
                                        break
                                    end
                                    if
                                        abs((imag(M(3,p))-
imag(vv(1,p)))/(imag(M(3,p))+imag(vv(1,p)))*2) >= 1e-5
                                        %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループを続け
る
                                        break
                                    end
                                    if p==div+1
                                        CHECK=1;
                                        break
                                    end
                                end

                                end

                                %ループ抜ける場合
                                if CHECK==1
                                    break

```

```

elseif count == 10000%%%%% %10000 回ループしたら
抜け出す
    break
end
%ループ抜けない場合
%vv 更新
for p=1:1:div+1
    vv(1,p)=vv(1,p)+(M(3,p)-vv(1,p))/nn; %
変化を抑える為に nn で割る
end

countv=countv+1;
vvRecord(1,countv)=countv;
vvRecord(2,countv)=abs(vv(1,1));
end

%出力
%ループ回数を出力
OutputMatrix(1:3,:)=M(1:3,:);
OutputMatrix(4,1)=count;
%電流
OutputMatrix(4,2)=j*omega*S*D;
for p=3:1:div+1
    OutputMatrix(4,p)=0;
end

out=OutputMatrix;

```

④ 誤差計算

```

%%%%%%%% CalcErrorNonLIN.m %%%%%%%%%
% パラメータを渡すとアドミッタンスを計算して二乗誤差を求める関数
function ERROR = CalcErrorNonLIN(param)

    format short e;

    global Info;

```

```

        global div;
        global Vpp;
        global f1;
        global f2;
        global divfreq;
        global Admref;

        paramCalc(1:4,1)=Info(1:4,1);
paramCalc(5:6,1)=param;

%与えられたパラメータからアドミッタンスを計算
Admittance=YNonLIN(paramCalc);

        Admcal(:,1)=Admittance(1,:).';
        Admcal(:,2)=log10(Admittance(2,:).');

        % 誤差計算
        % 反共振よりも共振を評価するように逆数をとって誤差計
算

        ERROR=0;
        for k1=1:1:divfreq
                ERROR=ERROR+(1/Admref(k1,2)-1/Admcal(k1,2))^2;
        end

end

```

(4)33 効果：5 次弾性定数を考慮したアドミッタンス特性のフィッティング
※構成

- ①FittingNonLIN.m：アドミッタンス曲線のフィッティングを行う。
- ②YNonLIN.m：アドミッタンスの計算を行う関数。①、④の内部で用いられる。
- ③MasonNonLIN.m：伝達マトリックスの計算を行う。②の内部で用いられる。
- ④CalcErrorNonLIN.m：アドミッタンスの計算結果と測定結果の誤差計算を行う。①の内部で用いられる。

(4.4 節で使用)

①フィッティング

```

%%%%%%%% FittingNonLIN.m %%%%%%%%%
% 非線形計算でアドミタンス曲線の Fitting を行う

% 初期化
clear all
format short e;

global Info;
global div;
global Vpp;
global f1;
global f2;
global divfreq;
global Admref;

%%%%%%%%%%%%%% 入力
力 %%%%%%%%%%%%%%%

%%% 計算条件 %%%
div=101;          %分割数
Vpp=300;          %電圧[V](pp 値)
f1=150e3;         %周波数スイープ始点
f2=70e3;          %周波数スイープ終点
divfreq=300;      %周波数スイープ分割数
%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%% 物性値 %%%%%%%%%%%%%%%
%初期値
Elr=1.154e11;     %c33D
Eli=1.18e8;
e33=2.035e1;
EPS=7.803e-9;     %epsilon33S

```

```

E3r=-9.37e16;
E3i=4.05e15;
E5r=3.0e23;
E5i=1.0e22;

%固定値
density=7.7e3;           %密度
w=3.0e-3;                %サイズ(幅)
h=3.0e-3;                %サイズ(厚み)
L=15e-3;                 %サイズ(長さ)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%% 測定データファイル名 %%%
AdmFile='Adm300VppDOWN.csv'; %アドミッタンスは log 値(data
フォルダに入れておく)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% 開始時刻出力
c = clock;
[sprintf('%d/', c(1:2)), sprintf('%d\t', c(3)), sprintf('%2d:', c(4:5)),
sprintf('%d', fix(c(6)))]

Admref=csvread(strcat('data/',AdmFile));

% イメージ表示(測定データ)
figure(3)
clf
hold on
plot(Admref(:,1),Admref(:,2), 'r');

% サンプル情報
Info(1,1)=E1r;

```

```

Info(2,1)=E1i;
Info(3,1)=e33;
Info(4,1)=EPS;
Info(5,1)=density;
Info(6,1)=w;
Info(7,1)=h;
Info(8,1)=L;
Info(9,1)=E3r;
Info(10,1)=E3i;
Info(11,1)=E5r;
Info(12,1)=E5i;

% fminsearch を使う準備
model = @CalcErrorNonLIN; % 二乗誤
差を求める関数(関数ハンドル:引数や配列にできる)
initial = Info(9:12,1); % 初期値

% 局所最小解を求める
% model:func(param を与えると sse を返す)
% TolFun:Fun の許容誤差, TolX:x の許容誤差, MaxIter:反復回数,
MaxFunEvals:関数評価の最大回数
param = fminsearch(model, initial, optimset('TolFun',1e-4,'TolX',1e-
1,'MaxIter',1e+6,'MaxFunEvals',1e+6,'PlotFcns',@optimplotfval));

paramResult(1:4,1)=Info(1:4,1);
paramResult(5:8,1)=param;

%最適化されたパラメータで再計算
Admittance=YNonLIN(paramResult);

Admcal(:,1)=Admittance(1,:).';
Admcal(:,2)=log10(Admittance(2,:).');

%参照・計算したアドミッタンスを保存
AdmResult(:,1:2)=Admref;
AdmResult(:,3:4)=Admcal;

```

```

csvwrite(strcat('Fitted_', AdmFile), AdmResult);

%パラメータを保存
csvwrite(strcat('Param_', AdmFile), paramResult);

    %計算結果表示
    figure(3)
    plot(Admcal(:,1),Admcal(:,2), 'b');
hold off

display(param)

%終了時刻出力
c = clock;
[sprintf('%d/', c(1:2)), sprintf('%d¥t', c(3)), sprintf('%2d:', c(4:5)),
sprintf('%d', fix(c(6)))]

```

②アドミッタンス計算

```

%%%% YNonLIN.m %%%
% アドミッタンスの周波数特性を線形計算して返す

function Admittance = YNonLIN(param)

    global Info;
    global div;
    global Vpp;
    global f1;
    global f2;
    global divfreq;
    global Admref;

    %与えられたパラメータからサンプル情報を再構成
    InfoYNonLIN(1:4,1)=param(1:4,1);

```



```

InfoYNonLIN(5:8,1)=Info(5:8,1);
InfoYNonLIN(9:12,1)=param(5:8,1);

%電圧を op 値にする
V0=Vpp/2;

%E3 の計算に使う v をはじめ全て 0 としておく
for p=1:1:div+1
    vv(1,p)=0;
end

%周波数スイープ
for q=1:1:divfreq+1
    omega=2*pi*(f1+(q-1)*(f2-f1)/divfreq);

    %Mason 解く
    M=MasonNonLIN(V0, omega, div, vv, InfoYNonLIN);

    %収束した速度分布を次の周波数の初期速度分布と
    して用いる

    vv=M(3,1:div+1);

    X=M(1,1:div+1);
    XX=X(1,1:div);
    F=M(2,1:div+1);
    v=M(3,1:div+1);
    u=v/j/omega;
    vr(1,:)=X;
    vi(1,:)=X;
    vr(2,:)=real(v);
    vi(2,:)=imag(v);
    v0(1,:)=X(1,:);
    current=M(4,2);
    Y=current/V0;
    Ym=abs(Y);
    Phase=atan(imag(Y)/real(Y))/pi*180;

```

```

        for p=1:1:div+1
            if imag(v(1,p)) > 0
                v0(2,p)=abs(v(1,p));
            elseif imag(v(1,p)) < 0
                v0(2,p)=-abs(v(1,p));
            end
        end

        Admittance(1,q)=omega/2/pi;
        Admittance(2,q)=Ym;
        Admittance(3,q)=Phase;
        Admittance(4,q)=abs(M(3,1));           %速度振幅
        Admittance(5,q)=M(4,1);                %

ループ回数

        end
    end
end

```

③伝達マトリックス

```

%%%%%%%%% MasonLonLIN.m %%%%%%%%%%
% 縦効果の伝達マトリックス(非線形)
% input:電圧, 周波数, 分割数, 前の速度分布, サンプル情報

function out = MasonNonLIN(V0, omega, div, vv, Info)

%サンプル情報読み込み
Elr=Info(1,1);           %c33D
Eli=Info(2,1);
e33=Info(3,1);
EPS=Info(4,1);           %epsilon33S
density=Info(5,1);       %密度
w=Info(6,1);
h=Info(7,1);
Lall=Info(8,1);

```

```

E3r=Info(9,1);
E3i=Info(10,1);
E5r=Info(11,1);
E5i=Info(12,1);

L=Lall/div;          %1 分割分の長さ
S=w*h;               %断面積

%%% 更新係数(1/nn) %%%
nn=10;
%%%%%%%%%%%%%%

%v が収束するまでループする
count=0;             %ループカウント
countv=0;
while 1
    %全体の伝達マトリックス
    TransMatrix=eye(3);          %単位行列用意
    TransMatrix2=eye(3); %単位行列用意

    for p=1:l:div
        %パラメータ計算
        A=e33*S;
        c=((E1r+j*E1i+3/4*E3r*((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-
abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^2+j*3/4*E3i*(((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-
abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^2)+5/8*E5r*((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-
abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^4+j*5/8*E5i*(((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-
abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^4))/density)^(1/2);    %音速(Er 温度依存)
        k=omega/c;          %波数
        Z0=density*c;       %音響インピーダンス

        aa=j*S*Z0*(tan(k*L/2)-1/sin(k*L));
        bb=j*S*Z0/sin(k*L);
        cc=A/EPS;

```

```

TransMatrix2(1,:)=[-aa/bb      (-aa^2+bb^2)/bb
cc*(aa+bb)/bb];

TransMatrix2(2,:)=[-1/bb -aa/bb cc/bb];
TransMatrix2(3,:)=[0 0 1];

TransMatrix=TransMatrix2*TransMatrix;
end

%境界条件求める(x=0 の方)
Lall=L*div;

D=EPS/Lall*V0/(1+2*e33*TransMatrix(1,3)/(j*omega*Lall*TransMatrix(1,2)));

v2=-TransMatrix(1,3)/TransMatrix(1,2)*D;

%入力行列(F,v,D)
IN=[0;v2;D];

%各要素の x,F,v を記録する行列
M(1,1)=0;          %M は 1 行目:x, 2 行目:F, 3 行目:v

M(2:3,1)=IN(1:2,1);

%各要素で計算(x=0 の方から)
for p=1:l:div
    %パラメータ計算
    A=e33*S;
    c=((E1r+j*E1i+3/4*E3r*((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^2+j*3/4*E3i*(((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^2)+5/8*E5r*((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^4+j*5/8*E5i*(((abs(vv(1,p+1))/j/omega)-abs(vv(1,p))/j/omega))/L)^4))/density)^(1/2);    %音速(Er 温度依存)
    k=omega/c;          %波数
    Z0=density*c;      %音響インピーダンス

```

```

        aa=j*S*Z0*(tan(k*L/2)-1/sin(k*L));
        bb=j*S*Z0/sin(k*L);
        cc=A/EPS;

        TransMatrix(1,:)=[-aa/bb          (-aa^2+bb^2)/bb
cc*(aa+bb)/bb];

        TransMatrix(2,:)=[-1/bb -aa/bb cc/bb];
        TransMatrix(3,:)=[0 0 1];

        IN=TransMatrix*IN;

        %代入
        M(1,p+1)=M(1,p)+L;
        M(2:3,p+1)=IN(1:2,1);
    end

    %ループ抜けチェック
    CHECK=0;
    for p=1:1:div+1
        if abs((real(M(3,p))-
real(vv(1,p)))/(real(M(3,p))+real(vv(1,p)))*2) >= 1e-5
            %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループを続け
る
            break
        end
        if abs((imag(M(3,p))-
imag(vv(1,p)))/(imag(M(3,p))+imag(vv(1,p)))*2) >= 1e-5
            %ある 1 点で誤差が 1%以上ならループを続け
る
            break
        end
        if p==div+1
            CHECK=1;
            break
        end
    end
end

```

```

        %ループ抜ける場合
        if CHECK==1
            break
        elseif count == 10000%%%%%%%% %10000 回ループしたら
        抜け出す
            break
        end
        %ループ抜けない場合
        %vv 更新
        for p=1:1:div+1
            vv(1,p)=vv(1,p)+(M(3,p)-vv(1,p))/nn; %
        変化を抑える為に nn で割る
        end

        countv=countv+1;
        vvRecord(1,countv)=countv;
        vvRecord(2,countv)=abs(vv(1,1));
        end

        %出力
        %ループ回数を出力
        OutputMatrix(1:3,:)=M(1:3,:);
        OutputMatrix(4,1)=count;
        %電流
        OutputMatrix(4,2)=j*omega*S*D;
        for p=3:1:div+1
            OutputMatrix(4,p)=0;
        end

        out=OutputMatrix;
    
```

④ 誤差計算

```

%%%%%%%% CalcErrorNonLIN.m %%%%%%%%%
% パラメータを渡すとアドミッタンスを計算して二乗誤差を求める関数
    
```

算

```
function ERROR = CalcErrorNonLIN(param)

    format short e;

    global Info;
    global div;
    global Vpp;
    global f1;
    global f2;
    global divfreq;
    global Admref;

    paramCalc(1:4,1)=Info(1:4,1);
    paramCalc(5:8,1)=param;

    %与えられたパラメータからアドミッタンスを計算
    Admittance=YNonLIN(paramCalc);

    Admcal(:,1)=Admittance(1,:).';
    Admcal(:,2)=log10(Admittance(2,:).');

    % 誤差計算
    % 反共振よりも共振を評価するように逆数をとって誤差計
    ERROR=0;
    for k1=1:1:divfreq
        ERROR=ERROR+(1/Admref(k1,2)-1/Admcal(k1,2))^2;
    end

end
```

謝辞

本研究を進めるにあたり、学部4年の頃から長きにわたり、お忙しい中研究の方針や手法について親身にご指導して下さいました森田剛教授に心から感謝致します。また、昨年度から研究についてのご指導や研究生活での数々のサポートをして下さった蜂須賀知理特任講師、鈴木宗泰さんに感謝致します。また研究会において数々の助言を下さいました保坂寛教授、佐々木健教授にお礼を申し上げます。

本研究に必要な不可欠な材料の貸与や、様々な助言を下さいました共同研究者である東京理科大学の永田肇教授、太陽誘電株式会社の岸本純明様、清水寛之様、原田智宏様、相澤朋弥様、日本特殊陶業株式会社の沖村康之様、笠島崇様、山崎正人様、横山広大様に感謝を致します。

博士論文審査会を通じて、数々の本質的なご指摘を下さいました東京大学の佐々木健教授、山本晃生教授、米谷玲皇准教授、東京理科大学の永田肇教授に感謝致します。

研究生活を送る上で、数々のサポートをして下さいました森元有希子秘書、下川典子秘書、渋谷恵理佳秘書に感謝致します。

強誘電体グループにおいてともに研究生活を過ごし、未熟な自分に先行研究としての実験手法を快くご指導下さったOBの劉耀陽さん、三枝勝博さん、尾崎亮平さん、水上竜一さん、横澤宏紀さん、岩間成裕君、鈴木健太君、田上裕太郎君、加藤敦也君、根本稔君、村松大陸さん、研究生活や研究内容においてさまざまな助言を下さいました博士1年の Abdullah MUSTAFA 君、陳 康君、修士2年の岩崎晃君、金子貴光君、篠田航平君、呉暁剛君、張籌文君、修士1年の袁若殊君、王檣君、小林秀成君、笹村樹生君、徐暁星さん、工学部精密工学科4年の山田恭平君、吉岡滉起君に感謝いたします。

また、ともに助け合い研究を進めてきた同期の高山陸離君、正田純君、大西吉徳君、佐藤怜君、寺田一貴君に感謝いたします。

最後に、数々の助言を頂きました人間支援デバイス分野、人間環境学専攻環境情報マイクロシステム学分野の皆様には感謝すると共に、皆様の益々のご活躍をお祈りいたします。

2021年1月 三宅奏