

博士論文

固有直交分解法と Galerkin 射影に基づく  
縮約モデルによる配管系流れ解析の効率化に関する研究

矢敷 達朗



東京大学大学院 新領域創成科学研究科

博士論文

固有直交分解法と Galerkin 射影に基づく  
縮約モデルによる配管系流れ解析の効率化に関する研究

令和 3 年 2 月

矢敷 達朗



# 目次

## 第1章

第1章 序論.....	1
1.1 発電プラント・産業プラントへの配管系流れ解析の活用.....	1
1.2 流れ解析高速化のアプローチ.....	4
1.2.1 配管ネットワーク解析.....	4
1.2.2 大規模並列計算.....	4
1.2.3 機械学習.....	5
1.2.4 縮約モデル.....	5
1.3 縮約モデルの流れ解析への適用.....	7
1.4 本研究の目的.....	10
1.5 本論文の構成.....	13
第2章 固有直交分解法を用いた配管系流れ解析に対する基底空間構築手法の開発.....	14
2.1 緒言.....	14
2.2 基底空間構築手法.....	16
2.3 直管流れを対象とした3次元流体解析の精度検証.....	19
2.4 模擬配管定常流れへの固有直交分解法の適用.....	23
2.4.1 計算条件.....	23
2.4.2 適用結果.....	23
2.5 模擬配管非定常流れへの固有直交分解法の適用(1).....	30
2.5.1 計算条件.....	30
2.5.2 適用結果.....	30
2.6 模擬配管非定常流れへの固有直交分解法の適用(2).....	40
2.6.1 計算条件.....	40
2.6.2 適用結果.....	40
2.7 実配管非定常流れへの固有直交分解法の適用.....	49
2.7.1 計算条件.....	49
2.7.2 適用結果.....	49
2.8 結論.....	55
第3章 機械学習を用いた流速基底の流れ構造可視化手法の開発.....	56
3.1 緒言.....	56
3.2 機械学習を用いた渦中心位置抽出手法.....	58
3.2.1 全体概要.....	58

3.2.2	数式モデルを用いた渦中心位置計算方法 .....	58
3.2.3	機械学習を用いた渦中心位置予測 NN モデル構築方法 .....	59
3.3	模擬配管非定常流れへの機械学習を用いた渦中心位置抽出手法の適用 .....	64
3.3.1	適用対象 .....	64
3.3.2	数式モデルによる渦中心位置計算結果 .....	64
3.3.3	NN モデルによる渦中心位置抽出結果 .....	65
3.3.4	流速基底の流れ構造可視化結果 .....	66
3.4	結論 .....	72
第 4 章	基底空間上での Galerkin 射影による配管系流れ解析に対する縮約モデル構築手法の 開発 .....	73
4.1	緒言 .....	73
4.2	NS 方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法 .....	75
4.2.1	基礎式 .....	75
4.2.2	Galerkin 射影の適用 .....	75
4.3	NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法 .....	80
4.3.1	基礎式 .....	80
4.3.2	Galerkin 射影の適用 .....	81
4.4	RANS 方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法 .....	85
4.4.1	基礎式 .....	85
4.4.2	Galerkin 射影の適用 .....	86
4.5	RANS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法 .....	89
4.5.1	基礎式 .....	89
4.5.2	Galerkin 射影の適用 .....	90
4.6	乱流条件でのキャビティ流れ解析への縮約モデルの適用 .....	96
4.6.1	計算条件 .....	96
4.6.2	適用結果 .....	96
4.7	模擬配管流れ解析への縮約モデルの適用 .....	107
4.7.1	計算条件 .....	107
4.7.2	適用結果 .....	107
4.8	層流条件でのキャビティ流れ解析への NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式 とする縮約モデルの適用 .....	121
4.8.1	計算条件 .....	121
4.8.2	適用結果 .....	121
4.9	結論 .....	129

第5章 結論.....	130
謝辞 .....	133
付録 .....	134
付録 A. 基底計算式の算出.....	134
付録 B. Snapshot POD に基づく基底の算出方法 .....	136
付録 C. 層流に対する基底空間構築方法の詳細.....	139
付録 D. NS 方程式の弱形式化.....	141
付録 E. NS 方程式を基礎式とする縮約モデルの導出 .....	143
付録 F. 圧力ポアソン方程式の弱形式化と境界条件の組み込み .....	147
付録 G. NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデルの導出 .....	150
付録 H. 渦粘性係数に対する基底空間構築方法の詳細.....	154
付録 I. RANS 方程式を基礎式とする縮約モデルの導出.....	155
付録 J. 式変形で用いる関係式 .....	158
参考文献 .....	159

# 目次

図 1. 1	プラント配管系	3
図 1. 2	配管系流れ解析手法	12
図 2. 1	ベクトル $\vec{y}_{\alpha\beta}$ の基底 $\vec{\varphi}_i$ への射影 $P[\vec{y}_{\alpha\beta}]$	18
図 2. 2	直管流れ解析対象	20
図 2. 3	直管流れ解析結果	22
図 2. 4	模擬配管定常流れ解析対象	26
図 2. 5	模擬配管定常流れ解析結果	28
図 2. 6	3次元流体解析流速と近似流速の誤差	29
図 2. 7	模擬配管非定常流れ解析対象(1)	34
図 2. 8	模擬配管非定常流れ解析結果(1)	36
図 2. 9	エルボ出口から 5D 下流の配管断面における流速絶対値の時間変化	37
図 2. 10	基底数と時間平均誤差の関係(Case3~Case8)	37
図 2. 11	誤差の時間変化(基底数 $r = 5, 10, 100$ )	38
図 2. 12	3次元流体解析流速と近似流速の時間平均誤差(Case9)	39
図 2. 13	3次元流体解析流速と近似流速の時間平均誤差(Case10)	39
図 2. 14	模擬配管非定常流れ解析対象(2)	42
図 2. 15	流出面上の管中心軸から距離 0.25D の位置における流れの旋回成分の時間変化	43
図 2. 16	流出面上での流れの旋回成分に対する FFT 解析結果	44
図 2. 17	基底結合係数の時間変化(1)	45
図 2. 18	基底結合係数の時間変化(2)	46
図 2. 19	模擬配管非定常流れに対する規格化固有値	48
図 2. 20	実配管非定常流れ解析対象	50
図 2. 21	実配管非定常流れ計算格子	51
図 2. 22	実配管非定常流れ解析結果	53
図 2. 23	基底数と時間平均誤差の関係(Case12)	54
図 3. 1	プラント配管向け渦中心位置抽出手法	61
図 3. 2	圧力ヘシアンを用いた渦中心位置計算方法概要	62
図 3. 3	渦中心位置予測 NN モデル概要	63
図 3. 4	模擬配管流れ解析対象	67
図 3. 5	数式モデルによる渦中心位置計算結果	68
図 3. 6	学習過程における誤差の推移	69

図 3. 7 NN モデルによる渦中心位置抽出結果 .....	70
図 3. 8 流速基底の流れ構造 .....	71
図 4. 1 キャビティー流れ解析対象 .....	99
図 4. 2 3次元流体解析計算結果 .....	101
図 4. 3 乱流条件でのキャビティー流れに対する規格化固有値 .....	102
図 4. 4 時間平均場および基底空間分布(Case1-1) .....	103
図 4. 5 時間平均場および基底空間分布(Case1-2) .....	104
図 4. 6 乱流条件でのキャビティー流れに対する誤差の時間変化 .....	105
図 4. 7 模擬配管流れ解析対象 .....	111
図 4. 8 3次元流体解析計算結果(流線) .....	113
図 4. 9 3次元流体解析結果(流速時間変化) .....	114
図 4. 10 模擬配管流れに対する規格化固有値 .....	115
図 4. 11 模擬配管流れに対する誤差の時間変化 .....	116
図 4. 12 配管断面平均スワール数の比較(Case2-1) .....	118
図 4. 13 配管断面平均スワール数の比較(Case2-2) .....	119
図 4. 14 3次元流体解析計算結果 .....	125
図 4. 15 層流条件でのキャビティー流れに対する誤差の時間変化 .....	126
図 4. 16 圧力勾配誤差分布の時間変化 .....	128

# 表目次

表 1. 1 縮約モデル構築手法 .....	6
表 2. 1 3次元流体解析の計算条件 .....	21
表 2. 2 模擬配管定常流れ流入流速条件 .....	27
表 2. 3 模擬配管非定常流れに対する基底空間抽出条件(Case3~Case8).....	35
表 2. 4 模擬配管非定常流れ流入流速条件(Case9, Case10).....	35
表 2. 5 模擬配管非定常流れに対する基底空間抽出条件(Case11) .....	43
表 2. 6 流出面上での流れの旋回成分に対する低周波成分の周波数 .....	44
表 2. 7 基底結合係数に対する FFT 解析結果 .....	47
表 2. 8 実配管非定常流れに対する基底空間抽出条件(Case12) .....	52
表 3. 1 NN モデル精度 .....	69
表 3. 2 計算時間の比較 .....	70
表 4. 1 縮約モデル構築方法 .....	74
表 4. 2 3次元流体解析計算条件 .....	100
表 4. 3 縮約モデル計算条件 .....	100
表 4. 4 乱流条件でのキャビティー流れに対する時間平均誤差 .....	106
表 4. 5 乱流条件でのキャビティー流れに対する計算時間の比較.....	106
表 4. 6 3次元流体解析計算条件 .....	112
表 4. 7 縮約モデル計算条件 .....	112
表 4. 8 模擬配管流れに対する時間平均誤差 .....	117
表 4. 9 配管断面平均スワール数の空間平均誤差(Case2-1) .....	118
表 4. 10 配管断面平均スワール数の全体平均誤差(Case2-1) .....	118
表 4. 11 配管断面平均スワール数の空間平均誤差(Case2-2) .....	120
表 4. 12 配管断面平均スワール数の全体平均誤差(Case2-2) .....	120
表 4. 13 模擬配管流れに対する計算時間の比較.....	120
表 4. 14 3次元流体解析計算条件.....	124
表 4. 15 縮約モデル計算条件 .....	124
表 4. 16 層流条件でのキャビティー流れに対する時間平均誤差.....	127

# 第1章

## 序論

### 1.1 発電プラント・産業プラントへの配管系流れ解析の活用

発電プラント、および石油化学、水、医薬などの産業プラントでは、プラントの設計、運転・保守(O&M:Operation & Maintenance)の最適化や標準化が求められている。国内プラントに目を向けると、ベテラン技術者の高齢化による保守技術員の不足やプラント設備の老朽化による保守費用の増加に伴い、保守費用の抑制、プラント運転の高効率化に対するニーズが高い。また、新興国では、現地スタッフの維持・管理への知識や経験の不足、あるいは人材の流動性の高さからプラントO&Mの標準化が課題となっている。このような状況下で、プラントCADデータ、および大量に蓄積したプラント運転データを活用して、プラントの状態を可視化することで、プラント特性の評価、プラント劣化状況の可視化によるプラント寿命予測等を通じて、上で述べた課題を克服しようという機運が高まっている。

図1.1に示すように、プラントは機器と機器を結合し流体を輸送するための配管系から構成される。このうち、配管系を対象としてプラントの状態を可視化する例として二つの例を挙げる。最初の例は、配管内で生じる旋回流れにより流量計精度が低下する現象がある[1]。プラント配管系に設置される差圧式流量計においては、流量計に流入する流れが無旋回流れであると仮定して、差圧計測値から流量指示値を計算する。配管系内のエルボ、分岐、弁等で発生する旋回流れが十分減衰することなく流量計に流入すると、無旋回時と比較して差圧が小さくなるため流量指示値が低下し、流量計の誤差要因となる。そのため、流量計上流側に十分な長さの直管部を確保することがJIS等の規格[2]で定められている。一方で、配管ルーティングの制約から流量計をJIS等の規格を満足する位置に設置できない場合があり、そのような場合は、3次元流体解析を活用して配管系内の旋回流れ場を可視化し、流量指示値の低下幅を予測、旋回流れ発生要因を検討し、配管系設計にフィードバックすることが求められている。

配管系の状態可視化の二番目の例として、配管系流れ加速型腐食・液滴衝撃エロージョンによる配管減肉現象が挙げられる[3]。これは、プラント配管内の流動現象に起因して配管肉

厚が運転時間の経過と共に徐々に減少する現象である。配管減肉の結果、人的被害を伴う大規模破断に至る場合もあり、プラント事業者は定期的な配管肉厚測定や予防・保全対策をする必要がある。国内の発電プラントでは配管の肉厚測定値を用いた減肉速度および余寿命評価に基づく配管減肉管理が規定されている[4]。配管の肉厚測定には通常超音波厚さ計が用いられ、特定の間隔で肉厚を複数回測定することで減肉速度を把握し、配管の余寿命が評価される。プラントによっては一回の定期点検での肉厚測定部位が千箇所以上に及ぶことがあり、検査時間・作業量コストが増大する。そこで、配管減肉現象を可視化するために、3次元流体解析により配管内の流動状態を計算し、計算で得られた流動状態から配管の減肉速度を評価するアプローチが提案されている[5]。配管減肉現象を可視化することで、プラントの運転条件、配管設置条件に応じて減肉速度の大きい部位や余寿命が短い部位を特定できれば、該当部位を集中的に検査することにより、定期点検での肉厚測定作業を効率化できる。

上で述べたいずれの例においても、配管内で生じる特徴的な流動現象である、オリフィス、エルボ、分岐等の組み合わせで生じる旋回流れが、流量計精度低下[1]、配管減肉発生[6]の主要な要因となるため、配管系を対象とした3次元流体解析により旋回流れを捉えることが重要となる。従来、主にプラントの機器単体を対象として3次元流体解析を適用することが多かったが[7], [8]、近年、機器、配管系を含むプラント全体を対象として3次元流体解析を適用し、プラントの特性を評価するニーズが高まっている。3次元流体解析で用いる有限要素法、有限体積法、有限差分法等の離散化手法では、解析領域を格子と呼ばれる小さい領域に分割し、各格子における流速、圧力等の物理量を計算する。計算対象は高次元の流れ場であり、特に配管系に対しては機器単体と比較して流れ場のデータサイズが一桁以上大きくなるため、計算時間は数日から数週間かかる可能性があり、配管系流れ解析の計算時間を短縮することが必要である。

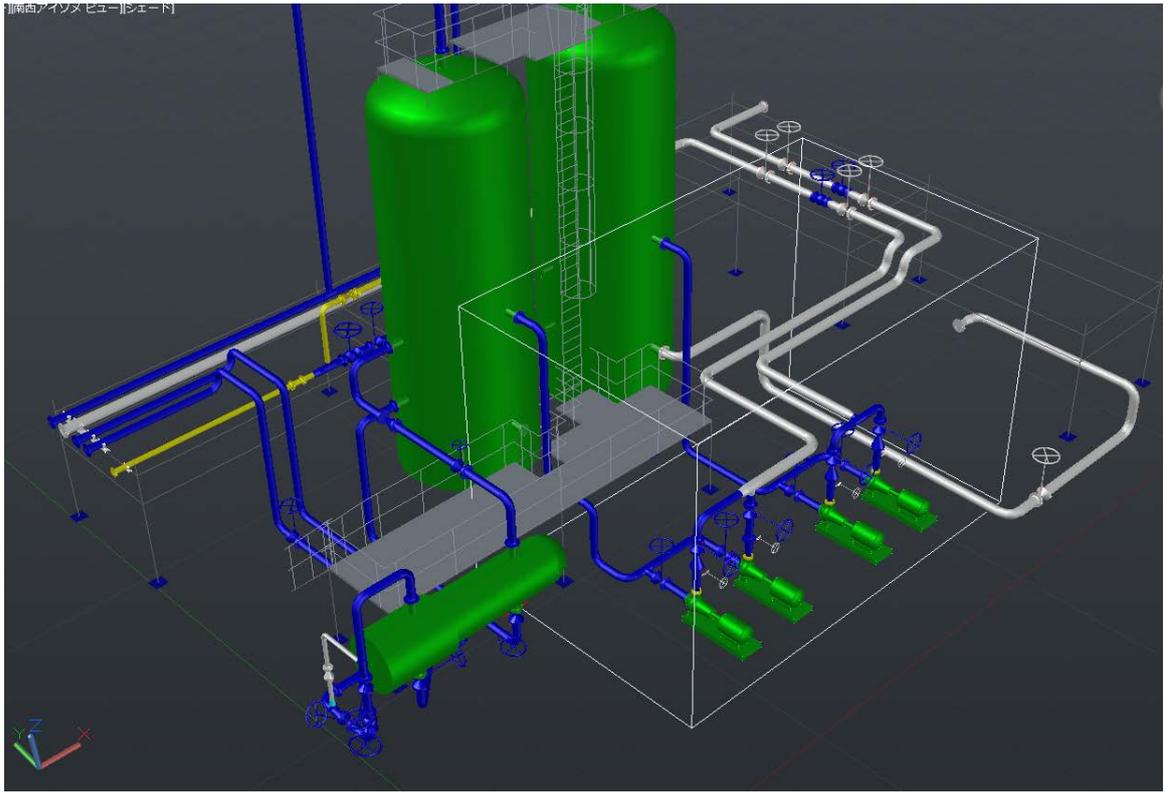


図 1.1 プラント配管系

## 1.2 流れ解析高速化のアプローチ

本研究で提案する手法の概要と関連研究との位置づけを説明するために、配管系を含む大規模な体系を対象とした流れ解析の高速化に関するこれまでの研究を以下に述べる。

### 1.2.1 配管ネットワーク解析

本アプローチでは、プラントを構成する機器と配管系を配管ネットワークとして表現し、配管内の流れを管軸方向に沿った1次元流れに近似して計算する。配管ネットワーク解析により、プラントの起動、停止、負荷変化等の様々運転条件に対するプラント特性を評価し[9], [10], [11], [12], [13]、プラント制御方式の検討、異常診断等に適用されている[14]。配管流れを1次元流れに近似して計算することにより、短い計算時間で配管系の圧損、流量分配、放熱量等を計算することができる。一方、配管内に生じる旋回流れは、オリフィス、エルボ、分岐等の組み合わせにより生じる流路の捻じれに起因する3次元性の強い流れである。配管ネットワーク解析では、配管流れを1次元流れに近似するため、3次元性の強い旋回流れを評価することは難しい。

### 1.2.2 大規模並列計算

並列計算では、演算処理をいくつかの独立した小さな処理に細分化し、複数のプロセッサ上でそれぞれの処理を同時に実行させることで、単位時間あたりの処理効率を向上させ演算処理を高速化する。近年の計算機の演算処理の高速化は、プロセッサ単体の処理速度の高速化よりも、並列計算におけるプロセッサ数の増大による寄与が大きく、流れ解析、構造解析を対象として並列計算により演算処理を高速化するための専用のソフトウェアが開発されている[15], [16], [17]。大規模な体系を対象とした流れ解析に並列計算を適用した取り組みとして、船体周りのLES(Large Eddy Simulation)解析に適用した事例[18]、車体回りの流体・構造振動・音響連成解析に適用した事例[19]、蛇行運動する自動車周りの流れ解析に適用した事例[20]がある。いずれの事例においても、数千程度のプロセッサを用いた並列計算により大規模な体系での流れ解析を高速化している。本アプローチでは、スパコン等の多数のプロセッサを保有する並列計算専用の計算機を使用することが要求され、プラントの設計、運転・保守の検討において、並列計算専用の計算機が使用できない場合は、適用が難しいという課題がある。

### 1.2.3 機械学習

画像認識が人間の認識を超え、将棋や囲碁で計算機が人を上回るなど、ニューラルネットワークをはじめとする機械学習の技術が注目されており、機械学習を流れ解析、構造解析等の偏微分方程式の数値解析に活用することが期待されている。数値解析では、熱流体、構造、伝熱などの物理現象を予測するための数理モデルを定式化しモデル化するのに対して、機械学習では、汎用的なモデルに対して教師データからモデルパラメータを適合してモデル化する。数値解析、機械学習ともに、モデルを用いて現象を数値的に解いて解析対象の挙動を予測するというアプローチは同じである。数値解析と機械学習で異なる点はモデル化のアプローチであり、数値解析では、人が数理モデルを定式化しモデル化するという演繹的なアプローチをとるのに対して、機械学習では、教師データからモデル化するというデータ駆動型の帰納的なアプローチをとる[21]。機械学習では、教師データからモデルを学習させることに時間がかかるものの、学習が完了すれば、未知の入力条件に対する解析対象の挙動を短時間に予測できる。機械学習を流れ解析に適用した取り組みとして、畳み込みニューラルネットワークを用いて3次元定常流れ解析に適用した事例[22]、円柱回りの2次元非定常流れ解析に適用した事例[23]がある。機械学習は流れ解析を高速化するための有効なアプローチであるが、機械学習により構築したモデルでは、入力に対する出力がブラックボックス化し、なぜそのような結果になったかという説明可能性が失われるという課題がある。

### 1.2.4 縮約モデル

本アプローチは、数値解析にて計算される高次元の未知数に対して、縮約モデル(Reduced Orders Model : ROM)で近似して未知数を減らして低次元化し、計算時間を短縮する手法であり、モデル縮約法(Model Orders Reduction : MOR)とも呼ばれる。モデル縮約法は、制御の分野において、制御対象であるシステムの特性を記述する状態方程式を対象として、入出力の関係を保持しつつ状態方程式を簡略化することで、システムの特性を明確化することを目的として開発された手法である[24]。その後、構造解析[25], [26], [27]、電磁界解析[28], [29], [30], [31], [32]、流れ解析等の数値解析の分野に適用が広がった。

モデル縮約法は表1. 1に示すように大きく2種類に大別される。一つは、数値解析の基礎式である偏微分方程式を離散化した方程式を対象として、直接的に縮約した方程式を導出する

手法であり、PVL(Padé via Lanczos)[33], [34], PRIMA(Passive Reduced Interconnect Macromodeling Algorithm)[35]が代表的な手法である(表1. 1 No.1)。PVLでは離散化方程式をラプラス変換し、離散化方程式の伝達関数を低次元化した後、Padé近似[36]により低次元化した伝達関数を有理多項式で近似する。PVLを電磁界解析に適用した事例では、離散化方程式の伝達関数を低次元化、Padé近似した有理多項式から、数値解析でモデル化した電気機器の等価回路を導出している[31], [32]。導出した等価回路を外部回路に接続し、1.2.1項で述べたアプローチと同様にして電気回路のネットワーク解析により等価回路の時間応答を短時間に計算可能であり、電気機器の設計検討等に活用できる。しかし、これらの手法は適用が線形問題に限られており、非線形問題への適用が困難という課題がある。一方、モデル縮約法のもう一つの手法は、数値解析の計算結果から基底空間を構築し、基底空間上に数値解析の基礎式を写像して縮約した方程式を導出する手法である(表1. 1 No.2-1～No.2-4)。この手法は非線形問題に適用可能であり、構造解析[25], [27]、電磁界解析[28], [29], [30], [32]、流れ解析等の数値解析の分野に幅広く利用されている。次節では、本手法を流れ解析に適用した事例を説明する。

表 1. 1 縮約モデル構築手法

No.	分類		手法	適用対象	備考
1	偏微分方程式の離散式を直接縮約		PVL, PRIMA	・線形問題	
2-1	数値解析の計算結果から基底空間を抽出し、基礎式を写像し縮約	基底空間抽出手法	固有直交分解法	・非線形問題	・正規直交関係
2-2			Balanced POD	・線形問題	・流れの制御に使用
2-3			動的モード分解法	・非線形問題	・空間と時間情報を独立して抽出
2-4		基礎式写像手法	Galerkin 射影	・非線形問題	

### 1.3 縮約モデルの流れ解析への適用

本節では、縮約モデルの流れ解析への適用に関するこれまでの研究を述べる。流れ解析の基礎式は非線形であるため、縮約モデルを導出するために、1.2.4項で述べた流れ解析の計算結果から基底空間を構築し、基底空間上に流れ解析の基礎式を写像する手法が用いられる。最初に流れ解析の計算結果から基底空間を構築する手法について述べる。表1. 1 No.2-1～No.2-3に示すように、基底空間の構築手法としては固有直交分解法(Proper Orthogonal Decomposition:POD)、Balanced POD(Balanced Proper Orthogonal Decomposition)、動的モード分解法(Dynamic Mode Decomposition:DMD)が代表的な手法である[37]。固有直交分解法は、与えられた高次元データに対する平均二乗の最適化に基づいて基底空間を構築する手法であり、固有直交分解法の入力となる高次元データとしては、流れ解析の計算結果のほかにPIV(Particle Image Velocimetry)等の計測データも対象となる。流体力学の分野では、最初にLumleyが乱流の流れの構造抽出に固有直交分解法を活用してから[38]、様々な問題に適用されている。乱流の流れの構造抽出に適用した事例として、平行平板間の乱流チャンネル流れに適用した事例[39]、平板上の3次元境界層流れの適用した事例[40], [41]、噴流に適用した事例[42], [43]がある。また、熱対流の渦構造の抽出[44]、遷音速の噴流から生じる音の予測[45], [46], [47]、乱流モデルの構築[48], [49]に適用した事例も報告されている。固有直交分解法は、計測データに欠損部分や間違いがあった場合に、データの復元、修正に利用することが可能であり[50]、オープンキャビティ流れのPIV計測データの修復に適用した事例がある[51]。

Balanced PODは、縮約モデルの流れの制御[52]に活用することを目的として、固有直交分解法をベースとして開発された手法である[53]。制御対象が入力値 $\bar{u}$ 、出力値 $\bar{v}$ 、状態変数 $\bar{w}$ として式(1.3.1)に示す状態方程式と、式(1.3.2)に示す出力方程式で記述されるとする。

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = A\bar{w} + B\bar{u} \quad (1.3.1)$$

$$\bar{v} = C\bar{w} \quad (1.3.1)$$

Balanced PODでは、入力値 $\bar{u}$ が全ての状態変数 $\bar{w}$ に影響を及ぼするという指標値(可制御性)と、全ての状態変数 $\bar{w}$ が出力値 $\bar{v}$ に反映するという指標値(可観測性)を用いて[54]、可制御性と可観測性がバランスよく成立する条件から基底空間を構築し、この基底空間上で縮約モ

デルを導く。Balanced PODは可制御性と可観測性を考慮して縮約モデルを導出するため、固有直交分解法をベースとした縮約モデルと比較して、流れの制御で用いるモデルをより低次元化できる。Balanced PODを使って導出した縮約モデルを流れの制御に適用した事例としては、平板上の2次元境界層流れ[55]、平行平板間の3次元流れ[56]、高迎角翼周りの2次元流れ[57]の制御に適用した事例がある。Balanced PODは線形方程式である状態方程式(式(1.3.1))をベースとしており、非線形問題への適用が困難という課題があるが、非線形問題へ拡張する手法も提案されている[58], [59]。

動的モード分解法は、与えられたデータの動的な情報や構造を捉えることを目的として開発された手法である[60]。数値解析の時間ステップ $k$ に対する計算結果を $z_k$ とする。 $z_k$ は、具体的には、数値解析で用いる計算格子点に対する流速場、圧力場等である。動的モード分解法では、時間ステップ $1\sim m$ に対する計算結果のデータセット $[z_1, \dots, z_m]$ に対して、計算結果の時間発展を式(1.3.3)に示す線形行列 $A$ で近似し、式(1.3.4)に示す条件から、 $r$ 次元の基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r)$ を構築する[61], [62]。

$$Z_1 \approx AZ_0 \quad (1.3.3)$$

$$\vec{\varphi}_i = \arg \min_{\vec{\varphi}_i} \|Z_1 - AZ_0\| \quad (1.3.4)$$

式(1.3.3)、式(1.3.4)において、 $Z_1 \equiv [z_2, \dots, z_m]$ ,  $Z_0 \equiv [z_1, \dots, z_{m-1}]$ である。また、 $A$ は基底空間 $\vec{\varphi}_i$ より計算される。固有直交分解法では、データの時間と空間の相関を同時に考慮して基底空間を抽出するため、各基底には時間と空間の情報が混在しており、独立に取り出すことが難しい。動的モード分解法は、データの時間発展に注目して基底空間を抽出することで、各基底に対して時間と空間の情報を独立に取り出すことが可能であり、基底の時間的な特性、周期性等を捉えることができる。動的モード分解法を流れ解析の計算結果に適用した事例としては、対向噴流[63]、有限厚さのプレート上の剥離流れ[64]、大気突入カプセル後流[65]の非定常流れに対する特徴構造の抽出に適用した事例がある。一方、動的モード分解法により構築される基底空間は正規直交関係を満足しないため、基底空間上に流れ解析の基礎式を写像する際に、基底の非直交性に起因する項が多数現れ、縮約モデルの導出が困難という課題がある。

次に、基底空間上に流れ解析の基礎式を写像する手法について述べる。基底空間上に流れ

解析の基礎式を写像する手法としては、表1.1 No.2-4に示すGalerkin射影が代表的な手法である[66], [67]。 $r$ 次元の基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r)$ 上で、流れ解析の基礎式を満足する物理量 $z$ を式(1.3.5)に示す基底 $\vec{\varphi}_i$ の線形結合で近似する。

$$z \approx \sum_{i=1}^r a_i \vec{\varphi}_i \quad (1.3.5)$$

式(1.3.5)中の $a_i$ は未知の結合係数である。Galerkin射影では、基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r)$ に射影した基礎式の残差がゼロとなる条件より式(1.3.5)中の $a_i$ に関する方程式を導き、縮約モデルを導出する。未知数 $a_i$ の数は $r$ であり、基底空間上で $a_i$ に関する小規模な方程式を解くことで短時間に流れ場を計算することができる[67]。Galerkin射影を非圧縮性流れ解析に適用した事例として、層流条件でのキャビティー流れ[68], [69]、2次元円柱回り流れ[70], [71], [72]、3次元円柱回り流れ[72], [73]、乱流条件でのキャビティー流れ[68], [74]、3次元円柱回り流れ[75]、車体回り流れ[76]の解析に適用した事例がある。また、Galerkin射影を圧縮性流れ解析に適用した事例として、非粘性条件での3次元翼列回り流れ[77]、層流条件でのキャビティー流れ[78], [79]、乱流条件でのキャビティー流れ[80]、2次元翼列回り流れ[81]の解析に適用した事例がある。

## 1.4 本研究の目的

本研究では、以上を踏まえて、以下を研究の目的とする。

- ・ 配管系を対象とした3次元流体解析の計算時間を短縮する。
- ・ 計算時間を短縮するために、固有直交分解法とGalerkin射影に基づく縮約モデルを配管系流れ解析に適用して、流れ場を短時間に計算する手法を提案する。

以下では、図1.2を用いて提案手法の概要を説明する。なお、本研究では、非圧縮性流れを対象とする。

図1.2に示すStep1において、配管系の形状情報、プラント運転条件を入力として、3次元流体解析により配管内部の高次元の流れ場を算出する。

次に図1.2に示すStep2において、高次元の流れ場に対して固有直交分解法を適用し、低次元の基底空間を抽出する。3次元流体解析の流れ場のサイズを $n$ とすると、固有直交分解法により、 $n$ 次元のデータから情報の欠落が最少となるように $r$ 次元の基底空間 $\varphi_i (i = 1, \dots, r)$ が抽出される。 $n$ が $10^5 \sim 10^7$ のオーダーである場合、 $r$ は $n$ よりも十分小さい値( $10^1 \sim 10^2$ 程度)となる。

次に図1.2に示すStep3において、Step2で抽出した基底空間に流体の基礎式を射影して流れ場を計算する。以下では基底空間における流れ場の計算方法を説明する。3次元流体解析の基礎式であるNS(Navier-Stokes)方程式、連続の式を満足する流れ場の物理量 $z^*$ を平均成分 $\bar{z}$ と変動成分 $z$ に分解する。

$$z^*(\xi, \vec{x}) = \bar{z}(\vec{x}) + z(\xi, \vec{x}) \quad (1.4.1)$$

ここで、 $\vec{x}$ は座標値、 $z^*$ は具体的には流速 $\vec{u}^*$ 、圧力 $p^*$ 、あるいは渦粘性係数 $\nu_t^*$ であり、 $\bar{z}$ は $z^*$ を $\xi$ に対して平均した値である。また、 $\xi$ は流れの計算条件を定めるパラメータと時間 $t$ から構成される。本研究ではこのパラメータとしてレイノルズ数( $Re$ )を対象とする。このとき、式(1.4.1)は式(1.4.2)のように表される。

$$z^*(Re, t, \vec{x}) = \bar{z}(\vec{x}) + z(Re, t, \vec{x}) \quad (1.4.2)$$

対象とする流れ場が定常流れである場合は、 $\xi$ は $Re$ のみから構成され、式(1.4.1)は式(1.4.3)のように表される。

$$z^*(Re, \vec{x}) = \bar{z}(\vec{x}) + z(Re, \vec{x}) \quad (1.4.3)$$

ここで、変動成分 $z$ がStep2で求めた基底 $\vec{\varphi}_i$ の線形結合で表されると仮定する。

$$z(Re, t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^r a_i(Re, t) \vec{\varphi}_i \quad (1.4.4)$$

式(1.4.4)中の $a_i$ は未知の結合係数である。1.3節で述べたように、Galerkin射影では、基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r)$ に射影したNS方程式と連続の式の残差がゼロとなる条件より式(1.4.4)中の $a_i$ に関する方程式を導き、縮約モデルを導出する。3次元流体解析では直接NS方程式と連続の式を解く必要があるが、基底空間上では $a_i$ に関する小規模な方程式を解くことで流れ場を計算することができる。上で述べたようにNS方程式と連続の式[71]において解くべき未知数のオーダーは $10^5 \sim 10^7$ であるのに対して、 $a_i$ の数は $r$ と同様に $n$ よりも十分小さい値であり、短時間に流れ場を計算することが可能である。

提案手法では、流れの計算条件はプラント運転条件として入力され、 $Re$ をパラメータとしてプラント運転条件が定まる。Step2において基底空間を抽出した後は、 $Re$ の異なるプラント運転条件に対して3次元流体解析を適用する必要はなく、代わりにStep3において、基底空間上で結合係数 $a_i$ を計算し直すことにより流れ場を算出する。

Step2において、固有直交分解法を用いて抽出した基底空間は数学的な手法により導出される空間関数であり、各基底に対して基底が保有する流れの構造等の物理的意味を理解することが難しい[67]。そこで本研究では、Step2で抽出した流速基底を対象として、機械学習を用いて各基底が保有する流れ場の情報から旋回流れの渦中心位置を抽出し、旋回流れの構造を可視化する。

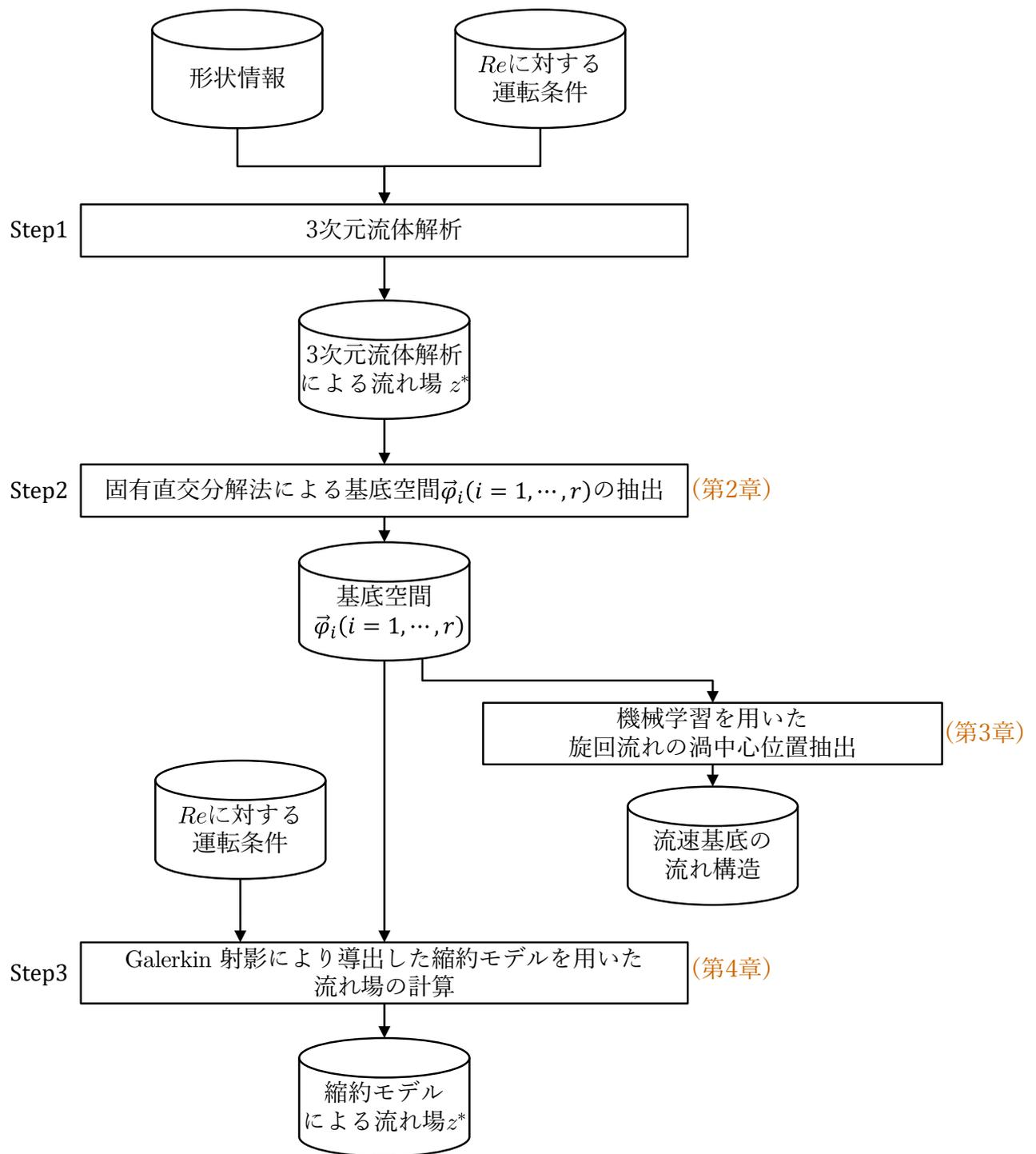


図 1. 2 配管系流れ解析手法

## 1.5 本論文の構成

本論文は本章を含めて全5章から構成される。

1章は本章である。

2章では、図1. 2中のStep2に示す固有直交分解法に基づく配管系流れ解析に対する基底空間構築手法を提案する。次に、配管系流れ解析に対する固有直交分解法の適用の効果を検証するために、模擬配管系を対象として、定常流れとなる条件と非定常流れとなる条件において複数の流量条件に対して固有直交分解法を適用して基底空間を抽出し、基底空間を用いた流れ場の近似精度について検討する。

3章では、図1. 2中のStep2に示す機械学習を用いて流れ解析結果から旋回流れの渦中心位置を抽出する手法を提案し、流速基底の流れ構造を可視化する。次に、提案手法の妥当性を検証するために、模擬配管系を対象として、固有直交分解法を用いて抽出した流速空間に渦中心位置抽出手法を適用し、各基底が保有する流れの構造と配管系内の旋回流れの関係について考察する。

4章では、図1. 2中のStep3に示す基底空間上でのGalerkin射影による配管系流れ解析に対する縮約モデル構築手法を提案する。次に、乱流条件でのキャビティ流れと配管系流れ解析にGalerkin射影に基づく縮約モデルを適用し、縮約モデルを用いた流れ解析の計算精度、計算時間短縮の効果を検討した結果について述べる。

最後に5章では、本研究で提案した手法について、適用結果を元に得られる結論と今後の展望について述べる。

## 第 2 章

# 固有直交分解法を用いた配管系流れ解析に対する基底空間構築手法の開発

### 2.1 緒言

本章では、固有直交分解法に基づく配管系流れ解析に対する基底空間構築手法を提案し、構築した基底空間を用いた流れ場の近似精度について検討した結果について述べる。固有直交分解法は、流体力学の様々な分野に適用されている[39]～[50]。配管系流れへの固有直交分解法の適用例として、配管系流れの計測データに適用し層流から乱流への遷移現象を分析した例[82]、エルボを含む配管系の DNS(Direct Numerical Simulation)解析結果に適用しエルボで発生する旋回流れの構造を分析した例[83]がある。これらの研究では配管系流れの遷移現象、流れの構造を分析することを目的に固有直交分解法を適用しており、配管系を対象とした 3 次元流体解析の計算時間の短縮を目的に適用した例は見当たらない。プラントの配管系は様々な流量条件で用いられるため、本研究では、複数の流量条件に対する解析結果から基底空間を抽出し、流量条件すなわちレイノルズ数の異なる流れ場に対して近似精度を評価する。計算時間短縮を目的として固有直交分解法を適用した従来の研究として、キャビティ流れに適用した例[68]では、流量条件が固定されており、円柱回り流れに対して複数の流量条件を適用した例[69]も報告されているが、対象とする流れは層流に限定されている。配管系流れを対象に複数の流量条件に対して固有直交分解法を適用する試みは、本論文が初めてである。以降 2.2 節では提案手法で用いる基底空間構築手法について述べる。2.3 節では、配管系流れ解析の精度検証を目的として、直管を対象として 3 次元流体解析を実施し、得られた解析結果を実験結果と比較した。次に、2.4 節、2.5 節、2.6 節では、配管系流れ解析に対する固有直交分解法の効果を検証するために、直管、エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、配管系流れが定常流、非定常流れ、周期的な流れとなる体系を対象に複数の流量条件に対して固有直交分解法を適用して基底空間を抽出し、基底空間を用いた流れ場の近似精度について検討した。さらに、2.7 節では、エルボ、分岐、オリフィス、弁を含む実配管

系を対象として、3次元流体解析より得られた非定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出し、基底空間を用いた流れ場の近似精度について検討した。

## 2.2 基底空間構築手法

本節では、基底 $\vec{\varphi}_i$ の計算方法について述べる[67]。3次元流体解析により算出される物理データ $y^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ を式(2.2.1)に示すように平均成分 $\bar{y}(\vec{x}_\gamma)$ と変動成分 $y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ に分解する。

$$y^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{y}(\vec{x}_\gamma) + y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \quad (2.2.1)$$

式(2.2.1)において、 $Re_\alpha (\alpha = 1, \dots, l)$ は計算条件 $\alpha$ に対するレイノルズ数、 $t_\beta (\beta = 1, \dots, m)$ は時間ステップ $\beta$ における時刻、 $\vec{x}_\gamma (\gamma = 1, \dots, n)$ は3次元流体解析で用いる計算格子 $\gamma$ の座標値である。変動成分 $y$ を固有直交分解の対象とすると、 $y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ はレイノルズ数の数が $l$ 、時間方向のサンプリング数が $m$ 、計算点数が $n$ となるデータである。ここで、 $y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ に対して、式(2.2.2)に示すように、レイノルズ数 $Re_\alpha$ 、時刻 $t_\beta$ を固定し、座標値 $\vec{x}_\gamma$ に対する物理データを成分とするベクトル $\vec{y}_{\alpha\beta}$ を定義する。

$$\vec{y}_{\alpha\beta} \equiv \begin{bmatrix} y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_1) \\ \vdots \\ y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \\ \vdots \\ y(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (2.2.2)$$

また、式(2.2.3)に示すように、 $\vec{y}_{\alpha\beta}$ を列ベクトルとする行列 $Y$ を定義する。

$$Y \equiv [\vec{y}_{11} \dots \vec{y}_{1m} \ \vec{y}_{21} \dots \vec{y}_{2m} \ \dots \ \vec{y}_{l1} \dots \vec{y}_{lm}] \in \mathbb{R}^{n \times (m \times l)} \quad (2.2.3)$$

$\vec{y}_{\alpha\beta}$ に対して、式(2.2.4)と式(2.2.5)に示す $r$ 次元の基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r)$ を定める。

$$\vec{\varphi}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, r \quad (2.2.4)$$

$$\|\vec{\varphi}_i\| = \sqrt{\langle \vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_i \rangle} = 1 \quad (2.2.5)$$

式(2.2.5)において、右辺の $\langle \rangle$ は式(2.2.6)で定義される内積である。

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T W \vec{b} = \sum_{\gamma=1}^n a_\gamma w_{\gamma\gamma} b_\gamma \quad (2.2.6)$$

式(2.2.6)中の $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は、3次元流体解析で用いる計算格子 $\gamma$ の体積を対角成分 $w_{\gamma\gamma}$ とする対角行列である。 $\vec{\varphi}_i$ は図2. 1に示すように、 $\vec{y}_{\alpha\beta}$ と $\vec{y}_{\alpha\beta}$ の $\vec{\varphi}_i$ への射影 $P[\vec{y}_{\alpha\beta}]$ の差異が最小となる条件より算出する。ここで、 $\vec{y}_{\alpha\beta}$ の $\vec{\varphi}_i$ への射影 $P[\vec{y}_{\alpha\beta}]$ は式(2.2.7)で表される。

$$P[\vec{y}_{\alpha\beta}] = \langle \vec{\varphi}_i, \vec{y}_{\alpha\beta} \rangle \vec{\varphi}_i = [\vec{\varphi}_i^T W \vec{y}_{\alpha\beta}] \vec{\varphi}_i \quad (2.2.7)$$

上で述べた $\vec{\varphi}_i$ の算出条件は、式(2.2.8)と式(2.2.9)で定義される最大化問題の解として求めることと等価である。

$$\vec{\varphi}_i = \arg \max_{\vec{\varphi}_i} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^m \langle \vec{\varphi}_i, \vec{y}_{\alpha\beta} \rangle^2 = \arg \max_{\vec{\varphi}_i} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^m \left[ \vec{\varphi}_i^T W \vec{y}_{\alpha\beta} \right]^2 \quad (2.2.8)$$

$$\langle \vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_i \rangle = \vec{\varphi}_i^T W \vec{\varphi}_i = 1 \quad (2.2.9)$$

式(2.2.3)を式(2.2.8)に代入して、

$$\vec{\varphi}_i = \arg \max_{\vec{\varphi}_i} \vec{\varphi}_i^T W R \vec{\varphi}_i \quad (2.2.10)$$

式(2.2.10)中のRは式(2.2.11)で定義されるYに対する重み付き共分散行列である。

$$R \equiv Y Y^T W \quad (2.2.11)$$

付録Aに示すように、式(2.2.10)と式(2.2.9)の最大化問題の解 $\vec{\varphi}_i$ は、式(2.2.12)に示す共分散行列Rの固有ベクトルと固有値 $\lambda_i$ を求めることで得られる。

$$R \vec{\varphi}_i = \lambda_i \vec{\varphi}_i \quad (2.2.12)$$

式(2.2.12)のRはサイズ $n \times n$ の密行列である。1.4節で述べたように $n$ は $10^5 \sim 10^7$ のオーダーとなる状況が想定されるため、 $\vec{\varphi}_i$ を計算するためにサイズ $10^5 \sim 10^7$ の密行列に対する固有値問題を解くこととなり、計算に莫大な時間が必要となる。本研究では、この課題の解決にSnapshot PODを適用する[84]。Snapshot PODでは、付録Bに示すように、式(2.2.12)の代わりに、式(2.2.13)の固有値問題を解き、式(2.2.14)より $\vec{\varphi}_i$ を計算する。

$$Y^T W Y \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (2.2.13)$$

$$\vec{\varphi}_i = Y \vec{v}_i / \sqrt{\lambda_i} \quad (2.2.14)$$

式(2.2.13)中の $Y^T W Y$ はサイズ $(m \times l) \times (m \times l)$ の密行列である。ここで $m$ は $y$ の時間方向のサンプリング数、 $l$ はレイノルズ数の計算条件数であり、それぞれ $10^1 \sim 10^2$ ,  $10^1$ のオーダーである。従って、 $Y^T W Y$ のサイズは $10^2 \sim 10^3$ のオーダーとなり、少ない計算負荷で $\vec{\varphi}_i$ を計算できる。

式(2.2.7)より、 $\vec{y}_{\alpha\beta}$ の基底 $\vec{\varphi}_i$ への射影成分の二乗和 $q$ は式(2.2.15)で表される。

$$q = \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^m [\vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{y}_{\alpha\beta}]^2 = \vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \mathbf{R} \vec{\varphi}_i \quad (2.2.15)$$

式(2.2.9)、式(2.2.12)を式(2.2.15)に代入して変形すると、以下の関係式を得る。

$$q = \vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \mathbf{R} \vec{\varphi}_i = \lambda_i \quad (2.2.16)$$

式(2.2.16)より $\vec{y}_{\alpha\beta}$ の基底 $\vec{\varphi}_i$ への射影成分の二乗和 $q$ は固有値 $\lambda_i$ に等しい。 $\vec{y}_{\alpha\beta}$ を流速とすると、式(2.2.16)は流速の基底方向への射影成分に対するエネルギーの総和とみなすことができる。Rの固有ベクトルを固有値の大きい順に並べ替えたものとする、式(2.2.17)は1から $r$ までの基底 $\vec{\varphi}_i$ で定義される基底空間が流れ場のエネルギーをどれほど捉えているかを示す。

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^m [\vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{y}_{\alpha\beta}]^2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \quad (2.2.17)$$

基底空間に射影した流れ場のエネルギーがもともとの流れ場のエネルギーに等しいならば、流れ場のエネルギーを欠落することなく基底空間を抽出できていると考えられるため、式(2.2.18)の関係を満足するように基底数 $r$ を決定する。ここで $r_{max}$ は用いる基底数の最大値( $r_{max} = m \times l - 1$ )、 $eps$ はしきい値である。

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^{r_{max}} \lambda_i} < eps \quad (2.2.18)$$

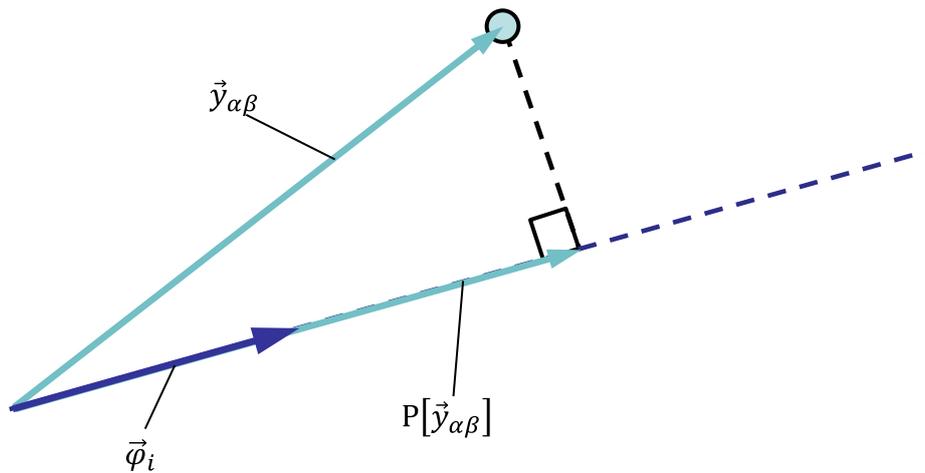


図 2.1 ベクトル $\vec{y}_{\alpha\beta}$ の基底 $\vec{\varphi}_i$ への射影 $P[\vec{y}_{\alpha\beta}]$

## 2.3 直管流れを対象とした3次元流体解析の精度検証

配管系流れ解析の精度検証を目的として、直管を対象として3次元流体解析を実施し、得られた解析結果を実験結果[85]と比較した。解析対象を図2. 2に示す。直管の配管口径 $D$ は0.1545[m]であり、長さは61.5 $D$ である。流速境界条件として、流入境界面に直管旋回流れの実験結果[85]に基づく流速分布を与えた。また、計算には図2. 2に示す分割数576,000の計算格子を用い、レイノルズ数は実験結果と同じ条件である $10^5$ とした。本計算を含む2.3節～2.7節の計算において、3次元流体解析で用いた流体ソルバー、乱流モデル、壁面第一層の格子サイズ、管軸方向の格子サイズを表2. 1に示す。本計算を含む2.3節～2.6節の計算において、壁面第一層の格子サイズ $\Delta s$ と無次元化壁面距離 $y^+$ の比の平均値は $50 < \Delta s/y^+ < 420$ を満足し、壁面第一層の格子が概ね対数領域に含まれていることを確認している。

図2. 3に3次元流体解析結果の軸速度・旋回速度の半径方向分布を実験結果と比較した結果を示す。比較したのは、直管入口から16.2 $D$ 、50.0 $D$ 、58.9 $D$ 下流における軸速度・旋回速度の半径方向分布である。グラフ横軸の値は半径位置を配管半径で規格化したものであり、左端は配管中心、右端は配管壁面とである。また、グラフ縦軸の値は軸速度・旋回速度を軸平均速度で規格化している。図2. 3より、本計算は実験値と良好に一致し、計算結果が妥当であることを確認した。

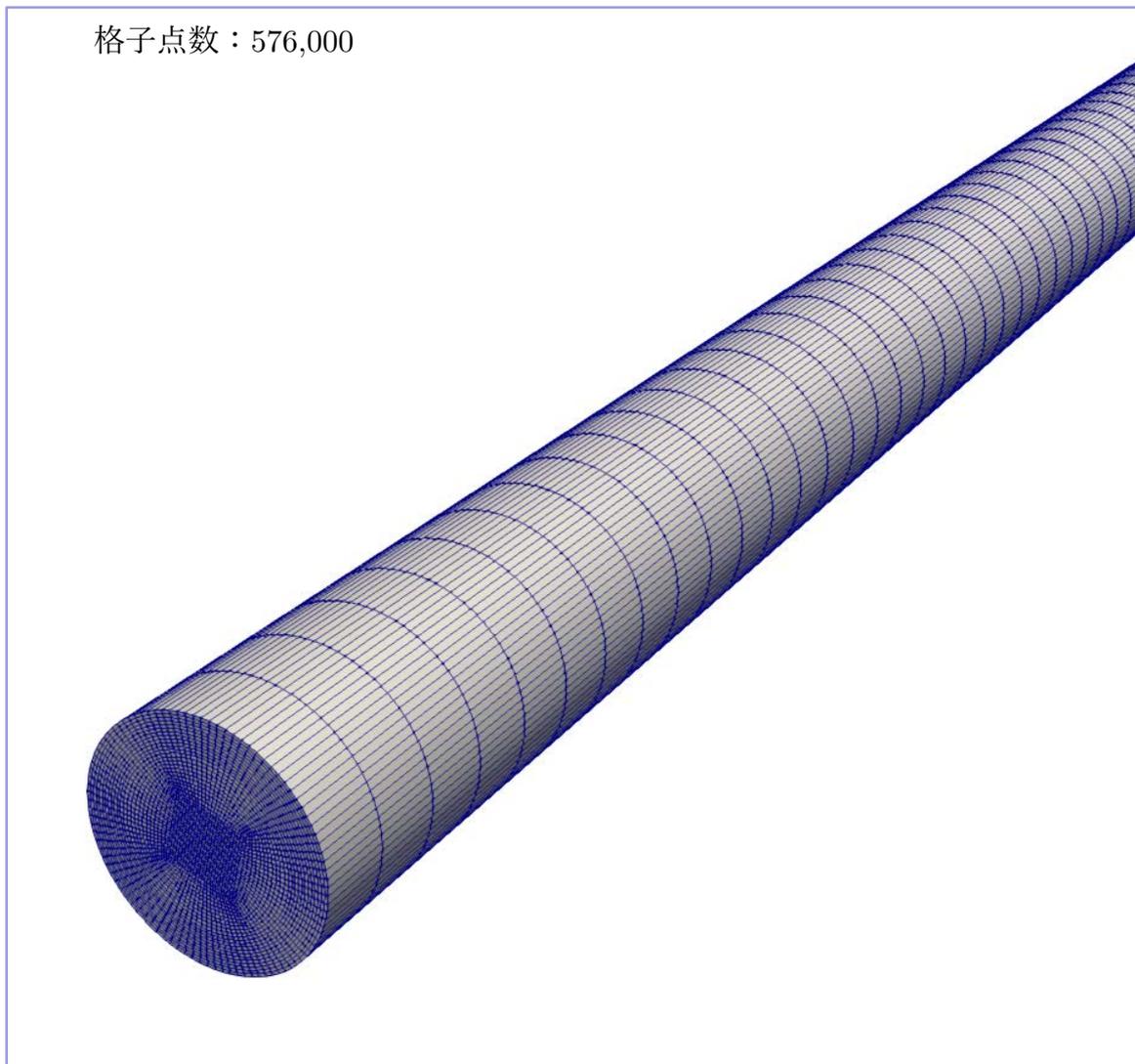
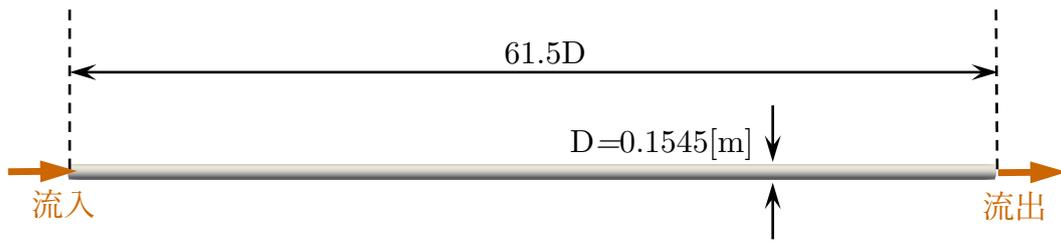
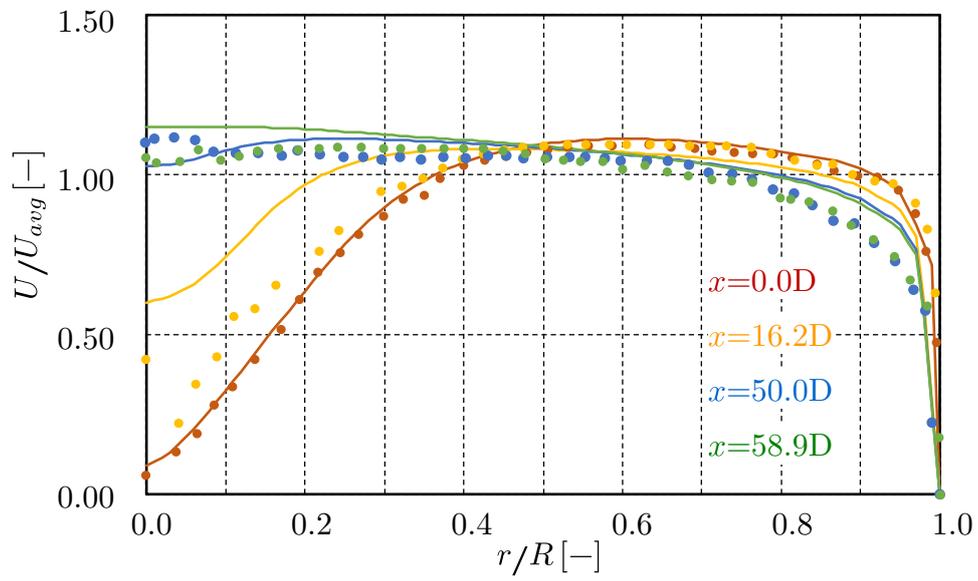
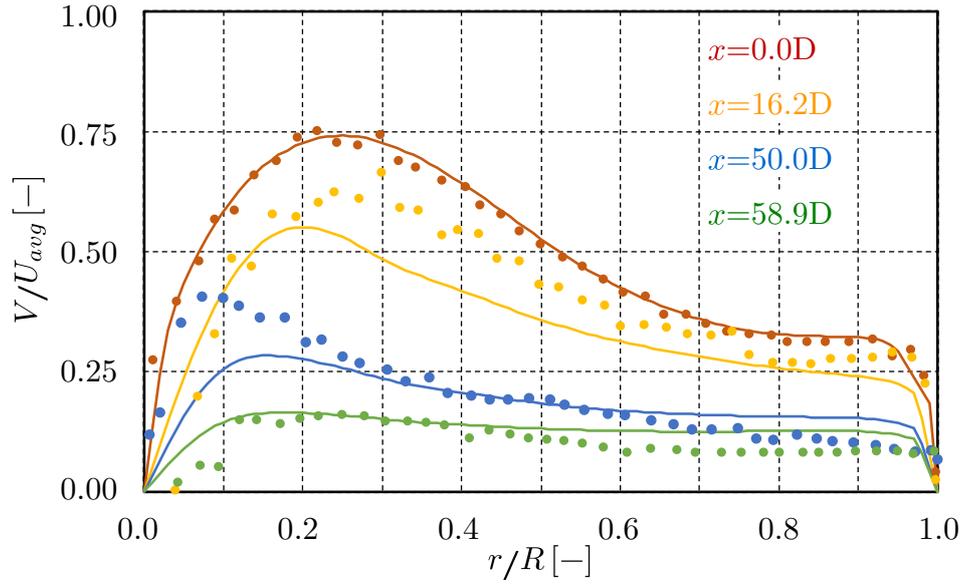


图 2.2 直管流れ解析対象

表 2.1 3次元流体解析の計算条件

節	流体 ソルバー	乱流モデル	壁面第一層の 格子サイズ [mm]	管軸方向 格子サイズ [mm]
2.3	OpenFOAM	ssg	1	50
2.4		k- $\epsilon$		
2.5			100	
2.6				
2.7		2	20~100	



$U$  : 軸速度[m/s]  
 $V$  : 旋回速度[m/s]  
 $U_{avg}$  : 軸平均速度[m/s]  
 $r$  : 半径方向位置[m]  
 $x$  : 軸方向位置[m]  
 $R$  : 配管半径[m]

○実験結果    — 計算結果

図 2.3 直管流れ解析結果

## 2.4 模擬配管定常流れへの固有直交分解法の適用

### 2.4.1 計算条件

配管内旋回流れ解析に対する固有直交分解法の効果を検証するために、直管、エルボを含む模擬配管系を対象として、配管内流れが定常流れとなる体系において3次元流体解析を実施し、得られた解析結果に対して固有直交分解法を適用した。解析対象を図2.4に示す。模擬配管システムの配管口径 $D$ は0.5[m]であり、曲率半径が $1D$ である二つのエルボを間隔 $2D$ で接続し、上流側に長さ $10D$ の直管、下流側に長さ $25D$ の直管を配置した。また、計算には図2.4に示す分割数836,000の計算格子を用いた。

本計算では、定格負荷でのプラント運転条件に対する配管流量を100%として、プラントを最低負荷から定格負荷の範囲で運転する際に、配管流量が25%~100%の範囲で変化すると想定し、流入流量に関して表2.2に示す9通りの条件(No.1~No.9)を考慮した。最低負荷に対する流量がNo.2、定格負荷に対する流量がNo.8である。それぞれの流入流量条件に対応する流入流速、レイノルズ数 $Re$ は表2.2に示す通りである。固有直交分解法を適用する際に、基底のとり方を2通り(Case1, Case2)検討した。Case1では最低負荷(No.2)と定格負荷(No.8)に対する流速より基底空間を抽出し、Case2では最低負荷(No.2)と定格負荷(No.8)に加えて、中間負荷(No.4, 6)に対する流速より基底空間を抽出した。固有直交分解法の適用対象である3次元流体解析の流速の計算点数 $n$ と時間方向のサンプリング数 $m$ は、Case1, Case2ともに $n = 836,000 \times 3 = 2.51 \times 10^6$ ,  $m = 1$ (定常流れ)であり、レイノルズ数の数 $l$ は、Case1では $l = 2$ 、Case2では $l = 4$ である。また、2.2節で述べたように、基底数の最大値 $r_{max}$ は $m \times l - 1$ となるため、Case1では $r_{max} = 1$ 、Case2では $r_{max} = 3$ となる。

### 2.4.2 適用結果

3次元流体解析結果より、模擬配管系内の流線を可視化した結果を図2.5に示す。流線の色は流速の絶対値を表している。エルボでの流路の曲がりの影響でエルボ下流の直管にて旋回流れが発生する結果となった。

3次元流体解析の流速 $\vec{u}^*(Re, \vec{x})$ に対して、式(2.4.1)に示すように、固有直交分解により抽出した $r$ 次元の基底空間を用いて、流速の $Re$ に対する変動成分を基底の線形結合で近似する。

$$\vec{u}^*(Re, \vec{x}) \approx \vec{u}_{POD}(Re, \vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + \sum_{i=1}^r a_i(Re) \vec{\varphi}_i(\vec{x}) \quad (2.4.1)$$

式(2.4.1)中の $\vec{u}(\vec{x})$ は流速を $Re$ に対して平均した値である。また、式(2.4.1)中の結合係数 $a_i(Re)$ は、基底が式(2.4.2)に示す正規直交条件を満足するように、式(2.4.3)を用いて計算した。

$$\langle \vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_j \rangle = \vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_j = \delta_{ij} \quad (2.4.2)$$

$$a_i(Re) = \langle \vec{\varphi}_i, \vec{u}^*(Re, \vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}) \rangle \quad (2.4.3)$$

式(2.4.2)の $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。Case1, Case2に対して、3次元流体解析の流速と式(2.4.1)による近似流速の誤差 $E(Re)$ を評価した結果を図2.6に示す。ここで、 $E(Re)$ は式(2.4.4)より算出した。

$$E(Re) \equiv 100 \times \frac{\sqrt{\int \|\vec{u}_{POD}(Re, \vec{x}) - \vec{u}^*(Re, \vec{x})\|^2 dV}}{\sqrt{\int \|\vec{u}^*(Re, \vec{x})\|^2 dV}} \quad (2.4.4)$$

式(2.4.4)の右辺分子項は $\vec{u}^*(Re, \vec{x})$ と $\vec{u}_{POD}(Re, \vec{x})$ の差の絶対値 (L2ノルム) であり、右辺分母項は $\vec{u}^*(Re, \vec{x})$ の絶対値である。図2.6において、まず基底数 $r = 1$ のときの結果を検討する。No.3, 5, 7の条件ではCase1よりもCase2の方が誤差が小さく、No.1, 9の条件ではCase2よりもCase1の方が誤差が小さいことがわかる。これは、Case1ではNo.2, 8に対する流速から基底空間を抽出しているのに対して、Case2ではNo.2, 8に加えて中間領域のレイノルズ数であるNo. 4, 6に対する流速からも基底空間を抽出している。これにより、中間領域のレイノルズ数の条件 (No.3, 5, 7) で誤差が小さくなる一方で、基底空間が中間領域のレイノルズ数の流速の影響を受けているため、補外領域のレイノルズ数 (No.1, 9) では誤差が大きくなったと考える。また、基底数 $r = 1$ に対しては、Case1ではNo.2, 8の流速から、Case2ではNo.2, 4, 6, 8の流速から線形回帰にて基底空間を抽出していることから、Case2では中間領域のレイノルズ数条件で誤差が小さくなり、Case1では補外領域のレイノルズ数条件で誤差が小さくなったと考えられる。

次に、Case2に関して基底数 $r = 3$ とした結果を検討する。Case1, Case2の基底数 $r = 1$ に対する結果と比較して、全領域のレイノルズ数で誤差が小さくなった。レイノルズ数の数 $l = 4$ , 基底数 $r = 3$ の条件では、3次元流体解析の流速を誤差0.6[%]以下の精度で近似できること

を確認した。

本計算では、プラントを最低負荷から定格負荷の範囲で運転し、配管流量が25%~100%の範囲で変化すると想定し、Case1では、25%流量と100%流量に対するレイノルズ数より基底空間を抽出し、Case2では、25%、100%流量に加えて中間流量に対するレイノルズ数より基底空間を抽出した。定常流れでは、最小流量と最大流量に対するレイノルズ数を含んだ上で、中間流量に対するレイノルズ数の数を増やし、同時に基底数を増やすことで、基底空間による近似精度が改善すると考えられる。一般的にはレイノルズ数が増加すると、流れ場が複雑になり空間スケール幅が広がるため、基底空間による近似精度が低下する可能性があるが、本研究では、最大流量に対するレイノルズ数を常に含んだ条件で基底空間を抽出するため、レイノルズ数の数を増やしても近似精度は低下しないと考える。また、想定する流量範囲外のレイノルズ数 (No.1, 9) に対しても、誤差3.2[%]以下の精度で一致する結果が得られた。しかしながら、固有直交分解により基底空間を抽出する際には、適用対象である流速に、起こりうるすべての流れ現象が含まれる必要がある。中間領域、および補外領域で、流れの層流から乱流への遷移、突発的な剥離渦の発生等が生じる場合は近似精度が低下する可能性がある。特に補外領域では、このような現象が起こる可能性があるので注意が必要であると考えられる。

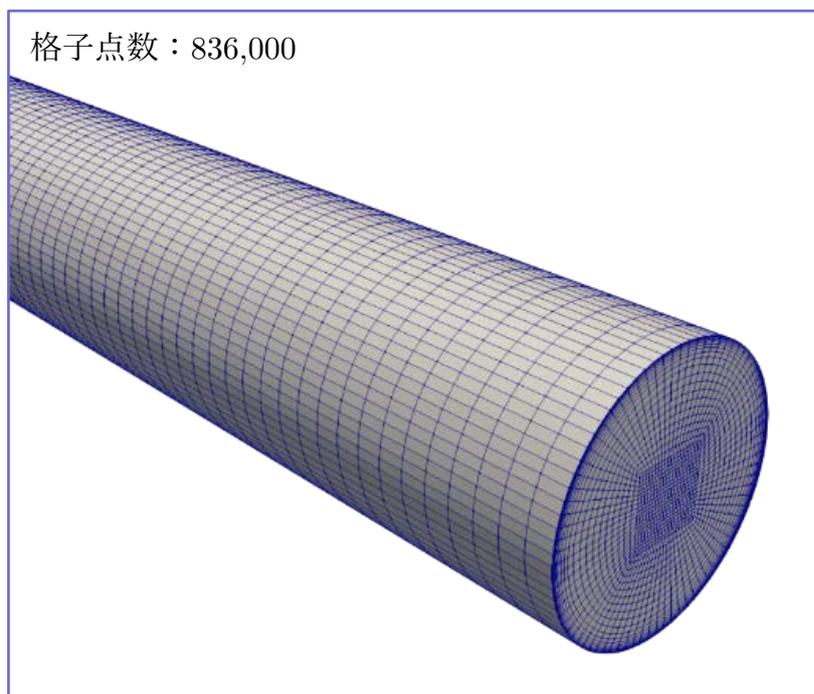
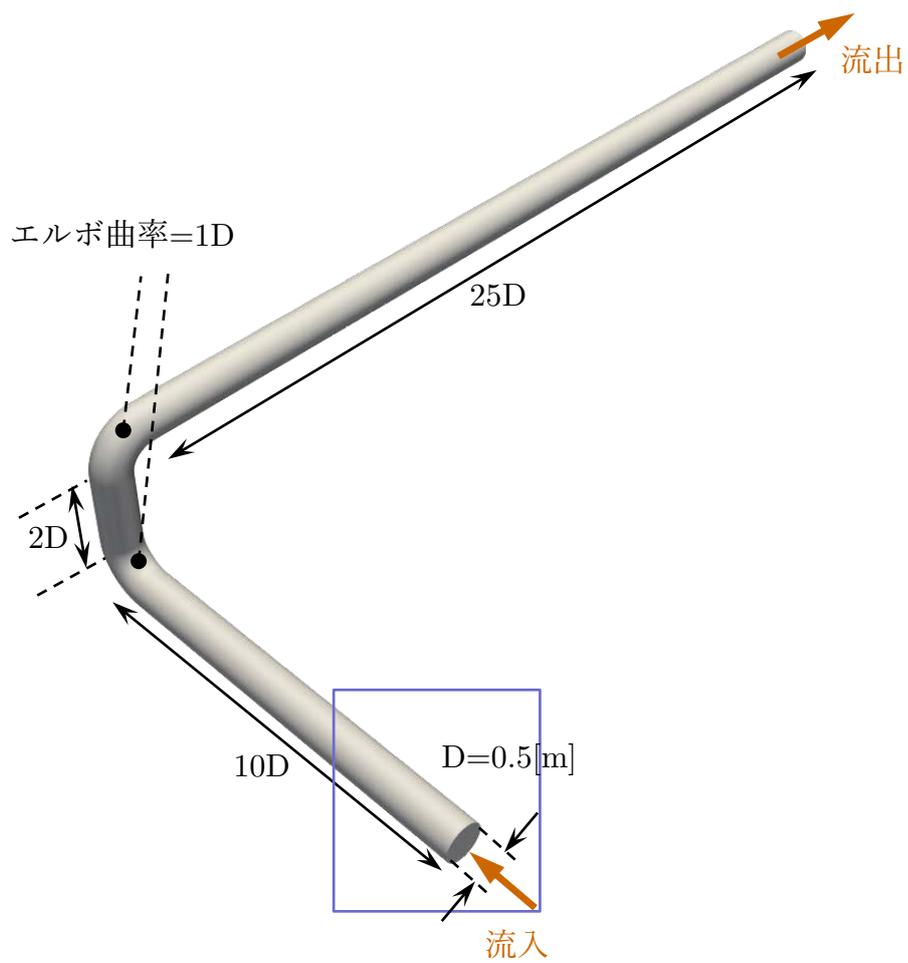


図 2.4 模擬配管定常流れ解析対象

表 2.2 模擬配管定常流れ流入流速条件

No.	流入流量 [m <sup>3</sup> /s]	流入流速 [m/s]	Re[-]	POD	
				Case1	Case2
1	$9.82 \times 10^{-2}$	0.5	$1.26 \times 10^6$	*	*
2	$1.96 \times 10^{-1}$	1.0	$2.51 \times 10^6$	Used	Used
3	$2.95 \times 10^{-1}$	1.5	$6.28 \times 10^6$	*	*
4	$3.93 \times 10^{-1}$	2.0	$5.03 \times 10^6$	*	Used
5	$4.91 \times 10^{-1}$	2.5	$6.28 \times 10^6$	*	*
6	$5.89 \times 10^{-1}$	3.0	$7.54 \times 10^6$	*	Used
7	$6.87 \times 10^{-1}$	3.5	$8.79 \times 10^6$	*	*
8	$7.85 \times 10^{-1}$	4.0	$10.1 \times 10^6$	Used	Used
9	$8.84 \times 10^{-1}$	4.5	$11.3 \times 10^6$	*	*

Used : 基底空間構築に使用

\* : 基底空間による近似流速の精度評価に使用

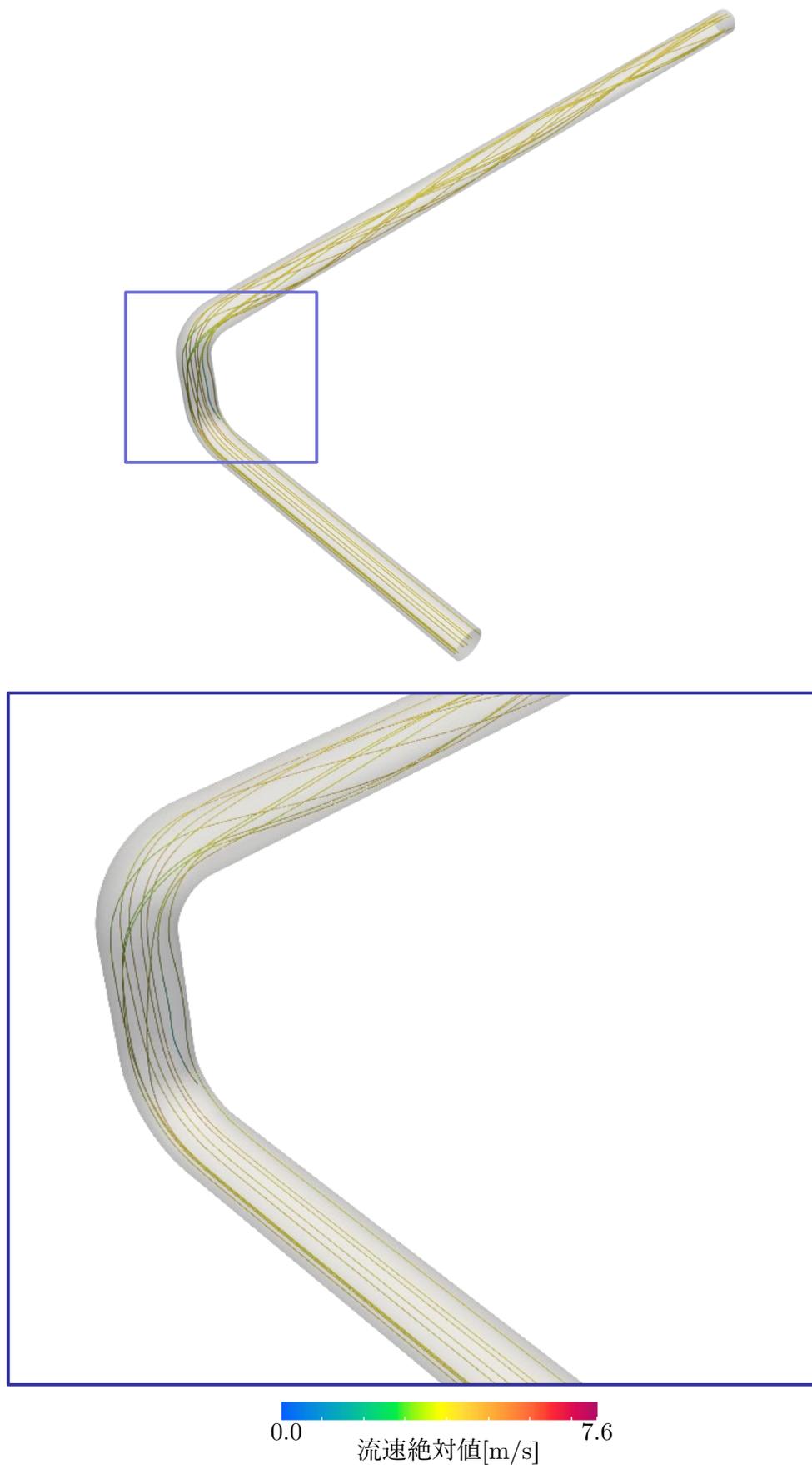


図 2.5 模擬配管定常流れ解析結果

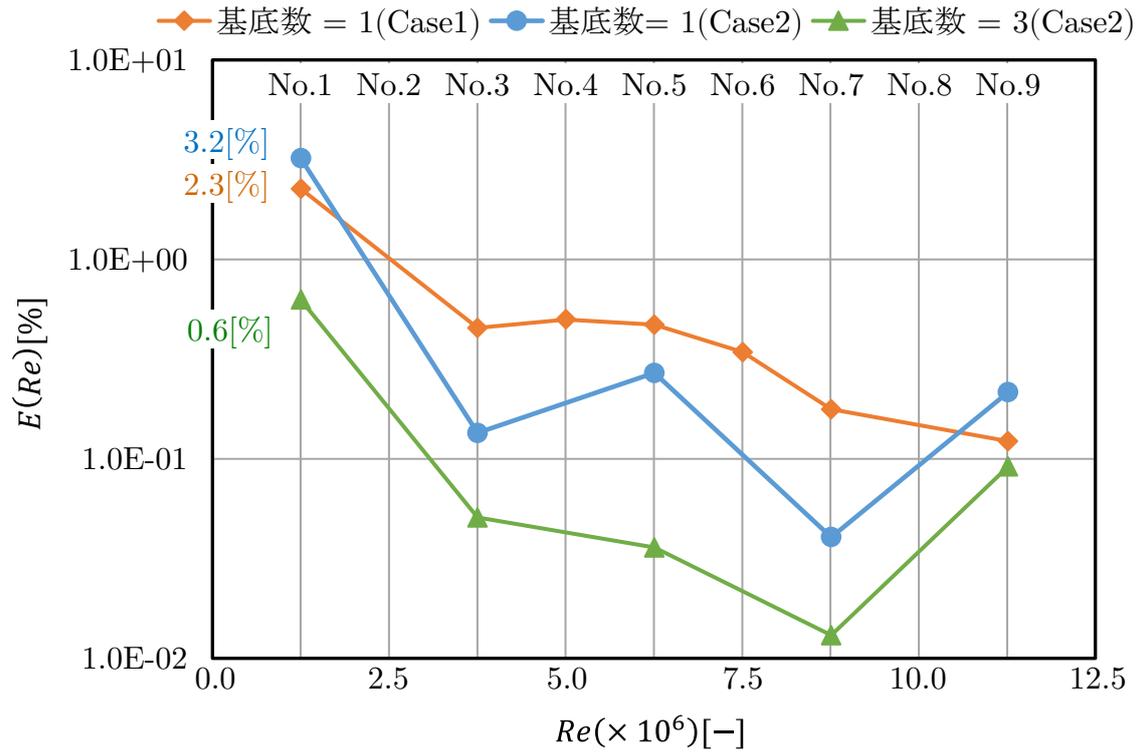


図 2.6 3次元流体解析流速と近似流速の誤差

## 2.5 模擬配管非定常流れへの固有直交分解法の適用(1)

### 2.5.1 計算条件

図2.7に示すエルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として3次元流体解析を実施し、得られた解析結果に対して固有直交分解法を適用した。模擬配管システムの配管口径 $D$ は0.5[m]であり、分岐と曲率半径が $1D$ であるエルボを間隔 $1D$ で接続し、上流側に長さ $10D$ の直管、下流側に長さ $25D$ の直管を配置した。エルボと接続していない分岐下流側の流路は閉止としている。また、計算には図2.7に示す分割数818,000の計算格子を用いた。

解析時間は10[s]として時系列データを出力し、流速の時系列データに対して固有直交分解法を適用した。本計算では、固有直交分解法の適用対象である流速の時間方向のサンプリング数 $m$ とレイノルズ数の数 $l$ が基底空間の近似精度に与える影響を検討するために表2.3、表2.4に示す条件で基底空間を抽出した。表2.3に示す6通りのケース(Case3~Case8)は、レイノルズ数を $Re = 10.1 \times 10^6$ に固定し、時間方向のサンプリング数 $m$ に関して6通りの条件で基底空間を抽出し、時間方向のサンプリング数 $m$ の影響を検討した。それぞれの $m$ に対するサンプリング時間間隔 $\Delta Ts$ は表2.3に示す通りである。次に、表2.4に示す2通りのケース(Case9, Case10)では、時間方向のサンプリング数を $m = 101$ ( $\Delta Ts = 0.1[s]$ )に固定し、レイノルズ数に関して9通りの条件(No.10~No.18)を検討した。Case9ではNo.11, 17に対する流速より基底空間を抽出し、Case10ではNo.11, 13, 15, 17に対する流速より基底空間を抽出し、レイノルズ数の数 $l$ の影響を検討したものである。Case3~Case10における計算点数 $n$ はいずれも $n = 818,000 \times 3 = 2.51 \times 10^6$ であり、各ケースでの基底数の上限値 $r_{max}$ は表2.3、表2.4に示す通りである。

### 2.5.2 適用結果

3次元流体解析結果より、時刻10[s]における模擬配管系内の流線を可視化した結果を図2.8に示す。流線の色は流速の絶対値を表している。分岐とエルボでの流路の曲がりの影響でエルボ下流の直管にて旋回流が発生している。定常流れに対する計算結果(図2.5)と比較すると、エルボと比較して、分岐では曲率ゼロで流路が曲がるためにより強い旋回流が発生した。エルボ出口から $5D$ 下流の配管断面において、配管中心軸からの距離 $r = 0D, 0.1D, 0.2D, 0.3D, 0.4D$ に対する流速絶対値の時間変化を図2.9に示す。旋回流の影響

により、流れは非定常流れとなった。

3次元流体解析の流速 $\vec{u}^*(Re, t, \vec{x})$ に対して、式(2.5.1)に示すように、固有直交分解により抽出した $r$ 次元の基底空間を用いて、流速の $Re$ と $t$ に対する変動成分を基底の線形結合で近似する。

$$\vec{u}^*(Re, t, \vec{x}) \approx \vec{u}_{POD}(Re, t, \vec{x}) = \vec{\bar{u}}(\vec{x}) + \sum_{i=1}^r a_i(Re, t) \vec{\varphi}_i(\vec{x}) \quad (2.5.1)$$

式(2.5.1)中の $\vec{\bar{u}}(\vec{x})$ は流速を $Re$ と $t$ に対して平均した値である。また、式(2.5.1)中の結合係数 $a_i(Re, t)$ は、基底が式(2.4.2)に示す正規直交条件を満足するように、式(2.5.2)を用いて計算した。

$$a_i(Re, t) = \langle \vec{\varphi}_i, \vec{u}^*(Re, t, \vec{x}) - \vec{\bar{u}}(\vec{x}) \rangle \quad (2.5.2)$$

Case3～Case10に対して、3次元流体解析の流速と近似流速の誤差 $E(Re, t)$ を式(2.5.3)より算出し、時間平均誤差 $\bar{E}(Re)$ を式(2.5.4)より算出した。

$$E(Re, t) \equiv 100 \times \frac{\sqrt{\int \|\vec{u}_{POD}(Re, t, \vec{x}) - \vec{u}^*(Re, t, \vec{x})\|^2 dV}}{\sqrt{\int \|\vec{u}^*(Re, t, \vec{x})\|^2 dV}} \quad (2.5.3)$$

$$\bar{E}(Re) \equiv \frac{\int_0^{10} E(Re, t) dt}{\int_0^{10} dt} \quad (2.5.4)$$

[ 時間方向のサンプリング数 $m$ の影響 ]

表2. 3に示すCase3～Case8の条件に対して、基底数( $r = 1, 5, 10, 30, 50, 100$ )と時間平均誤差 $\bar{E}(Re)$ の関係を図2. 10に示す。なお、Case3～Case8ではレイノルズ数は $Re = 10.1 \times 10^6$ に固定している。図2. 10より、いずれのケースにおいても基底数が増えると時間平均誤差は減少した。一方で、基底数が同じ条件では、Case3からCase8へ時間方向のサンプリング数 $m$ が増加するとともに時間平均誤差は減少するものの、減少量はわずかであり、時間方向のサンプリング数 $m$ は基底空間による近似精度への影響が小さいと考えられる。

次に、図2. 11に基底数 $r = 5, 10, 100$ に対する誤差 $E(Re, t)$ の時間変化を示す。図2. 11 (a)より、基底数 $r = 5$ においてCase3に対する誤差 $E(Re, t)$ は2秒間隔で減少する結果となった。Case3～Case8では、レイノルズ数の数 $l$ は1であり。この条件下で基底数 $r$ が基底数の上限値 $r_{max}$ と一致する場合、基底空間の次元数は、基底空間を抽出するために使用した流速時系列

データの時間方向の次元数と等しくなる。すなわち、基底空間の次元数は、3次元流体解析から得られた流速時系列データの時間方向の次元数と等しくなり、流速時系列データのサンプリング時間において、式(2.5.1)に示す近似式の近似誤差はゼロに近づく。表2.3より、Case3では、基底数の上限値 $r_{max} = 5$ 、サンプリング時間間隔 $\Delta Ts = 2[s]$ であり、基底数 $r = 5$ の条件では基底数の上限値 $r_{max}$ と一致し、サンプリング時間間隔 $\Delta Ts(2[s])$ で近似誤差がゼロに近づくことから、誤差 $E(Re, t)$ が2秒間隔で減少したと考えられる。

図2.11 (b)、図2.11 (c)より、基底数 $r = 10$ においてCase4に対する誤差 $E(Re, t)$ は1秒間隔で減少し、基底数 $r = 100$ においてCase6に対する誤差 $E(Re, t)$ は0.1秒間隔で減少する結果となった。上で述べた理由と同様に、表2.3より、Case4では基底数の上限値 $r_{max} = 10$ 、サンプリング時間間隔 $\Delta Ts = 1[s]$ であり、基底数 $r = 10$ の条件では基底数の上限値 $r_{max}$ と一致することから、誤差 $E(Re, t)$ が1秒間隔で減少したと考えられる。また、Case6では、基底数の上限値 $r_{max} = 100$ 、サンプリング時間間隔 $\Delta Ts = 0.1[s]$ であり、基底数 $r = 100$ の条件では基底数の上限値 $r_{max}$ と一致することから、誤差 $E(Re, t)$ が0.1秒間隔で減少したと考えられる。

#### [ レイノルズ数の数 $l$ の影響 ]

Case9、Case10に対して、基底数 $r = 5, 10, 30, 50, 100$ における3次元流体解析の流速と近似流速の時間平均誤差 $\bar{E}(Re)$ を評価した結果をそれぞれ図2.12、図2.13に示す。Case9、Case10ともに、レイノルズ数が最小となる条件(No.1)で時間平均誤差は最大となり、全領域のレイノルズ数で基底数が増えるとともに時間平均誤差は減少している。Case9においては、基底数を $r = 5, 10, 30, 50, 100$ と増やしていくと、時間平均誤差はそれぞれ $\bar{E} = 6.6, 5.6, 5.2, 5.1, 5.0[\%]$ 以下となり、基底数が30以上となる条件では誤差の減少量は小さい。一方、Case10においては、基底数を $r = 5, 10, 30, 50, 100$ と増やしていくと、時間平均誤差はそれぞれ $\bar{E} = 5.5, 4.3, 3.3, 2.9, 2.7[\%]$ 以下となり、基底数が30以上となる条件でも誤差は減少している。定常流れと同様に非定常流れにおいても、最小流量と最大流量に対するレイノルズ数を含んだ上で、中間流量に対するレイノルズ数の数を増やし、同時に基底数を増やすことで、基底空間による近似精度が上昇すると考えられる。本計算では、レイノルズ数の数 $l = 4$ 、基底数 $r = 100$ の条件で、3次元流体解析の流速を誤差2.7[%]以下の精度で近似できることを確認した。

なお、定常流れと同様に、中間領域、および補外領域で、流れの層流から乱流への遷移、

突発的な剥離渦の発生等が生じる場合は近似精度が低下する可能性があり、注意が必要であると考えられる。また、図2.9より、本計算では流速は周期的に変化しており、解析時間10[s]に対して、約2周期分変化している。周期的な流れに対する流れの周波数特性と基底の関係を検討するために、次節では解析時間を延長して解析結果に含まれる周期数を増やして固有直交分解法を適用する。

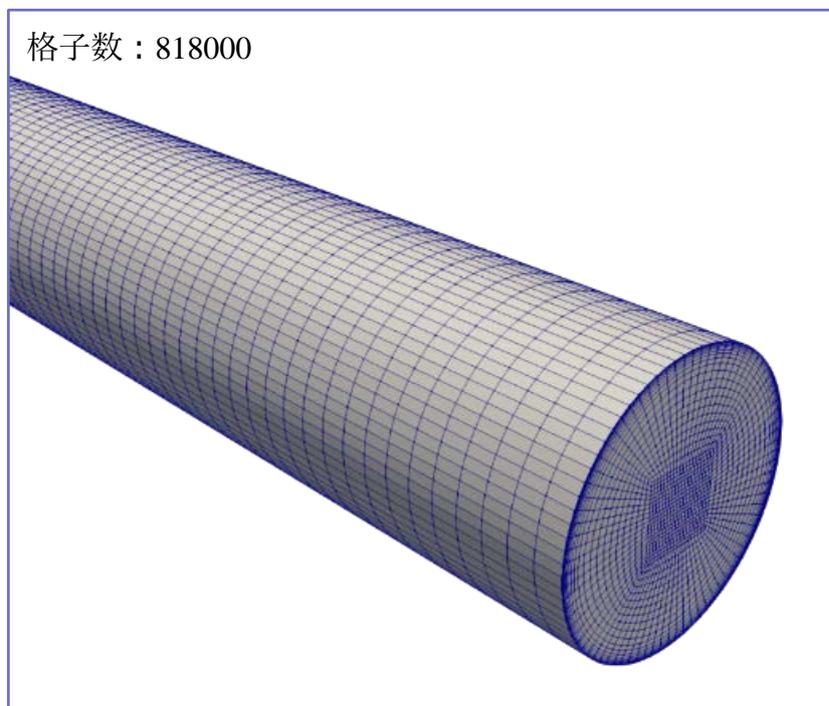
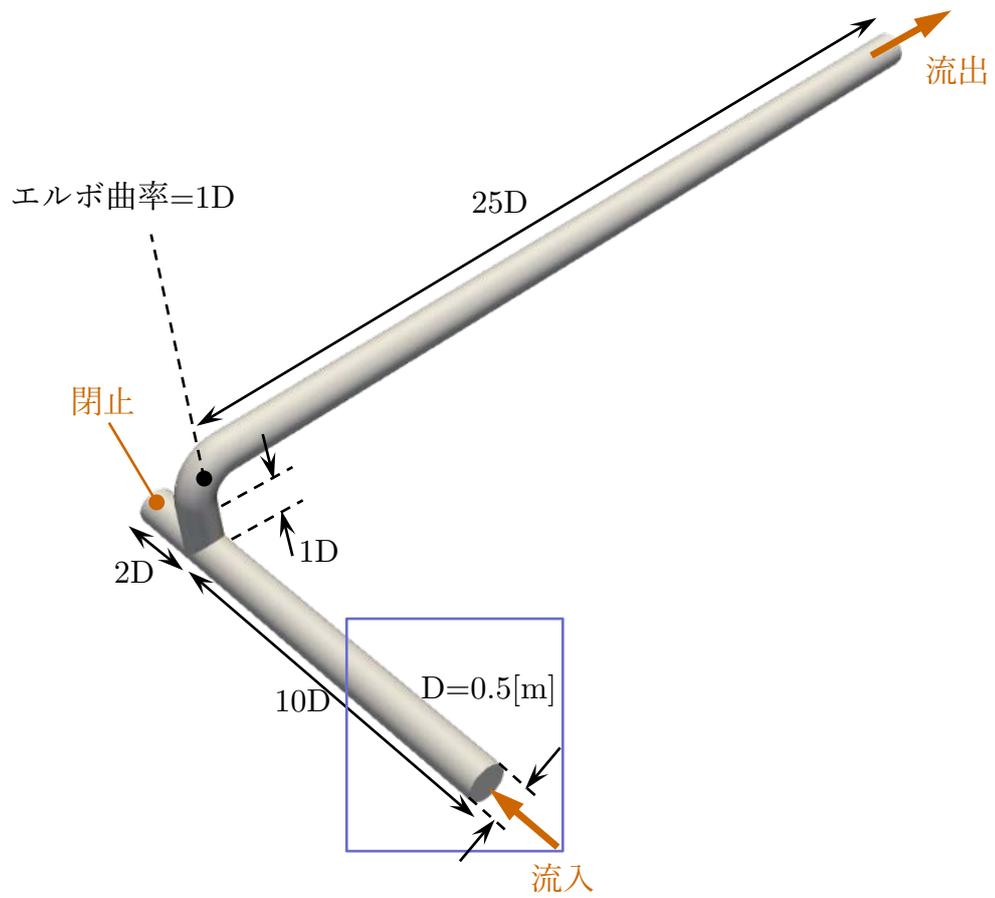


図 2.7 模擬配管非定常流れ解析対象(1)

表 2. 3 模擬配管非定常流れに対する基底空間抽出条件(Case3~Case8)

Case	m[-]	$\Delta Ts$ [s]	$r_{max}$ [-]
Case3	6	2	5
Case4	11	1	10
Case5	51	0.2	50
Case6	101	0.1	100
Case7	501	0.02	500
Case8	1001	0.01	1000

表 2. 4 模擬配管非定常流れ流入流速条件(Case9, Case10)

No.	流入流量 [m <sup>3</sup> /s]	流入流速 [m/s]	Re[-]	POD	
				Case9 ( $r_{max}=201$ )	Case10 ( $r_{max}=403$ )
10	$9.82 \times 10^{-2}$	0.5	$1.26 \times 10^6$	*	*
11	$1.96 \times 10^{-1}$	1.0	$2.51 \times 10^6$	Used	Used
12	$2.95 \times 10^{-1}$	1.5	$3.77 \times 10^6$	*	*
13	$3.93 \times 10^{-1}$	2.0	$5.03 \times 10^6$	*	Used
14	$4.91 \times 10^{-1}$	2.5	$6.28 \times 10^6$	*	*
15	$5.89 \times 10^{-1}$	3.0	$7.54 \times 10^6$	*	Used
16	$6.87 \times 10^{-1}$	3.5	$8.79 \times 10^6$	*	*
17	$7.85 \times 10^{-1}$	4.0	$10.1 \times 10^6$	Used	Used
18	$8.84 \times 10^{-1}$	4.5	$11.3 \times 10^6$	*	*

Used : 基底空間抽出に使用

\* : 基底空間による近似流速の精度評価に使用

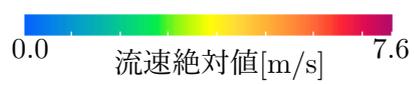
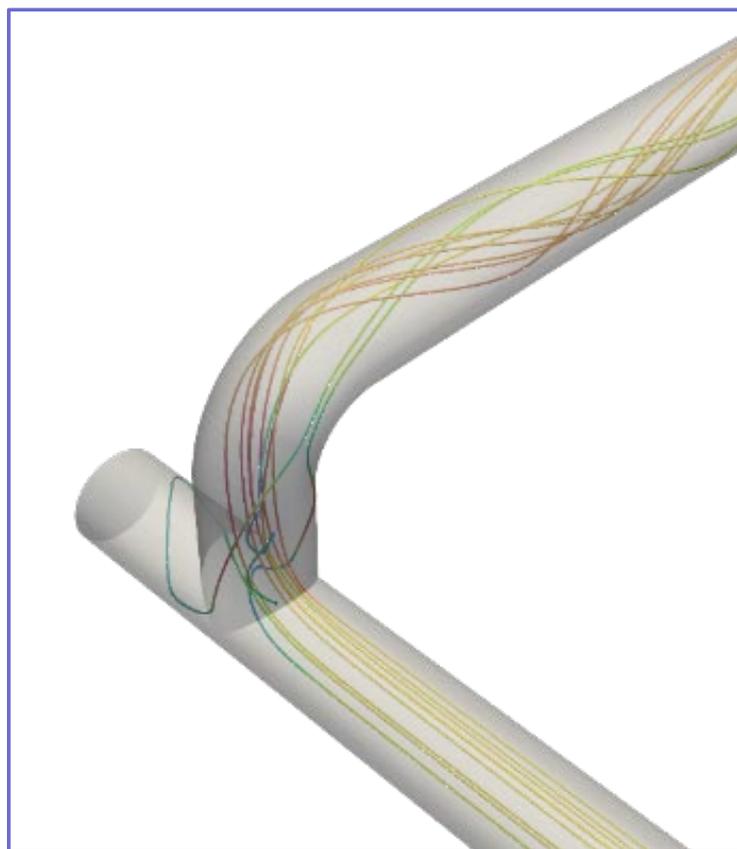
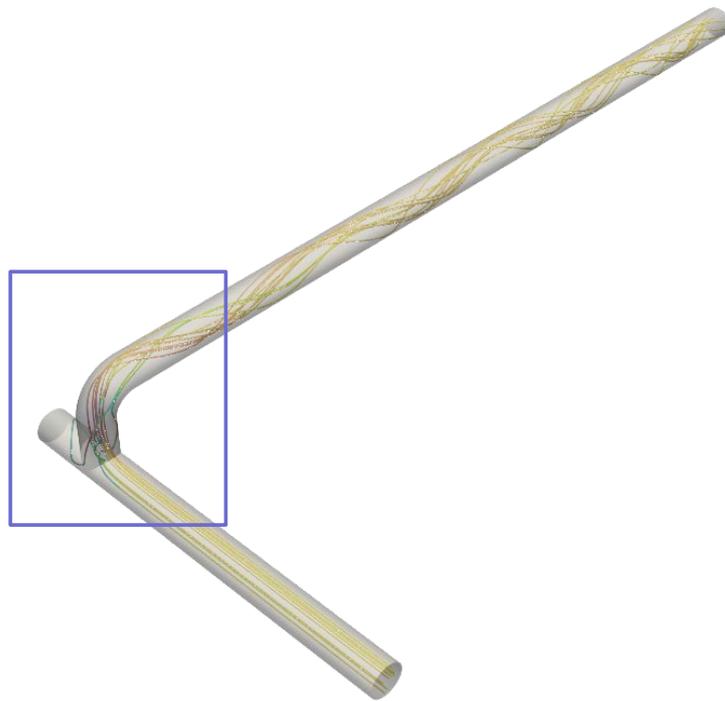


図 2.8 模擬配管非定常流れ解析結果(1)

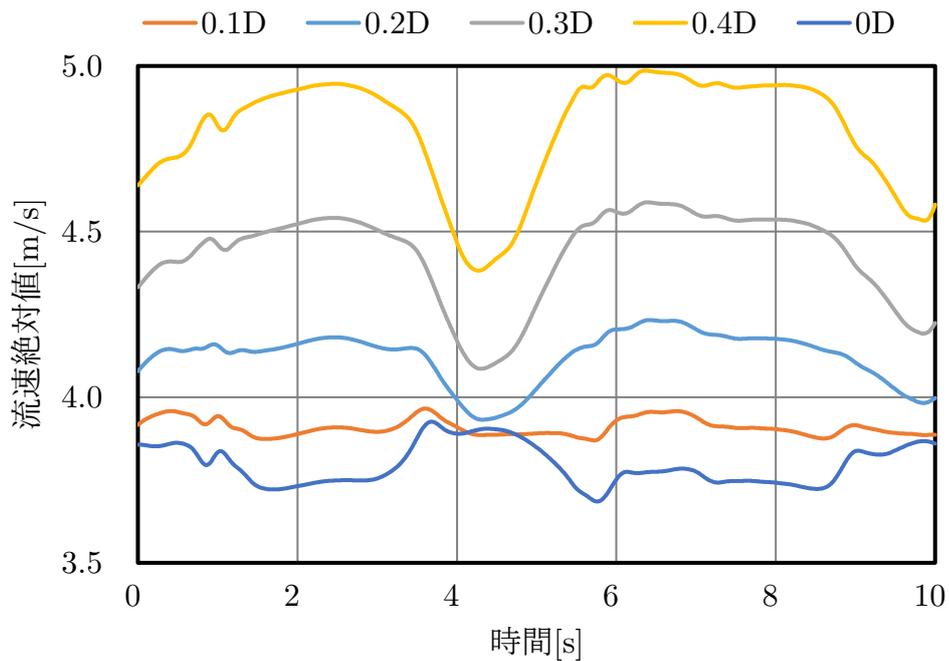


図 2.9 エルボ出口から 5D 下流の配管断面における流速絶対値の時間変化

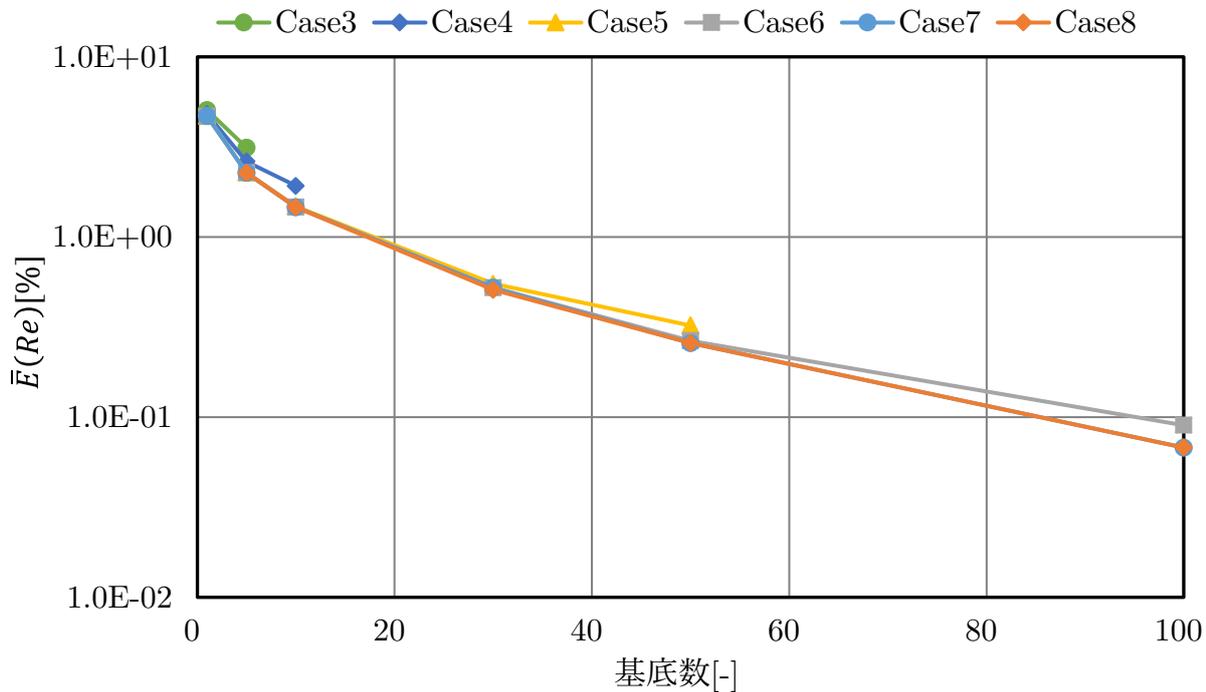
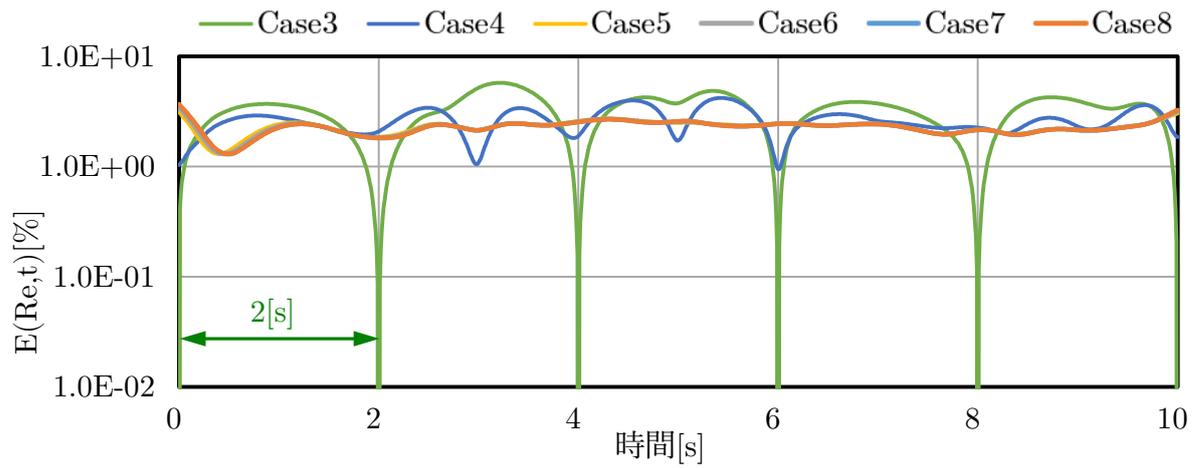
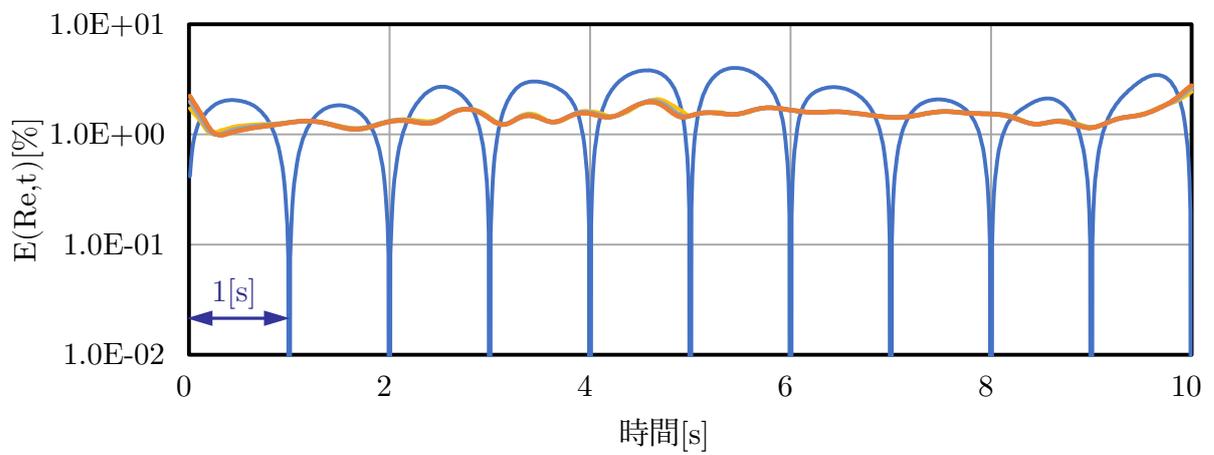


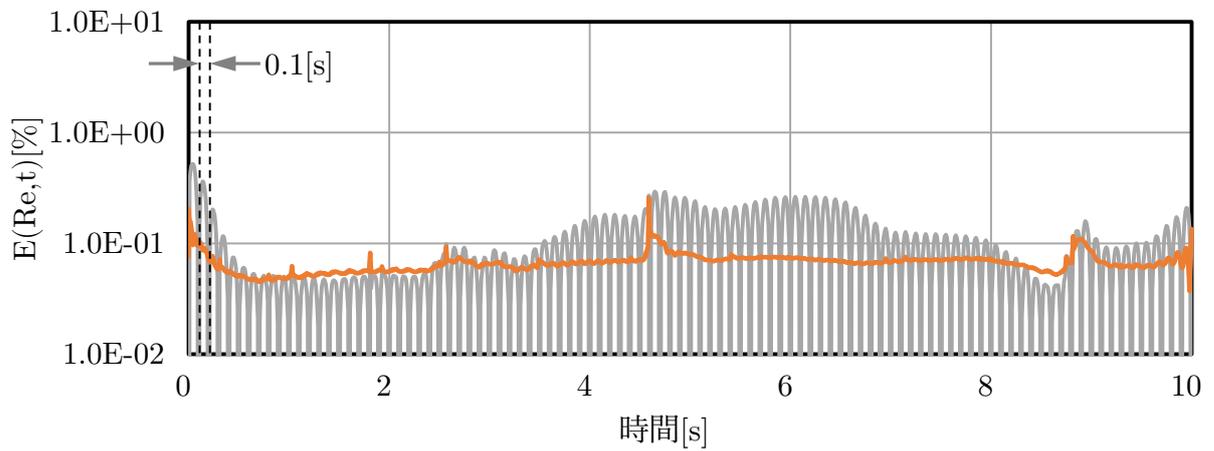
図 2.10 基底数と時間平均誤差の関係(Case3~Case8)



(a) 基底数 = 5



(b) 基底数 = 10



(c) 基底数 = 100

図 2.11 誤差の時間変化(基底数  $r = 5, 10, 100$ )

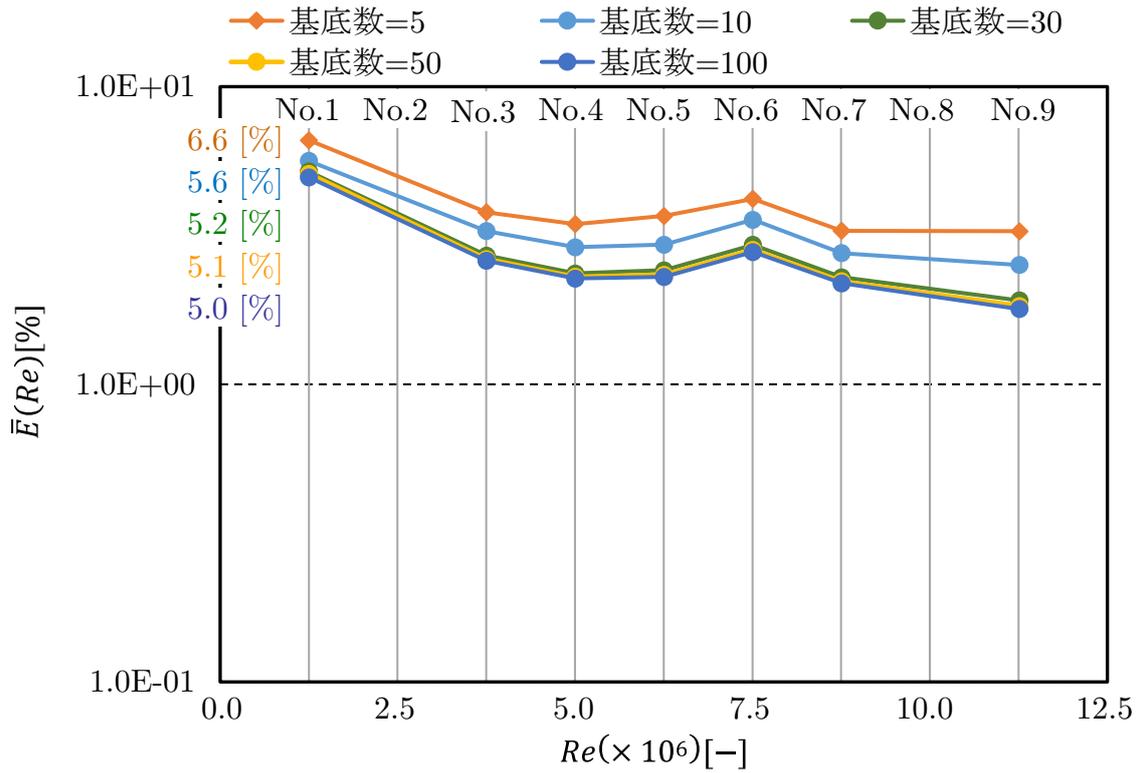


図 2.12 3次元流体解析流速と近似流速の時間平均誤差(Case9)

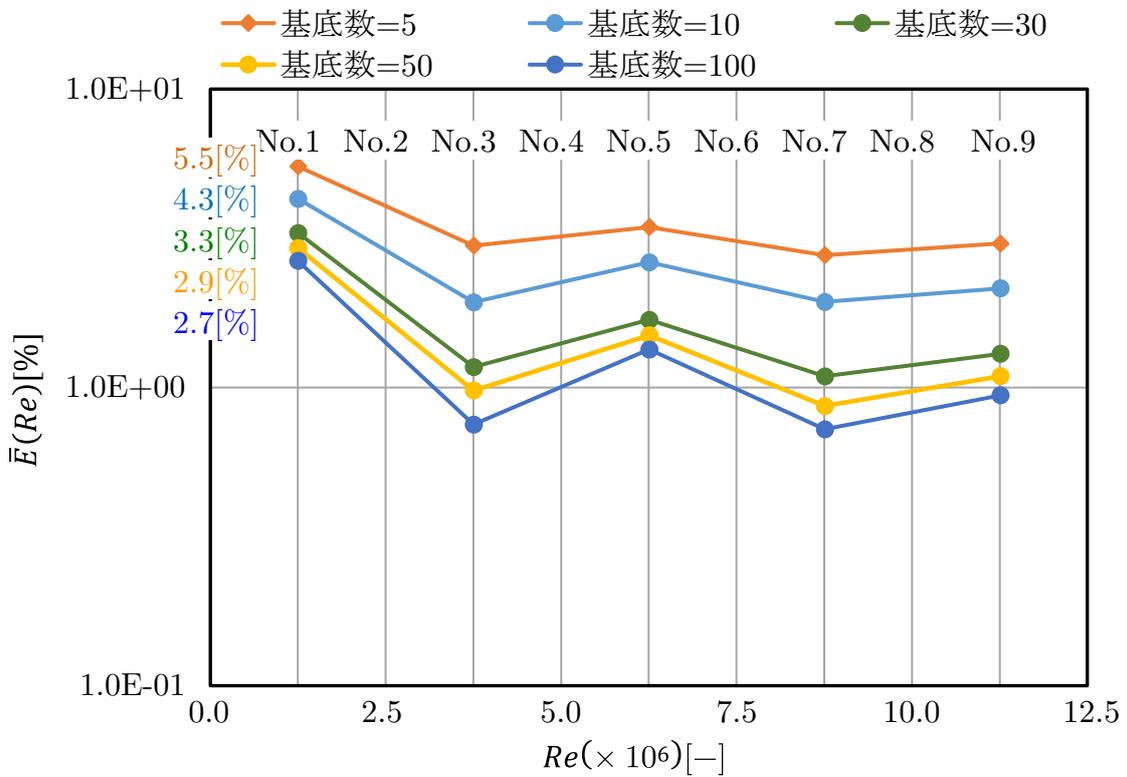


図 2.13 3次元流体解析流速と近似流速の時間平均誤差(Case10)

## 2.6 模擬配管非定常流れへの固有直交分解法の適用(2)

### 2.6.1 計算条件

図2. 14に示すエルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として3次元流体解析を実施し、得られた解析結果に対して固有直交分解法を適用した。模擬配管系統の配管口径 $D$ は0.5[m]であり、分岐と曲率半径が $1D$ であるエルボを間隔 $1D$ で接続し、上流側に長さ $10D$ の直管、下流側に長さ $50D$ の直管を配置した。エルボと接続していない分岐下流側の流路は閉止としている。また、計算には図2. 14に示す分割数660,000の計算格子を用いた。

解析時間は100[s]として時系列データを出力し、流速の時系列データに対して固有直交分解法を適用した。2.5節では解析時間を10[s]としたが、本節では100[s]に延長して解析結果に含まれる周期数を増やして固有直交分解法を適用し、周期的な流れに対する流れの周波数特性と基底の関係を検討した。表2. 5に基底空間抽出条件(Case11)を示す。本計算では、レイノルズ数を $Re = 1.01 \times 10^7$ 、時間方向のサンプリング数を $m = 501(\Delta Ts = 0.1[s])$ とした。

### 2.6.2 適用結果

図2. 15に流出面上の管中心軸から距離 $0.25D$ の位置における流れの旋回成分の時間変化を示す。図2. 15より、時刻40[s]以降で一定の振幅幅で振動する流れとなった。3次元流体解析結果を踏まえ、Case11では、流れが一定の振幅幅で振動する時間領域である50~100[s]を対象として固有直交分解法を適用した。

図2. 15に示す流出面上での流れの旋回成分の時間変化に対して、50~100[s]を対象としてFFT(Fast Fourier Transform)解析を適用した結果を図2. 16および表2. 6に示す。3次元流体解析結果の時刻50~100[s]の周期的な流れに対する低周波成分の周波数は表2. 6に示す $f_1 \sim f_6$ となった。

次に、3次元流体解析結果の流速 $\vec{u}^*(Re, t, \vec{x})$ に対して、式(2.5.1)に示すように、固有直交分解により抽出した $r$ 次元の基底空間を用いて、流速の $Re$ と $t$ に対する変動成分を基底の線形結合で近似した。式(2.5.1)中の結合係数 $a_i(Re, t)$ は、基底が式(2.4.2)に示す正規直交条件を満足するように、式(2.5.2)を用いて計算した。なお、本計算ではレイノルズ数を $Re = 1.01 \times 10^7$ に固定している。基底次数 $i = 1 \sim 12$ に対する基底結合係数 $a_i(Re, t)$ の時間変化を図2. 17, 図2. 18に示す。図2. 17, 図2. 18より、流速 $\vec{u}^*(Re, t, \vec{x})$ の周期的な変化に対応して、基底結合係

数 $a_i(Re, t)$ も周期的に変化する結果となった。 $a_i(Re, t)$ の時間変化にFFT解析を適用し、振幅スペクトルが最大となる周波数を算出した結果を表2. 7に示す。表2. 7より、基底次数 $i = 2k - 1, 2k$ に対する $a_i(Re, t)$ の周波数は同じとなり、その値は表2. 6に示す3次元流体解析の流れ場の低周波成分の周波数 $f_k$ に一致する結果となった。

次に、固有直交分解により抽出した基底空間に対して、式(2.2.13)より計算される固有値 $\lambda_i$ を式(2.6.1)にて規格化し、値が大きい順にプロットした結果を図2. 19に示す。

$$\bar{\lambda}_i = 100 \times \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \quad (2.6.1)$$

式(2.6.1)において、右辺分子項は $\lambda_i$ に対応する基底 $\varphi_i$ が保有している流れ場のエネルギーを表しており、右辺分母項はもともとの流れ場が保有している全エネルギーを表している。従って、規格化固有値 $\bar{\lambda}_i$ は、もともとの流れ場が保有しているエネルギーに対して、 $\bar{\lambda}_i$ に対応する基底 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーの割合を示す値である。図2. 19より基底次数 $i$ が大きくなると、 $\bar{\lambda}_i$ は減少し、基底 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーの割合も減少している。また、基底次数 $i = 2k - 1, 2k$ に対する基底 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーは同じレベルとなった。基底次数 $i = 2k - 1, 2k$ に対する基底結合係数 $a_i(Re, t)$ の周波数と、基底 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーが同じになったことから、 $i = 2k - 1, 2k$ に対する基底 $\varphi_i$ は同じ流れのモードに対応していると考えられる。これは、本計算ではエルボ下流の直管部にて旋回流が発生し、直管の形状対称性より、直管部で発生した旋回流は水平方向に対称であり、左右二つの流れのモードが存在しているためであると考えられる。

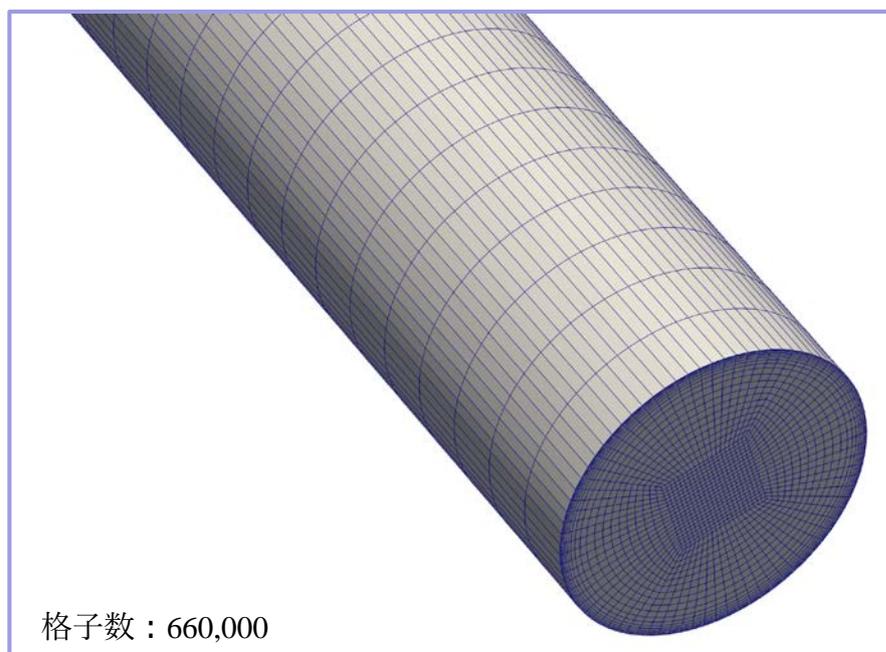
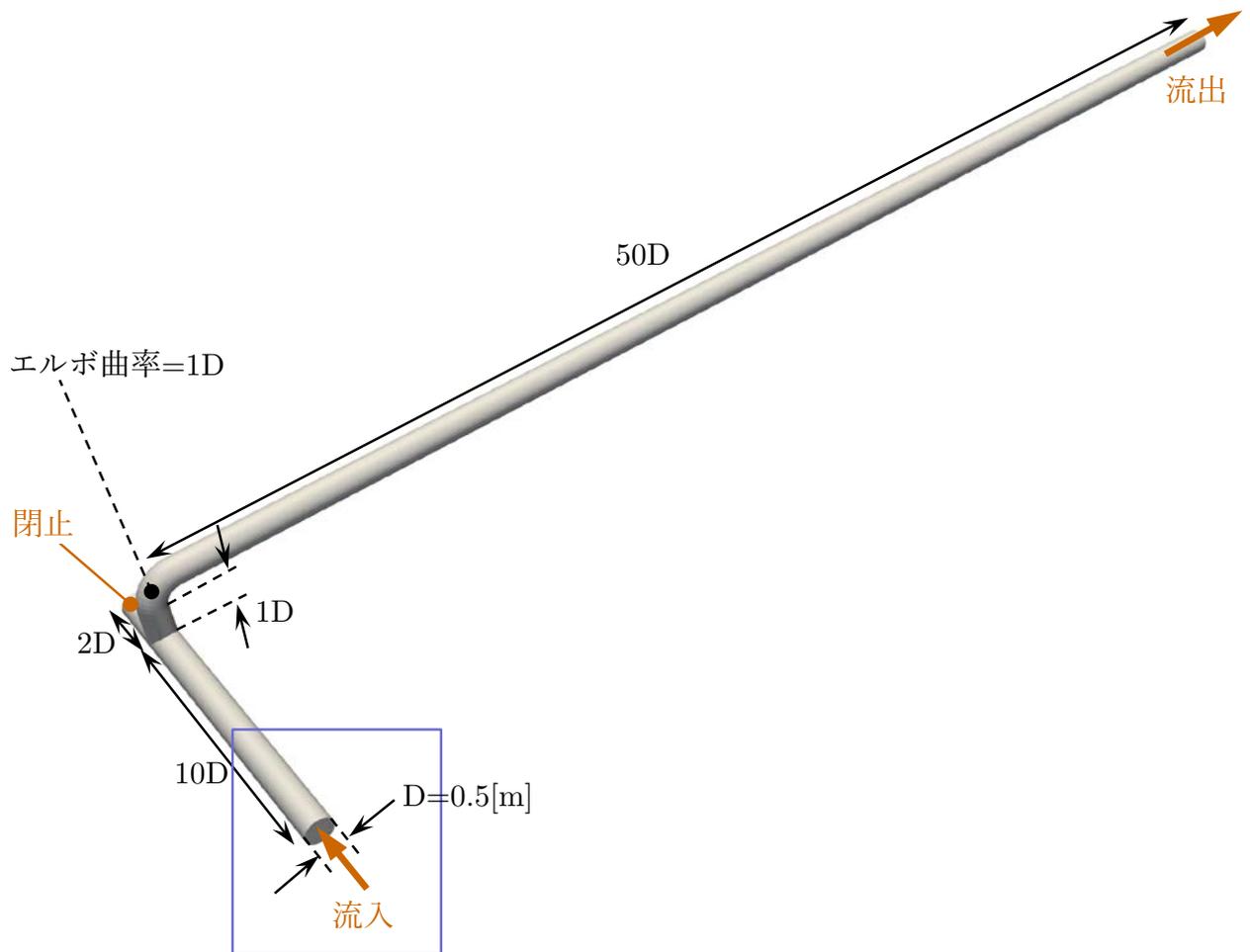


図 2.14 模擬配管非定常流れ解析対象(2)

表 2.5 模擬配管非定常流れに対する基底空間抽出条件(Case11)

Case	Re[-]	m[-]	$\Delta Ts$ [s]
Case11	$1.01 \times 10^7$	501	0.1

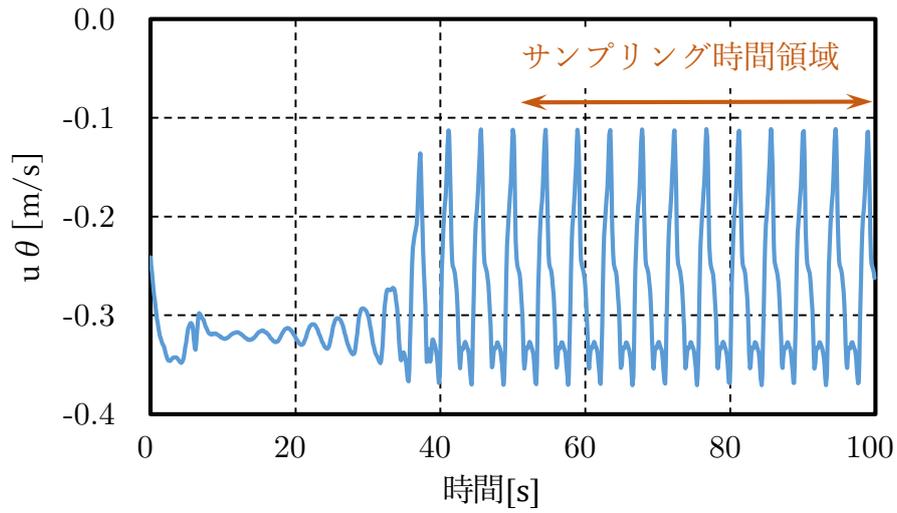


図 2.15 流出面上の管中心軸から距離 0.25D の位置における流れの旋回成分の時間変化

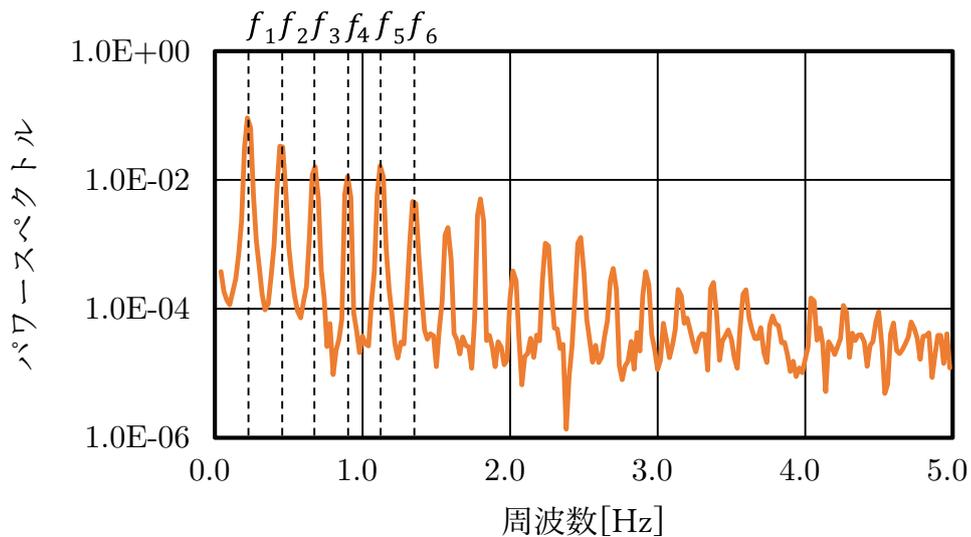


図 2. 16 流出面上での流れの旋回成分に対する FFT 解析結果

表 2. 6 流出面上での流れの旋回成分に対する低周波成分の周波数

周波数	
[Hz]	
$f_1$	0.22
$f_2$	0.44
$f_3$	0.68
$f_4$	0.90
$f_5$	1.12
$f_6$	1.34

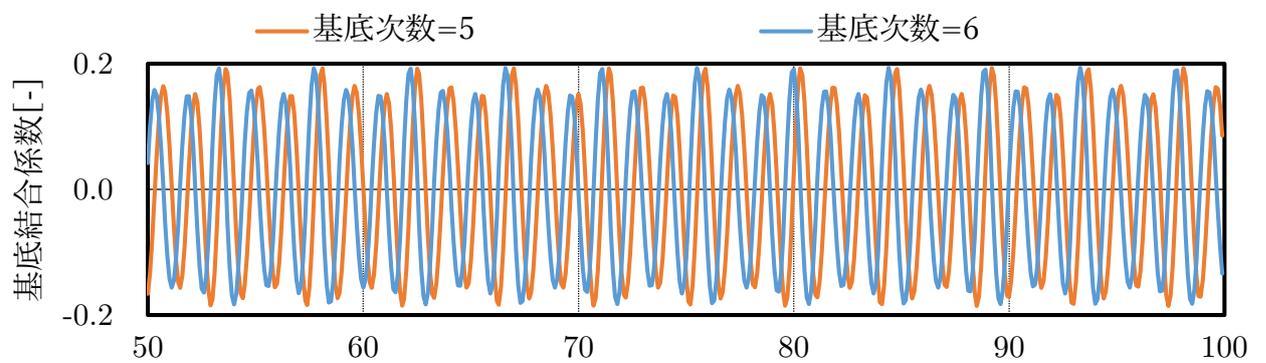
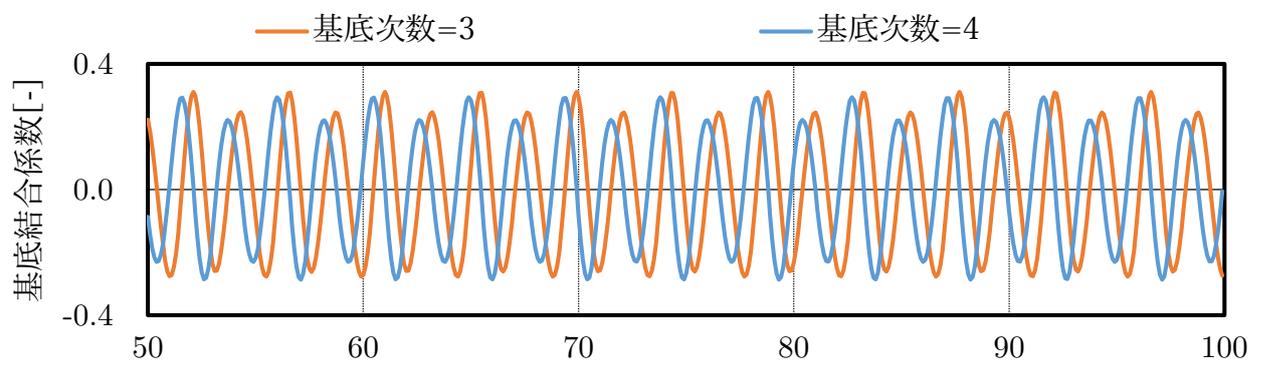
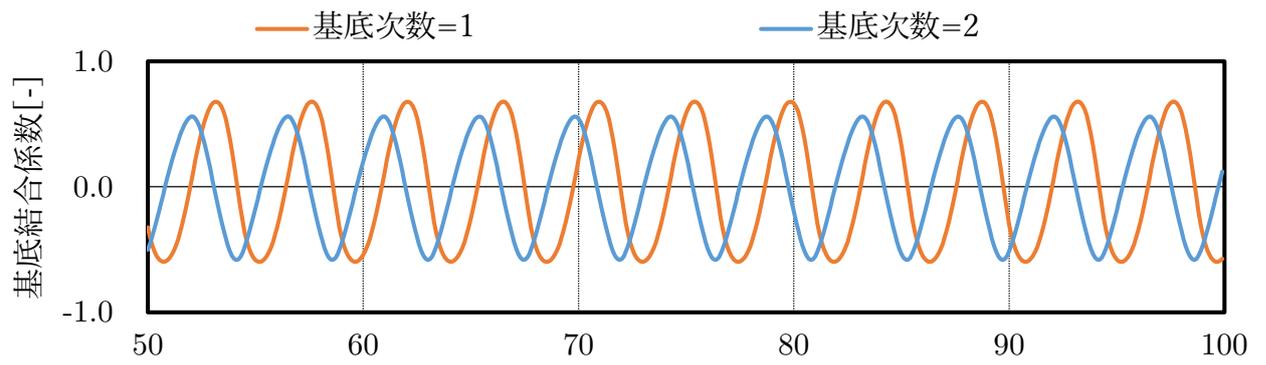


図 2.17 基底結合係数の時間変化(1)

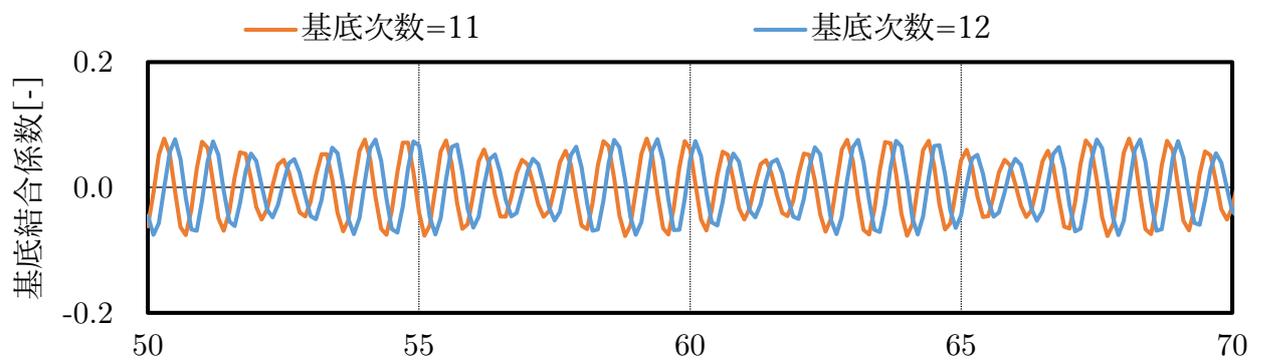
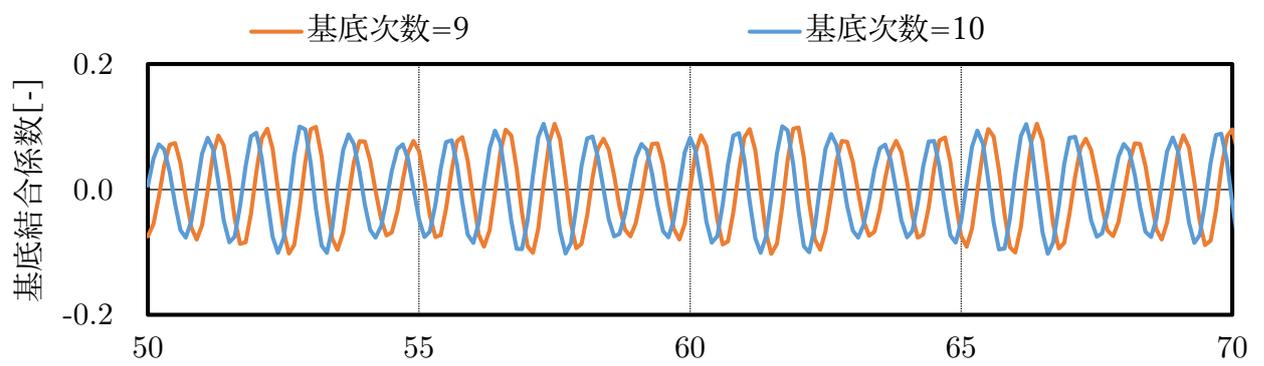
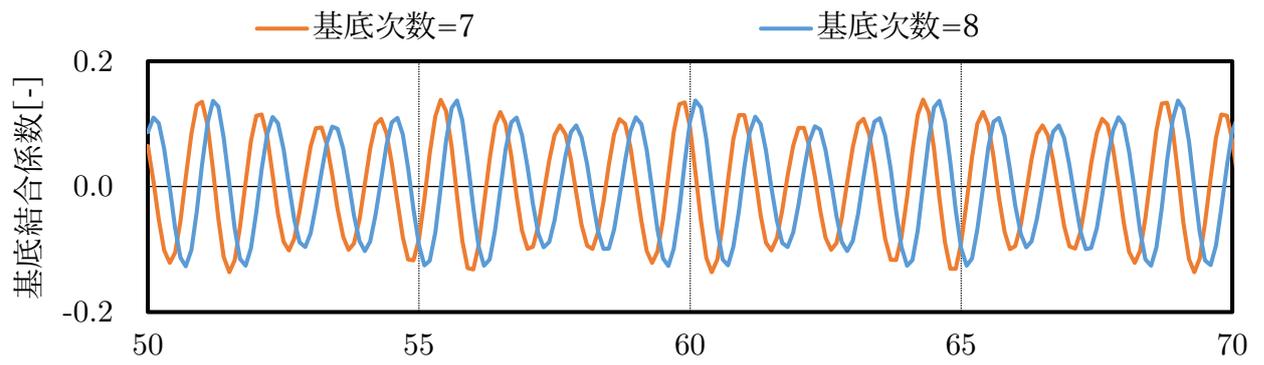


図 2.18 基底結合係数の時間変化(2)

表 2.7 基底結合係数に対する FFT 解析結果

基底次数 $i$	$k$	周波数 $f$	基底次数 $i$	$k$	周波数 $f$
[-]	[-]	[Hz]	[-]	[-]	[Hz]
1	1	0.22	7	4	0.90
2		0.22	8		0.90
3	2	0.44	9	5	1.12
4		0.44	10		1.12
5	3	0.68	11	6	1.34
6		0.68	12		1.34

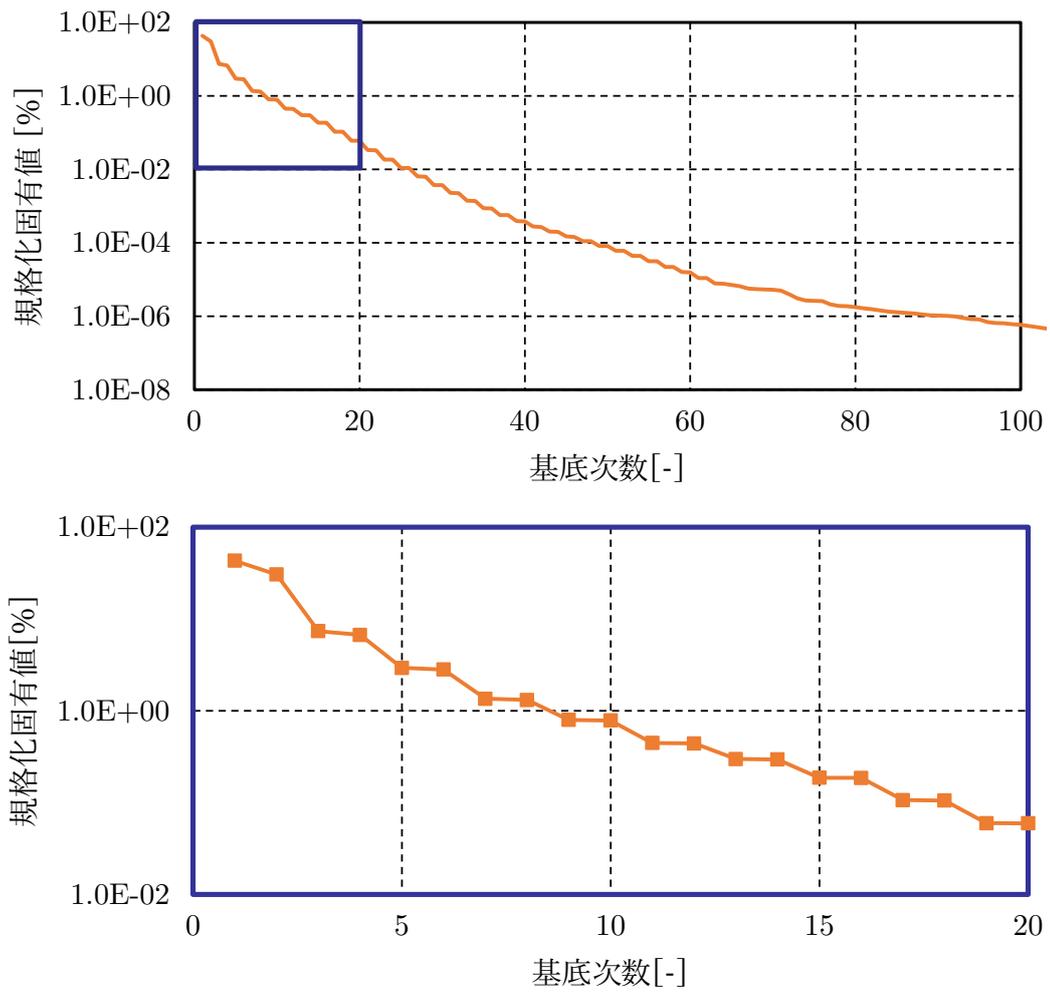


図 2. 19 模擬配管非定常流れに対する規格化固有値

## 2.7 実配管非定常流れへの固有直交分解法の適用

### 2.7.1 計算条件

図2. 20に示すエルボ、分岐、オリフィス、弁を含む実配管系を対象として3次元流体解析を実施し、得られた解析結果に対して固有直交分解法を適用した。実配管系の配管口径 $D$ は0.294[m]であり、配管系のサイズは図2. 20に示す通りである。流れは図2. 20中の配管断面Aより流入し、オリフィスを通して配管断面Bより流出する。配管断面C、Dは閉止としている。また、計算には図2. 21に示す分割数1,330,000の計算格子を用い、流入流速= 4.015[m/s]、レイノルズ数を $Re = 1.45 \times 10^6$ とした。

解析時間を30[s]として時系列データを出し、流速の時系列データに対して固有直交分解法を適用した。表2. 8に基底空間抽出条件(Case12)を示す。本計算では、時間方向のサンプリング数を $m = 301$ ( $\Delta Ts = 0.1$ [s])とした。

### 2.7.2 適用結果

3次元流体解析結果より、時刻30[s]における模擬配管系内の流線を可視化した結果を図2. 22に示す。流線の色は流速の絶対値を表している。オリフィス上流の直管において、直管上流の分岐とエルボでの流路の曲がりの影響で旋回流が発生している。

3次元流体解析結果の流速 $\vec{u}^*(Re, t, \vec{x})$ に対して、式(2.5.1)に示すように、固有直交分解により抽出した $r$ 次元の基底空間を用いて、流速の $Re$ と $t$ に対する変動成分を基底の線形結合で近似した。式(2.5.1)中の結合係数 $a_i(Re, t)$ は、基底が式(2.4.2)に示す正規直交条件を満足するように、式(2.5.2)を用いて計算した。なお、本計算ではレイノルズ数を $Re = 1.45 \times 10^6$ に固定している。3次元流体解析の流速と近似流速の誤差 $E(Re, t)$ を式(2.5.3)より算出し、時間平均誤差 $\bar{E}(Re)$ を式(2.7.1)より算出した。

$$\bar{E}(Re) \equiv \frac{\int_0^{30} E(Re, t) dt}{\int_0^{30} dt} \quad (2.7.1)$$

基底数 $r = 10 \sim 200$ における3次元流体解析の流速と近似流速の時間平均誤差 $\bar{E}(Re)$ を評価した結果を図2. 23に示す。基底数が増えるとともに時間平均誤差は減少し、基底数 $r = 180$ の条件で、3次元流体解析の流速を誤差4.9[%]以下の精度で近似できることを確認した。

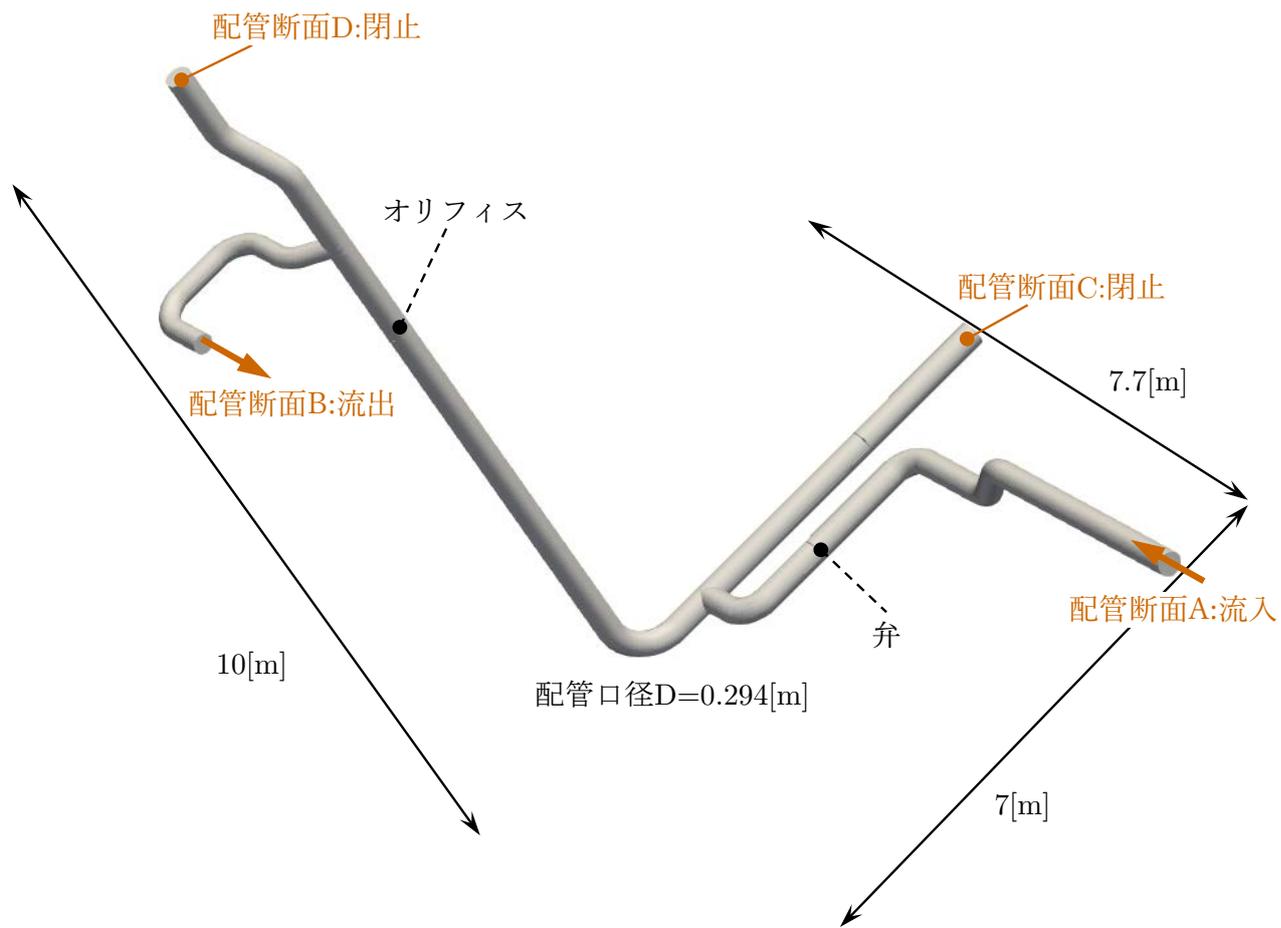
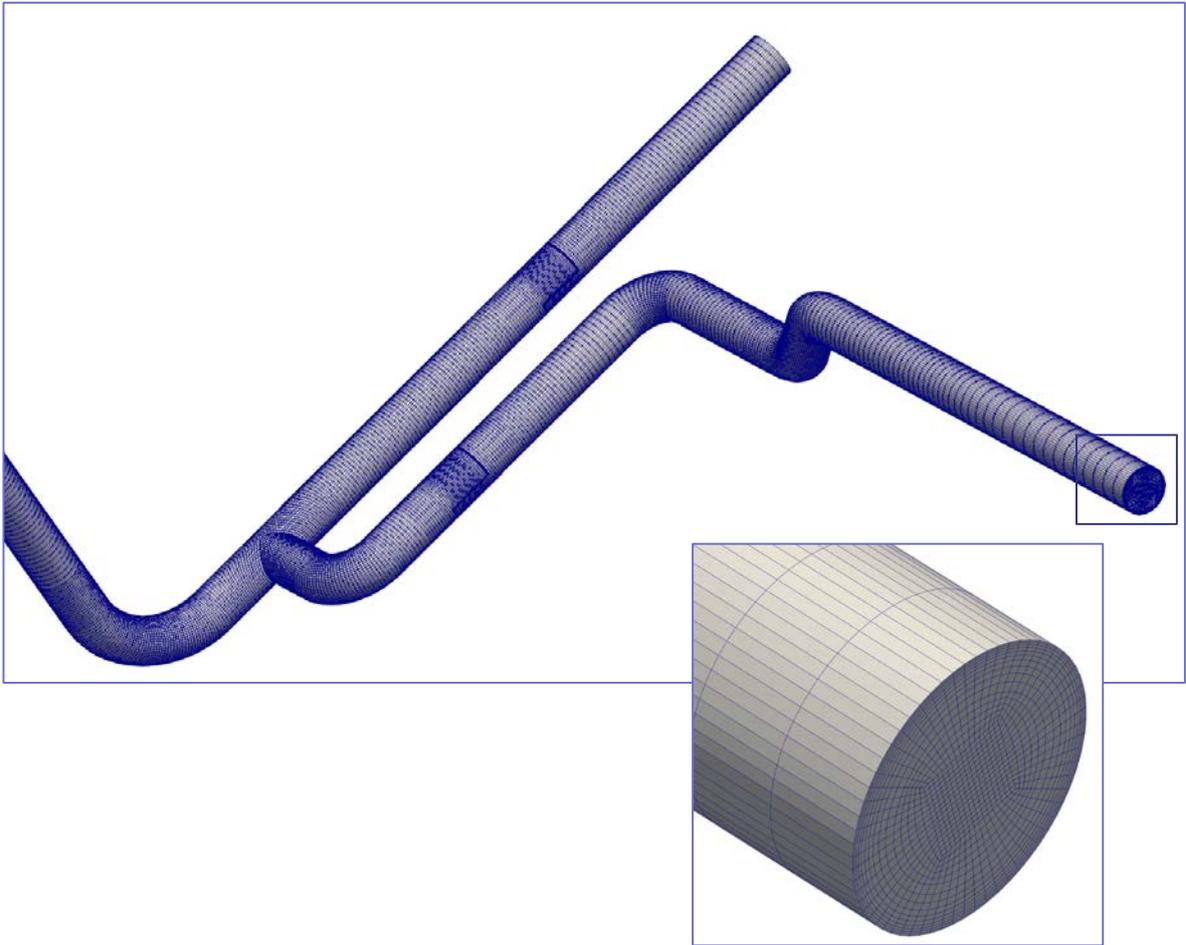
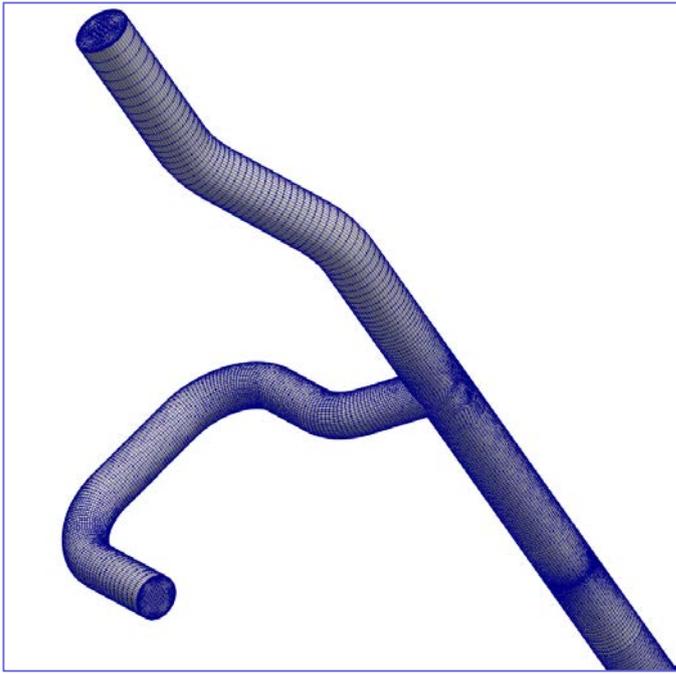


図 2. 20 実配管非定常流れ解析対象

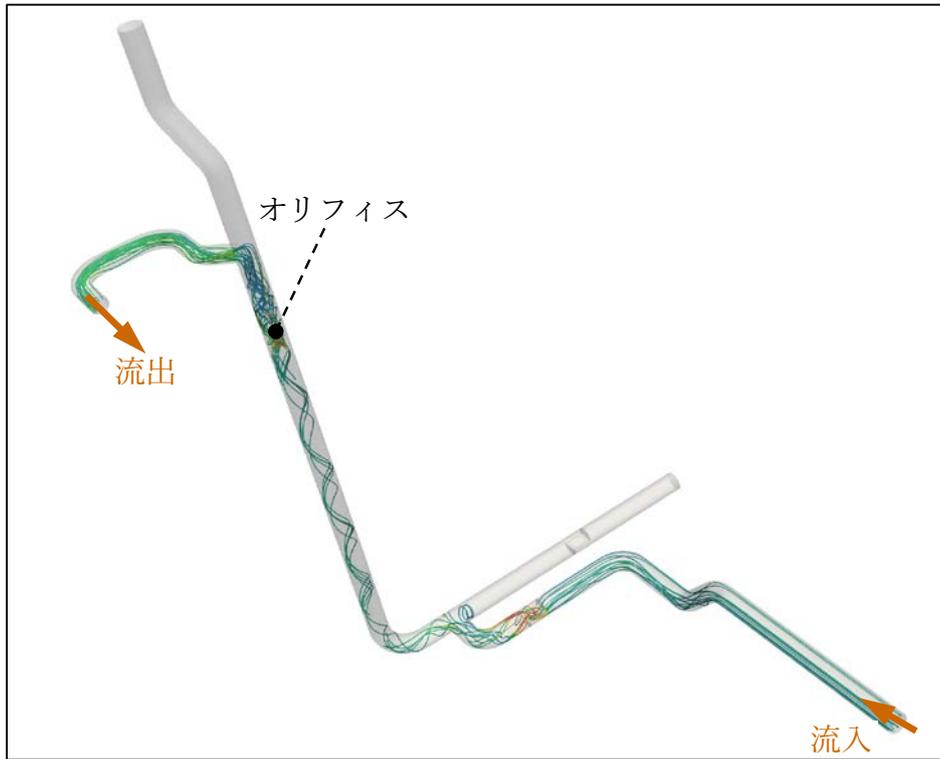


格子数：1,330,000

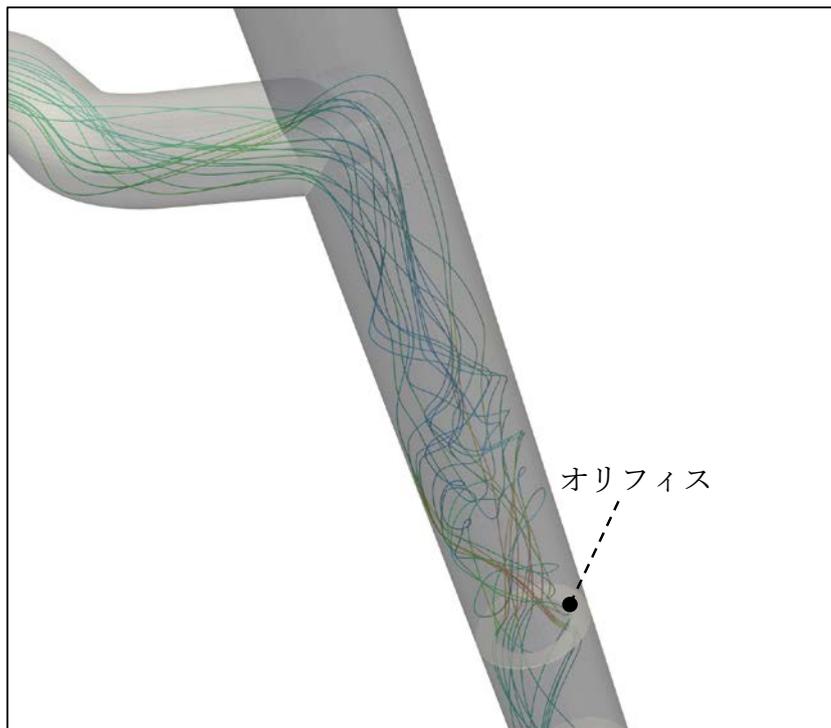
図 2. 21 実配管非定常流れ計算格子

表 2.8 実配管非定常流れに対する基底空間抽出条件(Case12)

Case	Re[-]	m[-]	$\Delta Ts[s]$
Case12	$1.45 \times 10^6$	301	0.1



流線(全体)



流線(オリフィス部拡大)

0.0 20.0



流速[m/s]

図 2. 22 実配管非定常流れ解析結果

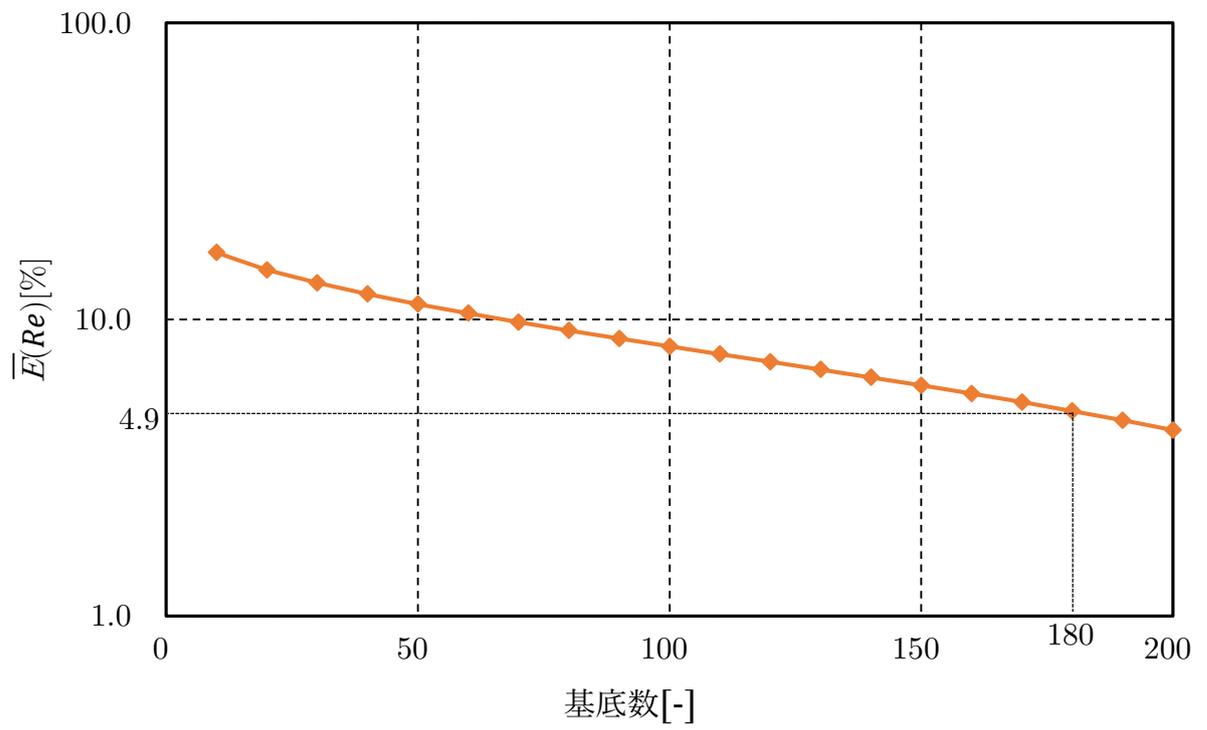


図 2. 23 基底数と時間平均誤差の関係(Case12)

## 2.8 結論

固有直交分解法を既応研究では検討されていなかった配管内旋回流解析に適用し、抽出した基底空間を用いた流れ場の近似精度について検討し、以下の結論を得た。

- (1) 二つのエルボを含む模擬配管系を対象として、3次元流体解析より得られた複数の流量条件に対する定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出した。定常流れでは、最小流量と最大流量に対するレイノルズ数を含んだ上で、中間流量に対するレイノルズ数の数を増やし、同時に基底数を増やすことで、基底空間による近似精度が上昇する。レイノルズ数の数4、基底数3の条件で、3次元流体解析の流速を誤差0.6[%]以下の精度で近似できることを確認した。
- (2) エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、3次元流体解析より得られた複数の流量条件に対する非定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出した。時間方向のサンプリング数は基底空間による近似精度への影響は小さい。一方、最小流量と最大流量に対するレイノルズ数を含んだ上で、中間流量に対するレイノルズ数の数を増やし、同時に基底数を増やすことで、基底空間による近似精度が上昇する。レイノルズ数の数4、基底数100の条件で、3次元流体解析の流速を時間平均誤差2.7[%]以下の精度で近似できることを確認した。
- (3) エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、3次元流体解析より得られた周期的な流れに対する流れの周波数特性と基底の関係を検討した。3次元流体解析の流れ場の周期性に対応して、基底の基底結合係数も周期的に変化する結果となった。さらに、基底次数 $i = 2k - 1, 2k$ に対する基底結合係数の周波数は、3次元流体解析の流れ場の低周波成分の周波数 $f_k$ に一致することを確認した。
- (4) エルボ、分岐、オリフィス、弁を含む実配管系を対象として、3次元流体解析より得られた非定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出した。基底数180の条件で、3次元流体解析の流速を時間平均誤差4.9[%]以下の精度で近似できることを確認した。

## 第3章

# 機械学習を用いた流速基底の流れ構造可視化手法の開発

### 3.1 緒言

2章で述べた固有直交分解法を用いて抽出した基底空間は数学的な手法により導出される空間関数であり、各基底に対して基底が保有する流れの構造等の物理的意味を理解することが難しい[67]。配管内で生じる特徴的な流動現象である、オリフィス、エルボ、分岐等の組み合わせで生じる旋回流れは、流量計精度低下、配管減肉発生の主要な要因となる。旋回流れの発生要因を検討するためには、流速基底が保有する流れ場の情報から渦中心位置を抽出し、旋回流れの構造を可視化、把握することが有効であると考えられる。基底が保有する流れ場の情報から流れの構造を可視化した例として、円柱、翼列回りの流れに対して流速絶対値、流速成分、渦度絶対値、流速勾配テンソル第2不変量の等値面を可視化した例[67], [75], [87]、大気突入カプセル後流の流れに対して渦中心位置を抽出した例[65]はあるが、配管系流れに対して渦中心位置を抽出し、旋回流れの構造を可視化した例はない。

流れ解析結果から渦中心位置を計算する方法として、従来では渦度分布による方法、圧力分布による方法が一般的であったが、複雑な3次元流れに対して適用することは困難であり、より適用範囲の広い流速勾配テンソルを用いる方法[88]、圧力ヘシアンを用いる方法[89], [90], [91]等が提案されている。これら数式モデルをベースとした既存手法は、解析対象が大規模で解析結果のデータサイズが巨大となる場合には、計算処理に時間がかかるという課題がある。一方、画像データから特徴量を抽出するアプローチとして、機械学習が有効であり、様々な分野で実用化されている[92]。本章では、短時間に渦中心位置を抽出することを目的として、機械学習を用いて流れ解析結果から旋回流れの渦中心位置を抽出する手法を提案し、流速基底の流れ構造を可視化して、各基底が保有する流れの構造と配管系内の旋回流れの関係について考察する。以降3.2節では、本研究で提案する機械学習を用いて渦中心位置を抽出する手法について述べる。3.3節では、提案手法の妥当性を検証するために、直管、エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として流れ解析を実施し、得られた解析結果に対して渦中心位

置抽出手法を適用した。さらに、流速基底から渦中心位置を抽出し、流速基底が保有する流れの構造と配管系内の旋回流れの関係について考察した

## 3.2 機械学習を用いた渦中心位置抽出手法

### 3.2.1 全体概要

図3.1を用いて、本研究で提案する機械学習を用いて渦中心位置を抽出する手法の概要を説明する。

図3.1に示す学習フェーズでは、Step1にて、流れ解析結果に対して、圧力ヘシアンに基づく数式モデル[90]を適用して渦中心位置と渦中心での流れの回転速度を算出する。次に図3.1に示すStep2において、流れ解析結果とStep1で算出した渦中心位置と回転速度を訓練データとして、機械学習を適用することにより、流れ解析結果を入力として、渦中心位置と回転速度を出力するNNモデル(Neural Networkモデル)を構築する。NNモデルを構築後、図3.1に示す予測フェーズ(Step3)では、流れ解析結果をNNモデルに入力し、渦中心位置と回転速度を出力する。以下では、Step1で用いる数式モデルと、Step2で構築するNNモデルについて述べる。

### 3.2.2 数式モデルを用いた渦中心位置計算方法

本研究では、流れ解析結果から得られる圧力ヘシアンを用いて渦中心位置と回転速度を計算し[90]、図3.1に示すStep2においてNNモデルを構築する際の教師データとして用いる。図3.2に本計算手法の概要を示す。

- ① 渦中心軸に垂直な平面 $\pi$ において、圧力 $p$ は渦中心位置 $\vec{c}$ で極小値を持つ。これは、流れ解析結果の格子点 $\vec{x}$ における圧力ヘシアン $H$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$ とすると、 $\lambda_2 > 0$ を満足するという条件により定義される。ここで、圧力ヘシアン $H$ は圧力 $p$ の空間方向2階微分値であり、式(3.2.1)にて計算される。

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 p}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

そこで、格子点 $\vec{x}$ における圧力ヘシアン $H$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を算出し、 $\lambda_2 > 0$ となる $\vec{x}$ を抽出する。ここで、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対応する固有ベクトルを $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ とすると、渦中心

軸方向ベクトルは $\vec{e}_3$ に一致し、平面 $\pi$ は $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ により定義される。

- ② 渦中心位置 $\vec{c}$ が格子点 $\vec{x}$ から渦中心軸に下した垂線の足と一致する条件から、式(3.2.2)～式(3.2.4)が得られる[93]。

$$\vec{c} \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \nabla p|_{\vec{x}} + \lambda_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{c} = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\vec{e}_2 \cdot \nabla p|_{\vec{x}} + \lambda_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{c} = 0 \quad (3.2.4)$$

式(3.2.3)、式(3.2.4)の $\nabla p|_{\vec{x}}$ は格子点 $\vec{x}$ における圧力勾配ベクトルである。式(3.2.2)～式(3.2.4)を $\vec{c}$ について解いた後、 $|\vec{x} - \vec{c}| < l$ となる $\vec{c}$ を抽出する。ここで $l$ は格子サイズである。

- ③ 格子点 $\vec{x}$ における流速 $\vec{u}$ と共に移動する座標系 $\vec{X}'$ を考え、座標系 $\vec{X}'$ における流速 $\vec{u}'$ の流速勾配テンソル成分を用いて式(3.2.5)に示す $D$ 値を計算する。

$$D = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \quad (3.2.5)$$

$D < 0$ の時、平面 $\pi$ 上の流速分布は $\vec{c}$ を中心として旋回することから[94]、 $D < 0$ となる $\vec{c}$ を渦中心位置として採用する。また、渦中心での流れの回転速度 $\omega$ は式(3.2.6)にて計算される。

$$\omega = \sqrt{-D} \quad (3.2.6)$$

- ④ 流れ解析結果の全ての格子点に対して、上で述べた①～③の条件を満足する $\vec{x}$ を渦中心位置として抽出する。

### 3.2.3 機械学習を用いた渦中心位置予測 NN モデル構築方法

本研究では、配管系に含まれる直管を対象として、管軸に垂直な断面における流速・圧力分布、渦中心位置、回転速度を訓練データとして、機械学習を適用して図3.3に示すNNモデルを構築する。本モデルは渦中心の数を予測するモデル（渦中心数予測NNモデル）と、渦中心位置と回転速度を予測するモデル（渦中心位置予測NNモデル）から構成される。

渦中心数予測NNモデルは配管断面の流速・圧力分布を入力として各断面における渦中心の数を予測するモデルである。一方、渦中心位置予測NNモデルは、渦中心の数 $N$ を固定し

て、配管断面の流速・圧力分布を入力として各断面における $N$ 個の渦中心の位置と回転速度を予測するモデルである。

本モデルでは、最初に各配管断面の流速・圧力分布を渦中心数予測NNモデルに入力し、各断面における渦中心の数を予測する。次に、渦中心の数 $N$ に応じて、 $N$ 個の渦中心を対象とする渦中心位置予測NNモデルを選択し、選択した渦中心位置予測NNモデルを用いて各渦中心の位置と回転速度を予測する。本手法では想定される渦中心数の最大値 $N_{max}$ に等しい数の渦中心位置予測NNモデルを用意する。例えば3個までの渦中心を対象とする場合は、3種類の渦中心位置予測NNモデルを用意し、それぞれのモデルが1個、2個、3個の渦中心に対して、渦中心位置と回転速度を予測する。

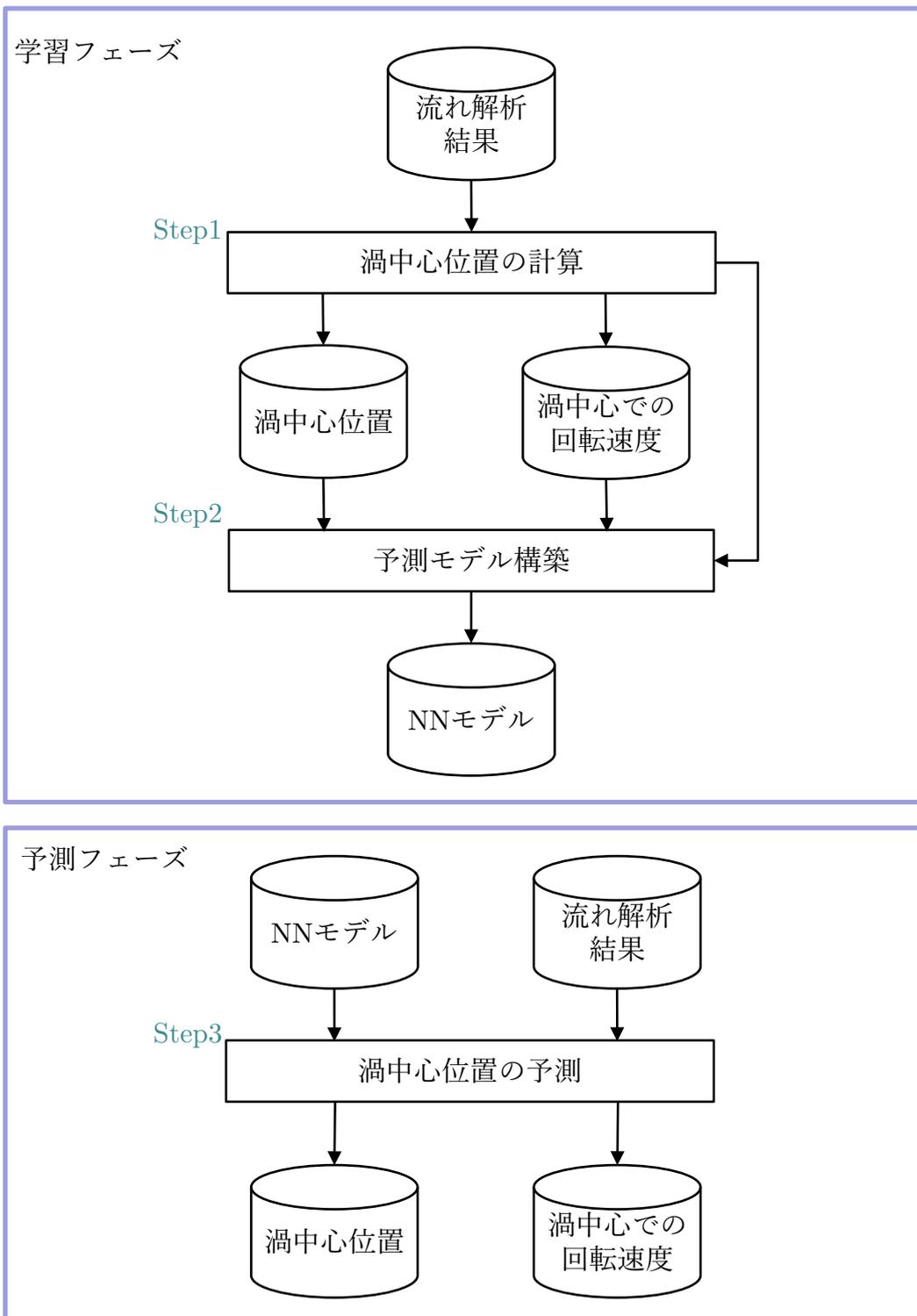


図 3.1 プラント配管向け渦中心位置抽出手法

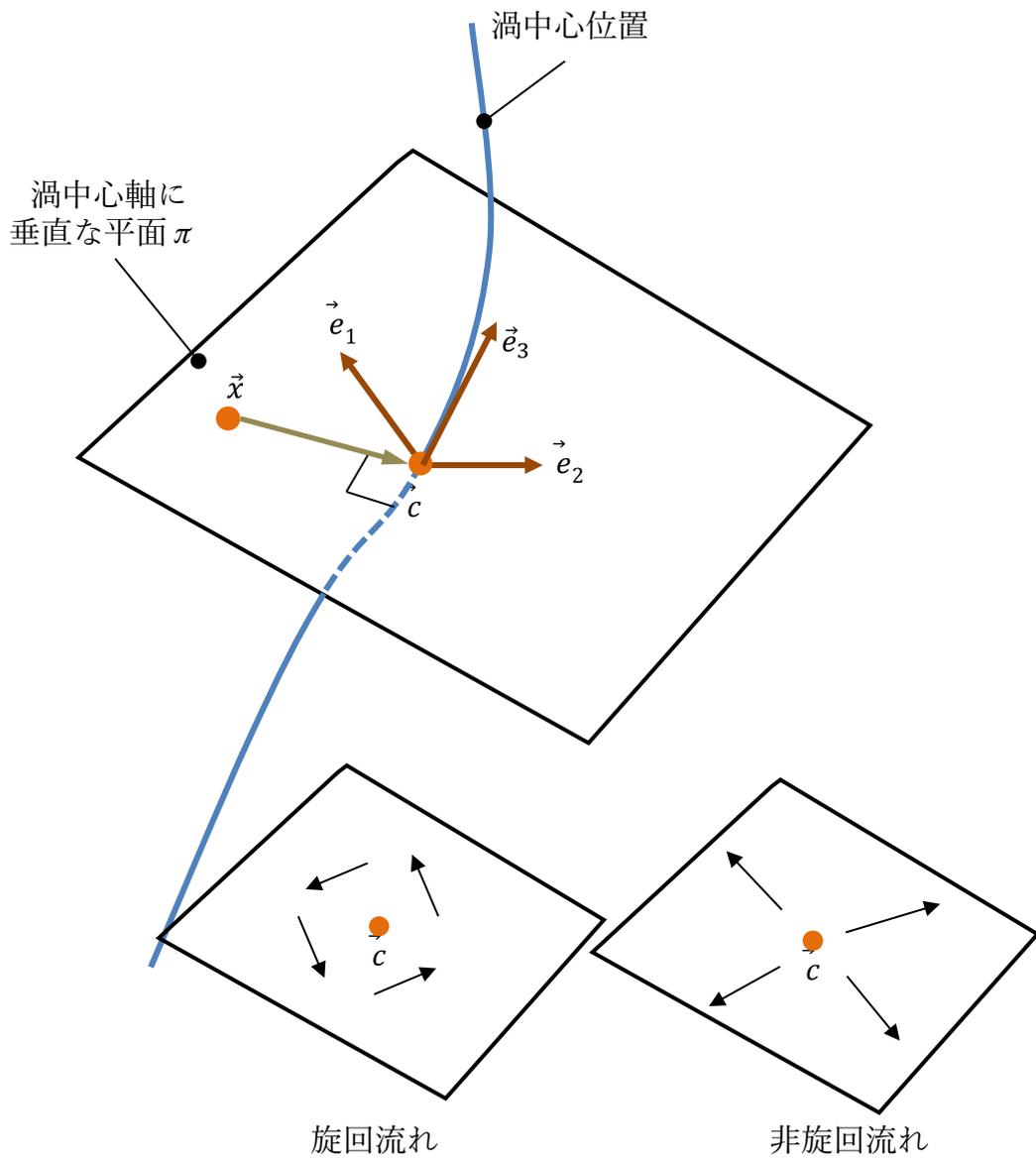


図 3. 2 圧力ヘシアンを用いた渦中心位置計算方法概要

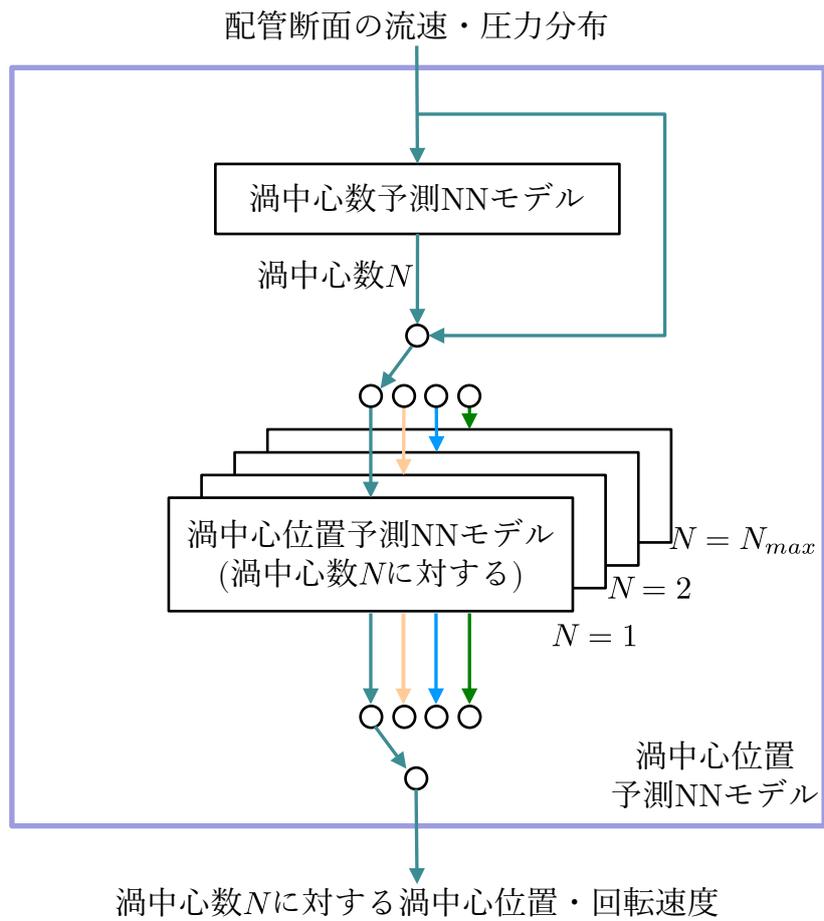


図 3. 3 渦中心位置予測 NN モデル概要

### 3.3 模擬配管非定常流れへの機械学習を用いた渦中心位置抽出手法の適用

#### 3.3.1 適用対象

本研究で検討したプラント配管向け渦中心位置抽出手法の妥当性を検証するために、図3.4に示すエルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として流れ解析を実施し、得られた解析結果に対して渦中心位置抽出手法を適用した。模擬配管系統の配管口径 $D$ は0.5[m]であり、分岐と曲率半径が $1D$ であるエルボを間隔 $1D$ で接続し、上流側に長さ $10D$ の直管、下流側に長さ $25D$ の直管を配置した。エルボと接続していない分岐下流側の流路は閉止としている。

流れ計算には図3.4に示す分割数818,000の計算格子を用い、解析時間は100[s]とし、0.1[s]間隔で結果を出力した。流れ解析の流体ソルバーとしてOpenFOAM[86]を用いた。また、流入流速は4.0[m/s]、レイノルズ数は $10^7$ であり、乱流モデルとして $k-\varepsilon$ モデルを用いた。

NNモデルはKeras[95]、TensorFlow[96]を用いて全結合型ニューラルネットワークとして構築した。エルボ下流の直管を対象として、流れ解析結果から、配管断面を半径方向に40、周方向に80に均等分割した格子(格子数3,200)に対する流速・圧力分布を作成し、学習フェーズでの訓練データ、予測フェーズでの入力データとして用いた。また、学習フェーズでは、直管の管軸方向のサンプリング数を50、時間方向のサンプリング数を1,000として、全体で配管断面数50,000の流速・圧力分布を訓練データとして用いた。NNモデルの入力層のノード数 $NP_i$ は、 $NP_i = 3,200 \times 3 = 9600$ であり、出力層のノード数 $NP_o$ は、渦中心数予測NNモデルでは $NP_o = N_{max} + 1$ 、 $N$ 個の渦中心を対象とした渦中心位置予測NNモデルでは $NP_o = 3 \times N$ である。本計算では、渦中心数の最大値 $N_{max}$ は $N_{max} = 2$ とした。また、中間層は2層とし、中間層のノード数はそれぞれ3200,1066とした。

#### 3.3.2 数式モデルによる渦中心位置計算結果

流れ計算において、分岐とエルボでの流路の曲がりの影響でエルボ下流の直管にて旋回流れが発生し、旋回流れの影響により、流れは非定常流れとなった。流れ解析結果に対して、3.2節で説明した数式モデルによる渦中心位置計算手法を適用し、渦中心位置と回転速度を算出した。図3.5に時刻100[s]における渦中心位置と回転速度を可視化した結果を示す。図3.5において、渦中心位置の色は回転速度の大きさを示している。エルボから下流側の直管

出口に向かってらせん状に伸びる渦が抽出された。本数式モデルにより算出した渦中心位置と回転速度から、各配管断面における渦中心位置と回転速度を算出し、学習フェーズでの教師データとして用いた。

### 3.3.3 NN モデルによる渦中心位置抽出結果

配管断面の流速・圧力分布、渦中心位置、回転速度を訓練データとしてNNモデルを学習させた際の誤差の推移を図3. 6に示す。ここで、渦中心数予測NNモデルに対する誤差 $E_n$ は式(3.3.1)に示す交差エントロピー誤差により計算し、渦中心位置予測NNモデルに対する誤差 $E_p$ は式(3.3.2)に示す2乗和誤差により計算した。

$$E_n = - \sum_i t_i \log(y_i) \quad (3.3.1)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i (y_i - t_i)^2 \quad (3.3.2)$$

式(3.3.1)、式(3.3.2)において、 $y_i$ はNNモデルの出力、 $t_i$ は教師データである。図3. 6より、学習回数が10回程度で誤差は一定値となったため、学習回数を10回としてNNモデルを構築した。

学習にて構築したNNモデルを用いて、配管断面の流速・圧力分布を入力値として、渦中心の数、渦中心位置、回転速度を予測した。表3. 1にNNモデルの出力値と数式モデルにより算出した値との差異を比較した結果を示す。表3. 1より、渦中心位置、回転速度については誤差2.3[%]以下で一致したが、渦中心の数について誤差は13.3[%]となった。図3. 7にNNモデルの時刻100[s]における渦中心位置と回転速度を可視化した結果を示す。数式モデルを用いて可視化した結果(図3. 5)と比較すると、数式モデルでは、エルボ下流の直管にて、管軸中心部のらせん状の渦ほかに、微細な渦が点在している。一方、NNモデルに対する結果ではらせん状の渦のみが存在している。微細な渦が存在すると配管断面での渦中心の数が増えることから、渦中心の数は数式モデルよりNNモデルの方が少なくなり、誤差が大きくなったと考察する。図3. 5中の微細な渦はノイズと考えられ、NNモデルの結果はノイズにより生じた渦を除去し、より妥当な結果が得られていると考察する。

次に、NNモデルによる計算時間短縮化の効果を確認するために、NNモデルと数式モデルを用いた場合のCPU時間を比較した結果を表3. 2に示す。表3. 2より、渦中心位置を計算す

るために必要なCPU時間は、数式モデルでは687[min]であったのに対して、NNモデルを用いた場合は5.3[min]となり、CPU時間は131倍高速化された。

### 3.3.4 流速基底の流れ構造可視化結果

流れ解析結果に対して固有直交分解法を適用して流速基底空間を抽出した後、各流速基底に対して3.2節で説明した数式モデルによる渦中心位置計算手法を適用し、渦中心位置と回転速度を算出した。図3. 8に時間平均流れ、および基底次数 $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ に対する渦中心位置と回転速度を可視化した結果を示す。いずれの流れに対してもエルボから下流側の直管出口に向かってらせん状に伸びる渦が抽出されているが、時間平均流れに対するらせん渦の空間スケールが最も大きく、基底の次数 $r$ の値が大きくなるに従い、らせん渦の空間スケールが小さくなり、複数のらせん渦が存在する構造となった。基底の次数 $r$ が大きくなると、基底が保有している流速場のエネルギーが減少する。渦のスケールが小さくなるほど渦の持つ運動エネルギーは小さくなることから、 $r$ が大きくなり、基底が保有している流速場のエネルギーが減少するに従い、小スケールの渦をより捉えるようになり、対応するらせん渦の構造が微細化したと考えられる。

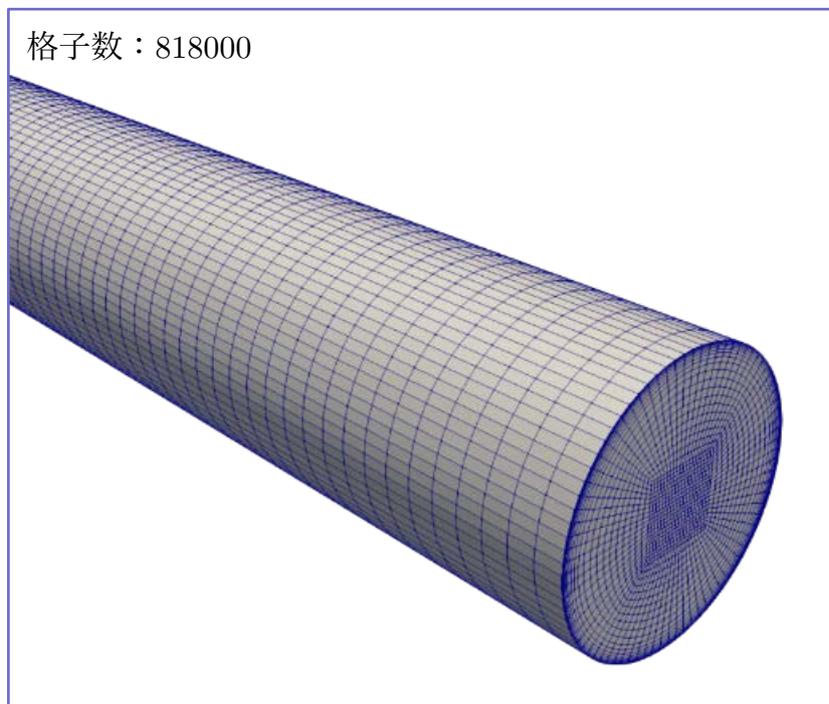
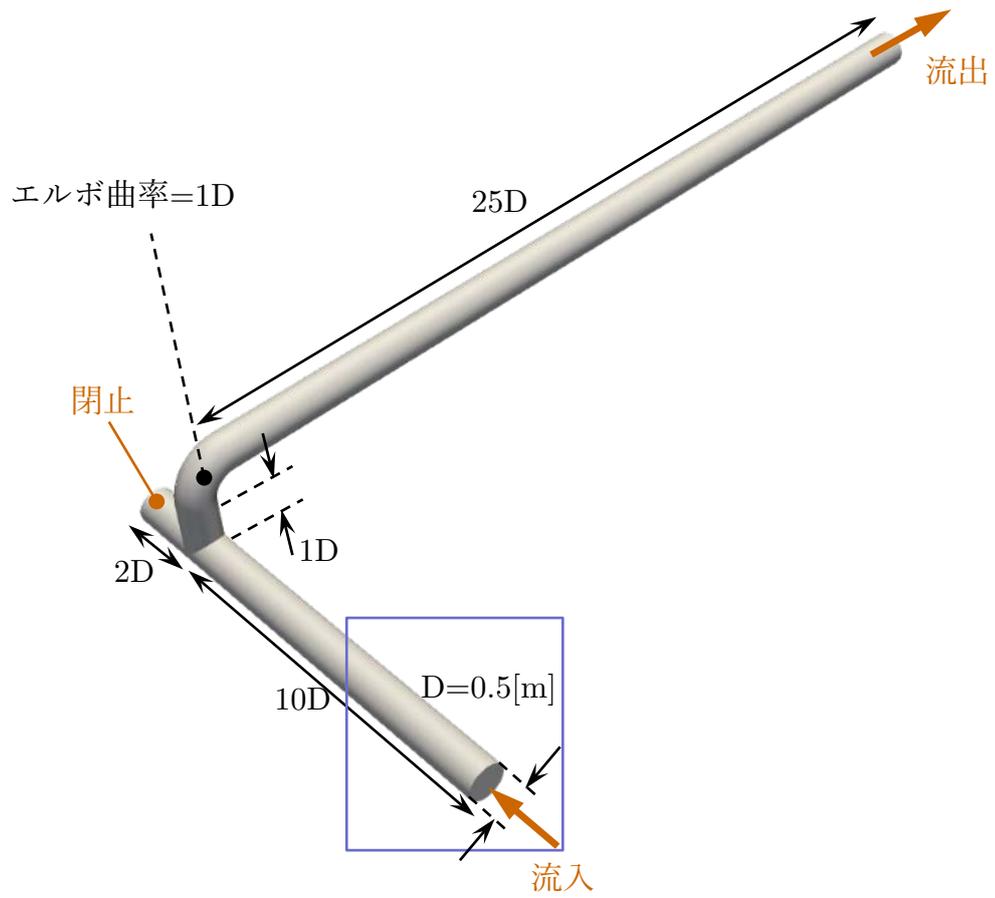
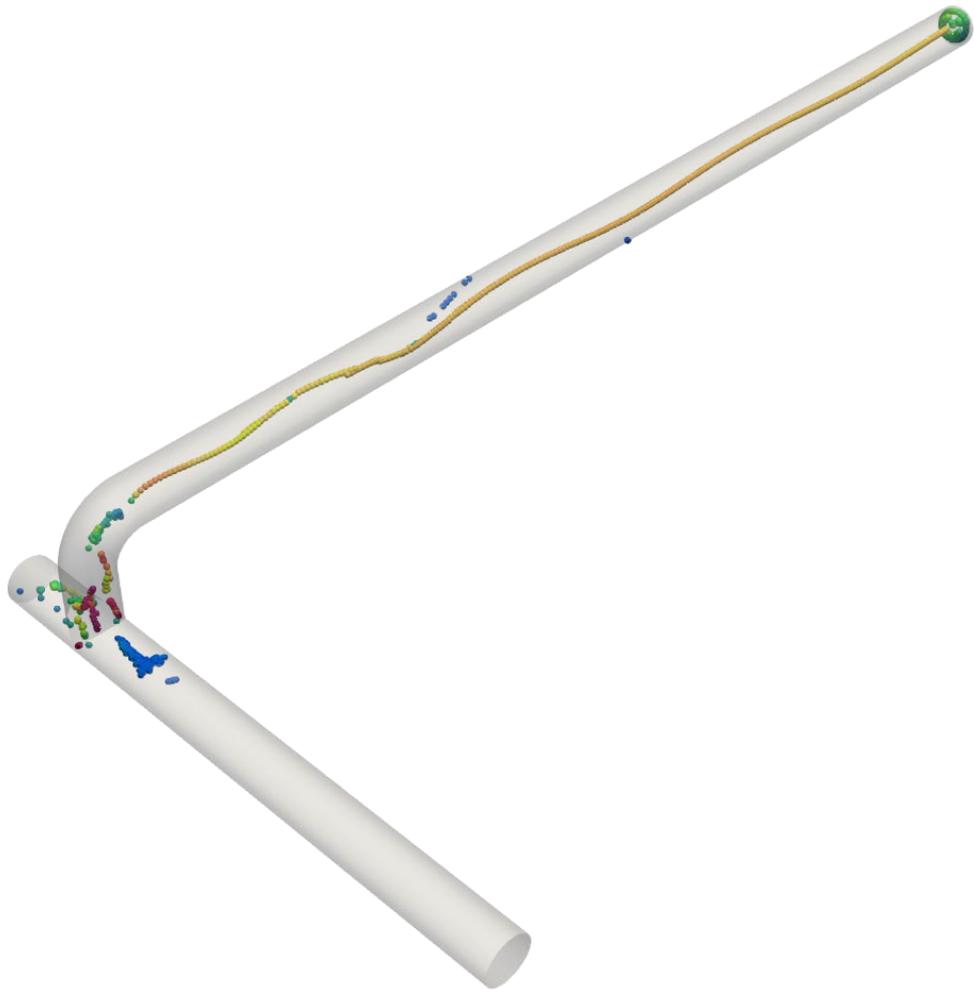


図 3. 4 模擬配管流れ解析対象



渦中心における回転速度[rad/s]



図 3.5 数式モデルによる渦中心位置計算結果

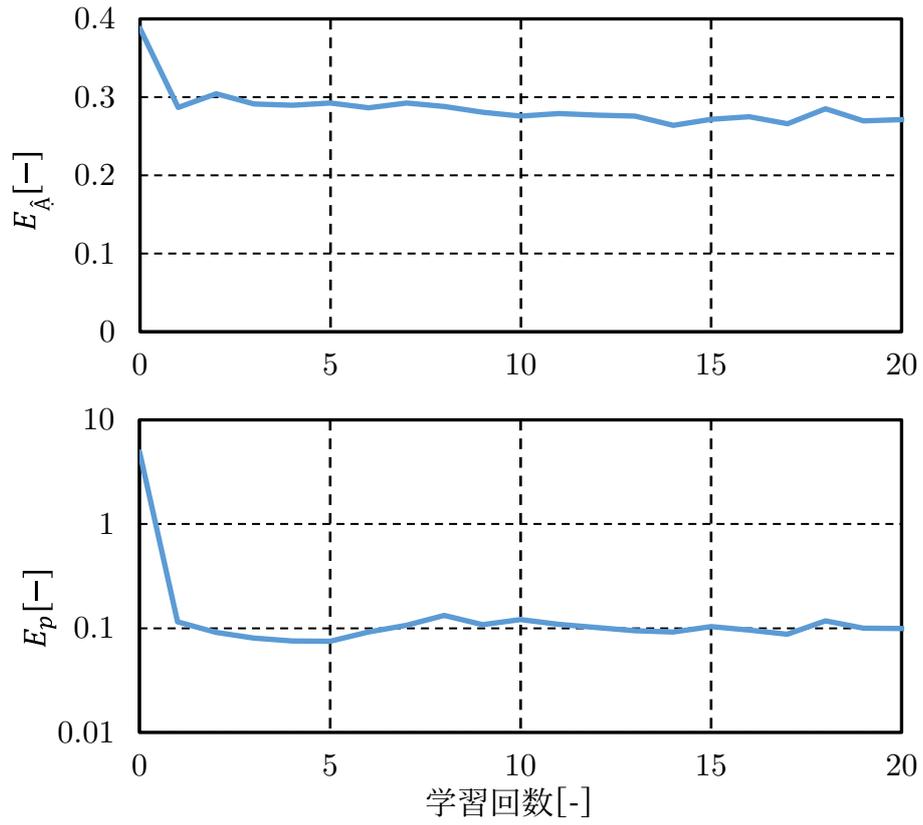


図 3. 6 学習過程における誤差の推移

表 3. 1 NN モデル精度

渦中心数 予測精度 [%]	渦中心位置予測精度[%]		
	渦中心位置 X座標	渦中心位置 Y座標	回転速度
13.3	1.1	1.5	2.3



図 3.7 NN モデルによる渦中心位置抽出結果

表 3.2 計算時間の比較

	NNモデルによる 渦中心位置抽出	数式モデルによる 渦中心位置計算
CPU 時間 [min]	5.3	687
CPU 時間加速率[-]	131	-

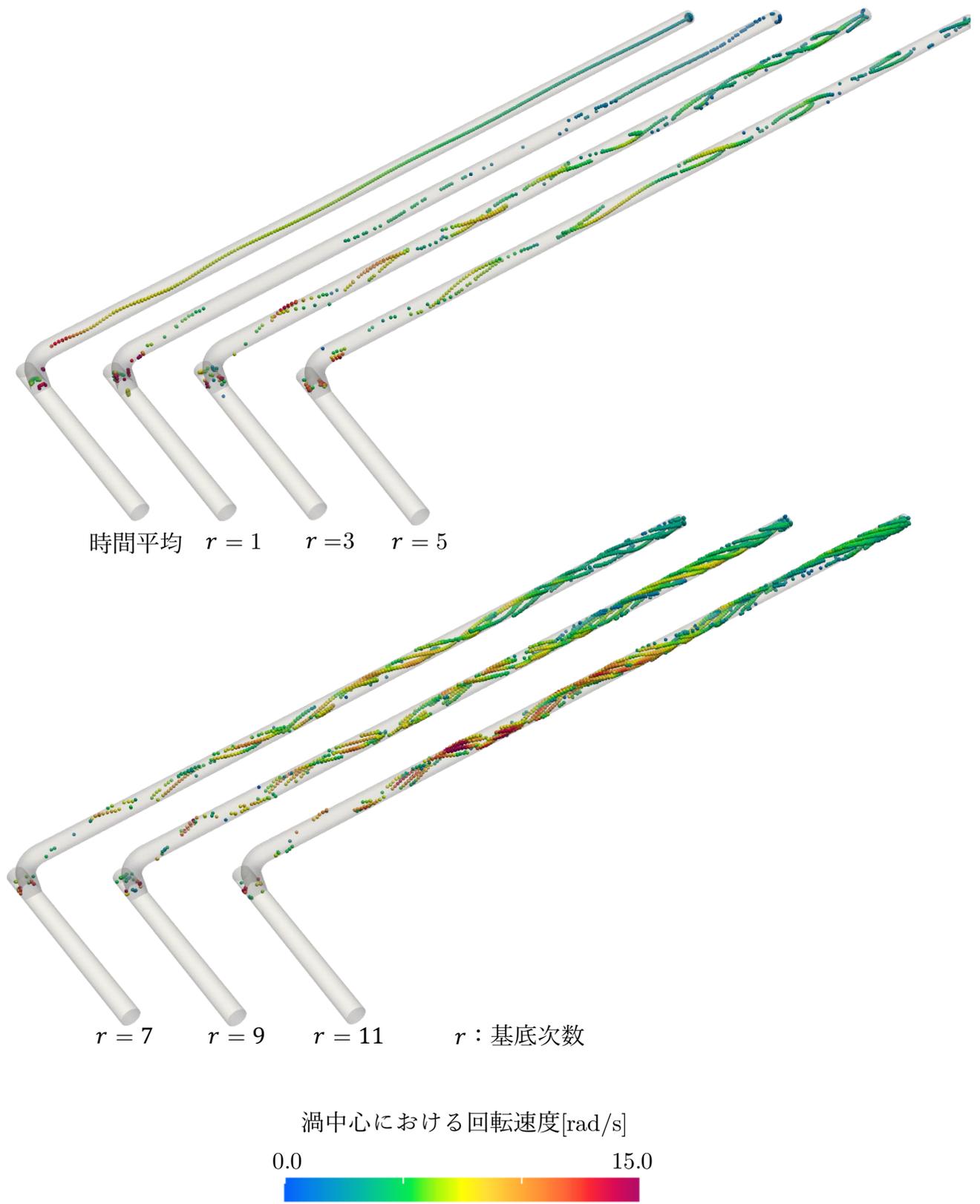


図 3. 8 流速基底の流れ構造

### 3.4 結論

プラントの配管系を対象とした流れ解析結果に対して、機械学習を用いて短時間に渦中心位置を抽出する手法を提案し、以下の結論を得た。

- (1) 機械学習により渦中心の数を予測するNNモデルと渦中心位置と回転速度を予測するNNモデルを構築し、配管断面の流速・圧力分布を入力値として、渦中心の数、渦中心位置、回転速度を予測する手法を提案した。
- (2) エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、流れ解析結果からNNモデルを学習し、配管断面の流速・圧力分布を入力値として、渦中心の数、渦中心位置、回転速度を予測した。数式モデルによる結果と比較して、NNモデルの結果はノイズにより生じた渦を除去し、より妥当な結果が得られていることを確認した。また、渦中心位置を計算するために必要なCPU時間は数学モデルに対して131倍加速されることを確認した。
- (3) 流れ解析結果に対して固有直交分解法を適用して流速基底空間を抽出した後、各流速基底に対して渦中心位置と回転速度を算出した。基底の次数が大きくなると、基底が保有している流速場のエネルギーが減少し、基底より抽出されるらせん渦の空間スケールが小さくなることを確認した。

## 第4章

# 基底空間上での Galerkin 射影による配管系流れ解析に対する縮約モデル構築手法の開発

### 4.1 緒言

本章では、基底空間上での Galerkin 射影による配管系流れ解析に対する縮約モデル構築手法を提案し、縮約モデルを用いた流れ解析の計算精度、計算時間短縮の効果を検討した結果について述べる。Galerkin 射影の非圧縮性流れ解析への適用では、これまで、主に層流条件での流れ解析に適用されている [68]～[73]。乱流条件での流れ解析への適用例は少なく [68], [74]～[76]、配管内旋回流れに適用した例は見当たらない。また、縮約モデルを構築する手法としては、まず、NS (Navier-Stokes) 方程式を基礎式として、Galerkin 射影により流速の基底空間に射影し縮約モデルを構築する手法が提案された [68]。本手法では、流速の基底空間に射影した NS 方程式の残差がゼロとなる条件より縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流速を計算する。圧力は流速の基底空間を用いて近似計算される。しかしながら、本手法では、基礎式に連続の式を含まないため、縮約モデルを用いた非定常計算において、縮約モデルより計算した流速が質量バランス式を満足しなくなり、計算精度が低下する例が報告されている [69]。そこで、この課題を解決するために、NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として、Galerkin 射影により流速と圧力の基底空間に射影し縮約モデルを構築する手法が提案されている [69], [71]。本手法では NS 方程式に連続の式を代入して圧力ポアソン方程式を導き、連続の式の代わりに圧力ポアソン方程式を基礎式に組み込んでいる。また、流速の基底空間に射影した NS 方程式の残差と、圧力の基底空間に射影した圧力ポアソン方程式の残差がゼロとなる条件より縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流速と圧力を計算する。本研究では、配管系流れ解析に対する縮約モデル構築手法を提案するとともに、NS 方程式と圧力ポアソンを基礎式として縮約モデルを構築する手法の適用可能性について検討する。

以降、表 4.1 に示すように、4.2 節では層流を対象として NS 方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法を述べ、4.3 節では層流を対象として NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式と

する縮約モデル構築方法を述べる。次に、4.4節では乱流を対象としてRANS方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法を述べ、4.5節では、乱流を対象としてRANS方程式と圧力ポアソン法手式を基礎式とする縮約モデル構築方法を述べる。4.6節、4.7節、4.8節では、縮約モデル適用の効果を検証するために、層流および乱流条件でのキャビティ流れ解析と、乱流条件での模擬配管に対する流れ解析に縮約モデルを適用した。

表 4.1 縮約モデル構築方法

節	対象	基礎式	未知数
4.2	層流	・ NS方程式	流速、圧力
4.3		・ NS方程式 ・ 圧力ポアソン方程式	
4.4	乱流	・ RANS方程式	流速、圧力、渦粘性係数
4.5		・ RANS方程式 ・ 圧力ポアソン方程式	

## 4.2 NS 方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法

本節では層流を対象として、NS方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法[68]を説明する。

### 4.2.1 基礎式

非圧縮性流れに対して、式(4.2.1)、式(4.2.2)に示す連続の式とNS方程式が成り立つ。

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*) = \nabla \cdot [-p^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)] \quad (4.2.2)$$

式(4.2.1)、式(4.2.2)において、 $\vec{u}^*$ は流速、 $p^*$ は静圧を密度で割った圧力、 $\nu$ は動粘性係数、 $t$ は時間、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 $\otimes$ はテンソル積、 $\nabla$ は勾配、 $\nabla \cdot$ は発散である。本節で説明する縮約モデル構築方法では、式(4.2.2)に示すNS方程式を基礎式として、流速 $\vec{u}^*$ と圧力 $p^*$ を未知数とする。また、本研究では、境界面 $S$ は壁面 $S_{wall}$ 、流入面 $S_{in}$ 、流出面 $S_{out}$ から構成されるものとし、それぞれの境界面に対して以下の境界条件を与える。

$$\vec{u}^* = \vec{0} \text{ on } S_{wall} \quad (4.2.3)$$

$$\vec{u}^* = \vec{f}(\vec{x}) \text{ on } S_{in} \quad (4.2.4)$$

$$[-p^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)] \cdot \vec{n} = \vec{0} \text{ on } S_{out} \quad (4.2.5)$$

式(4.2.5)において、 $\vec{n}$ は境界面に対する単位法線ベクトルである。

### 4.2.2 Galerkin 射影の適用

2.2節で説明した基底空間構築手法に従い、付録Cに示すように、3次元流体解析により算出される流速ベクトル $\vec{u}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ の変動成分 $\vec{u}(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ にSnapshot PODを適用し、式(4.2.6)、式(4.2.7)より流速の基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を抽出する。ここで、 $r_u$ は流速の基底数である。

$$\mathbf{U}^T \mathbf{W} \mathbf{U} \vec{v}_{ui} = \lambda_{ui} \vec{v}_{ui} \quad (4.2.6)$$

$$\vec{\varphi}_i = \mathbf{U} \vec{v}_{ui} / \sqrt{\lambda_{ui}}, i = 1, \dots, r_u \quad (4.2.7)$$

式(4.2.6)、式(4.2.7)中のUは、流速ベクトル $\vec{u}^*$ を用いて、付録Cに示す式(C.3)にて定義される行列である。また、流速と同様にして、付録Cに示すように、3次元流体解析により算出される圧力 $p^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ の変動成分 $p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ にSnapshot PODを適用し、式(4.2.8)、式(4.2.9)より圧力の基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ を抽出する。ここで、 $r_p$ は圧力の基底数である。

$$P^T W P \vec{v}_{pi} = \lambda_{pi} \vec{v}_{pi} \quad (4.2.8)$$

$$\vec{\chi}_i = P \vec{v}_{pi} / \sqrt{\lambda_{pi}}, i = 1, \dots, r_p \quad (4.2.9)$$

式(4.2.8)、式(4.2.9)中のPは、圧力 $p^*$ を用いて、付録Cに示す式(C.8)にて定義される行列である。本節で説明する縮約モデル構築方法では、 $\vec{v}_{pi} \approx \vec{v}_{ui}, \lambda_{pi} \approx \lambda_{ui}$ と近似し、式(4.2.8)、式(4.2.9)の代わりに式(4.2.10)より $\vec{\chi}_i$ を計算する。

$$\vec{\chi}_i = P \vec{v}_{ui} / \sqrt{\lambda_{ui}}, i = 1, \dots, r_u \quad (4.2.10)$$

ここで、 $\vec{\varphi}_i, \vec{\chi}_i$ は流速、圧力の変動成分に対する空間方向のモード、 $\vec{v}_{ui}, \vec{v}_{pi}$ は流速、圧力の変動成分に対する時間方向のモード、 $\lambda_{ui}, \lambda_{pi}$ は各モードの大きさを表している。 $\vec{v}_{pi} \approx \vec{v}_{ui}, \lambda_{pi} \approx \lambda_{ui}$ という近似は、流速と圧力の変動成分に関して、時間方向のモードと各モードの大きさが等しいと仮定することを意味している。

流速の変動成分を流速基底 $\vec{\varphi}_i$ の線形結合にて近似する。

$$\vec{u}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \cong \vec{u}_{ROM}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{\vec{u}}(\vec{x}_\gamma) + \sum_{j=1}^{r_u} a_j(Re_\alpha, t_\beta) \vec{\varphi}_j(\vec{x}_\gamma) \quad (4.2.11)$$

式(4.2.11)中の $a_j$ は流速基底に対する未知の結合係数である。また、圧力の変動成分を圧力基底 $\vec{\chi}_i$ の線形結合にて近似する。

$$p^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \cong p_{ROM}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{p}(\vec{x}_\gamma) + \sum_{j=1}^{r_u} a_j(Re_\alpha, t_\beta) \vec{\chi}_j(\vec{x}_\gamma) \quad (4.2.12)$$

式(4.2.12)において、圧力基底に対する結合係数は流速基底に対する結合係数 $a_j$ と等しいと近似している。基礎式であるNS方程式(式(4.2.2))の $\vec{u}^*, p^*$ に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ を代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) - \nabla \cdot [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \\ = \bar{\vec{R}}_{NS} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

式(4.2.13)中の $\vec{R}_{NS}$ は、NS方程式に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ を代入した結果生じる残差ベクトルである。式(4.2.13)にGalerkin射影を適用し、流速基底 $\vec{\varphi}_i, i = 1, \dots, r_u$ との内積をとることで、基礎方程式であるNS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影する。

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\varphi}_i, \vec{R}_{NS} \rangle &= 0 \\
\iff \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle = 0 \\
\iff \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

式(4.2.14)中の $\langle \cdot \rangle$ は式(4.2.15)で定義される内積である。

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \int_V \vec{a} \cdot \vec{b} dV \tag{4.2.15}$$

式(4.2.15)の $V$ は解析領域である。式(4.2.14)は、流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影した基礎方程式の残差ベクトル $\vec{R}_{NS}$ がゼロとなることを表しており、この条件から流速基底に対する結合係数 $a_j$ に関する方程式を導出し、縮約モデルを構築する。ここで、式(4.2.14)に、式(4.2.3)～式(4.2.5)に示す境界条件を組み込むために、式(4.2.14)を弱形式[97]に変形する。式(4.2.14)の左辺第3項と左辺第4項にガウスの発散定理[98]を適用すると、以下のように変形される。

$$\langle \vec{\varphi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle = -\langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle + \langle \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \vec{n} \rangle_S \tag{4.2.16}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle \\
&= -\langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \vec{n} \rangle_S
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

式(4.2.16)、式(4.2.17)中の $\langle \cdot \rangle_S$ は式(4.2.18)で定義される内積である。

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_S \equiv \int_S \vec{a} \cdot \vec{b} dS \tag{4.2.18}$$

式(4.2.16)、式(4.2.17)を式(4.2.14)に代入し整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned}
&\left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
&\quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\varphi}_i, [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \cdot \vec{n} \rangle_S = 0
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

式(4.2.14)から式(4.2.19)への導出過程の詳細を付録Dに示す。ここで、4.2.1項に示したように、境界面 $S$ は壁面 $S_{wall}$ 、流入面 $S_{in}$ 、流出面 $S_{out}$ から構成される。このうち、壁面 $S_{wall}$ 、流入面 $S_{in}$ では、流速は時間変化せず流速の変動成分 $\vec{u}$ はゼロとなるので、流速基底 $\vec{\varphi}_i$ もゼロであり、これより、 $S_{wall}, S_{in}$ では式(4.2.19)の左辺第5項はゼロとなる。また、流出面 $S_{out}$ では式(4.2.5)が成り立つので、 $S_{out}$ でも左辺第5項はゼロとなる。従って、境界面 $S$ では左辺第5項はゼロとなるので、NS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、式(4.2.3)～式(4.2.5)に示す境界条件を組み込んだ式は以下となる。

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\ + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

式(4.2.20)に式(4.2.11)、式(4.2.12)を代入して整理すると、以下に示す結合係数 $a_i$ に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij} a_j + \overline{C3}_{ij} a_j + C_{ijk} a_j a_k - \bar{A}_i - A_{ij} a_j + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j + \nu \overline{BT}_i \\ + \nu BT_{ij} a_j = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, r_u \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

式(4.2.21)中の係数 $A, B, C$ は、流速基底 $\vec{\varphi}_i$ 、圧力基底 $\vec{\chi}_i$ 、流速平均成分 $\bar{\vec{u}}$ 、圧力平均成分 $\bar{p}$ を用いて以下にて計算される。

$$A_{ij} \equiv \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \vec{\chi}_j \rangle \quad (4.2.22)$$

$$\bar{A}_i \equiv \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \bar{p} \rangle \quad (4.2.23)$$

$$B_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nabla \vec{\varphi}_j \rangle \quad (4.2.24)$$

$$\bar{B}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nabla \bar{\vec{u}} \rangle \quad (4.2.25)$$

$$BT_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nabla \vec{\varphi}_j)^T \rangle \quad (4.2.26)$$

$$\overline{BT}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nabla \bar{\vec{u}})^T \rangle \quad (4.2.27)$$

$$C_{ijk} \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k) \rangle \quad (4.2.28)$$

$$\overline{C1}_i \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \rangle \quad (4.2.29)$$

$$\overline{C2}_{ij} \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u}) \rangle \quad (4.2.30)$$

$$\overline{C3}_{ij} \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j) \rangle \quad (4.2.31)$$

式(4.2.20)から式(4.2.21)～式(4.2.31)への導出過程の詳細を付録Eに示す。式(4.2.21)の時間微分項を後退オイラー法で離散化すると、 $a_j^{n+1}$ に関する $r_u$ 個の非線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij} a_j^{n+1} + \overline{C3}_{ij} a_j^{n+1} + C_{ijk} a_j^{n+1} a_k^{n+1} - \bar{A}_i - A_{ij} a_j^{n+1} \\ + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j^{n+1} + \nu \overline{BT}_i + \nu BT_{ij} a_j^{n+1} = 0 \\ \Leftrightarrow \left[ I_{ij} + \Delta t [\nu (B_{ij} + BT_{ij}) + \overline{C2}_{ij} + \overline{C3}_{ij} + C_{ijk} a_k^{n+1} - A_{ij}] \right] a_j^{n+1} \\ = a_i^n + \Delta t [-\nu (\bar{B}_i + \overline{BT}_i) - \overline{C1}_i + \bar{A}_i] \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

式(4.2.32)中の $I_{ij}$ は単位行列である。各時間ステップで式(4.2.32)を解くことで流速基底の結合係数 $a_j^{n+1}$ が得られ、 $a_j^{n+1}$ を式(4.2.11)、式(4.2.12)に代入することにより、各時間ステップでの流速、圧力が計算される。

次に、 $a_j^{n+1}$ の初期値 $a_j^0$ の計算方法について説明する。式(4.2.11)に $t_\beta = 0$ を代入して、

$$\begin{aligned} \vec{u}^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) = \vec{u}(\vec{x}_\gamma) + \sum_{j=1}^{r_u} a_j^0(Re_\alpha, 0) \vec{\varphi}_j(\vec{x}_\gamma) \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r_u} a_j^0(Re_\alpha, 0) \vec{\varphi}_j(\vec{x}_\gamma) = \vec{u}^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) - \vec{u}(\vec{x}_\gamma) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

式(4.2.24)に対して $\vec{\varphi}_i(\vec{x}_\gamma)$ との内積をとると、

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{j=1}^{r_u} a_j^0(Re_\alpha, 0) \vec{\varphi}_j(\vec{x}_\gamma), \vec{\varphi}_i(\vec{x}_\gamma) \right\rangle = \langle \vec{u}^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) - \vec{u}(\vec{x}_\gamma), \vec{\varphi}_i(\vec{x}_\gamma) \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r_u} [a_j^0(Re_\alpha, 0) \langle \vec{\varphi}_j(\vec{x}_\gamma), \vec{\varphi}_i(\vec{x}_\gamma) \rangle] = \langle \vec{u}^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) - \vec{u}(\vec{x}_\gamma), \vec{\varphi}_i(\vec{x}_\gamma) \rangle \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r_u} [a_j^0(Re_\alpha, 0) \delta_{ij}] = \langle \vec{u}^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) - \vec{u}(\vec{x}_\gamma), \vec{\varphi}_i(\vec{x}_\gamma) \rangle \\ \Leftrightarrow a_j^0(Re_\alpha, 0) = \langle \vec{u}^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) - \vec{u}(\vec{x}_\gamma), \vec{\varphi}_j(\vec{x}_\gamma) \rangle \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

式(4.2.25)より、 $a_j^{n+1}$ の初期値 $a_j^0$ を計算する。

## 4.3 NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法

本節では層流を対象として、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法[69], [71]を説明する。

### 4.3.1 基礎式

式(4.2.2)の両辺の発散をとる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{u}^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] &= \nabla \cdot [\nabla \cdot [-p^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{u}^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \\ &= -\nabla \cdot (\nabla p^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\nu[\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T])] \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

式(4.3.1)の左辺第1項は式(4.2.1)よりゼロとなる。また、式(4.3.1)の右辺第2項は以下のように変形される[98]。

$$\nabla \cdot [\nabla \cdot (\nu[\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T])] = \nu \nabla \cdot [2\nabla \cdot \nabla \vec{u}^* - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] \quad (4.3.2)$$

式(4.3.2)の右辺第1項は式(4.2.1)よりゼロとなる。また、任意ベクトル $\vec{x}$ に対して、 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{x}) = 0$ であるので、右辺第2項もゼロとなる。従って、式(4.3.1)の右辺第2項はゼロとなるので、式(4.3.1)の両辺の発散をとることで、以下に示す圧力に関するポアソン方程式が得られる。

$$\nabla \cdot (\nabla p^*) = -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \quad (4.3.3)$$

次に、境界面 $S_{ne}$ 上で、境界面の法線方向 $\vec{n}$ に対して式(4.2.2)を考慮することで、圧力に対するノイマン境界条件を導く。

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t} + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] = -\vec{n} \cdot \nabla p^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nu[\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T])] \text{ on } S_{ne} \quad (4.3.4)$$

式(4.3.4)の $S_{ne}$ は圧力ノイマン境界条件を設定する境界面である。ここで、境界面 $S_{ne}$ 上では $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{n} \cdot \vec{u}^*) = 0$ であると仮定し、式(4.3.4)の左辺第1項をゼロとする。また、式(4.3.4)の右辺第2項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nu[\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T])] \\
& = \nu \vec{n} \cdot [2\nabla \cdot \nabla \vec{u}^* - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] \\
& = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)]
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

従って、圧力ノイマン境界条件は以下となる。

$$\vec{n} \cdot \nabla p^* = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] - \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \text{ on } S_{ne} \tag{4.3.6}$$

本節で説明する縮約モデル構築方法では、式(4.2.2)に示すNS方程式と、式(4.3.3)に示す圧力ポアソン方程式を基礎式として、流速 $\vec{u}^*$ と圧力 $p^*$ を未知数とする。また、4.2節で述べたように、本研究では、境界面 $S$ は壁面 $S_{wall}$ 、流入面 $S_{in}$ 、流出面 $S_{out}$ から構成されるものとし、式(4.2.3)～式(4.2.5)に示す境界条件の他に、圧力に関して以下の境界条件を与える。

$$\vec{n} \cdot \nabla p^* = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] - \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \text{ on } S_{ne} = S_{wall} \cup S_{in} \tag{4.3.7}$$

$$p^* = p_D \text{ on } S_{out} \tag{4.3.8}$$

### 4.3.2 Galerkin 射影の適用

4.2節で述べたNS方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法と同様に、本節で説明する縮約モデル構築手法においても、流速に関しては、式(4.2.6)、式(4.2.7)にて基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を抽出し、式(4.2.11)にて流速の変動成分を流速基底 $\vec{\varphi}_i$ の線形結合にて近似する。一方、圧力に関しては、式(4.2.8)、式(4.2.9)にて圧力の基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ を抽出し、以下に示す式にて圧力の変動成分を圧力基底 $\vec{\chi}_i$ の線形結合にて近似する。

$$p^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \cong p_{ROM}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{p}(\vec{x}_\gamma) + \sum_{j=1}^{r_p} b_j(Re_\alpha, t_\beta) \vec{\chi}_j(\vec{x}_\gamma) \tag{4.3.9}$$

式(4.3.9)中の $b_j$ は圧力基底に対する未知の結合係数である。ここで、Galerkin射影を適用し、基礎方程式であるNS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影する。NS方程式を流速基底空間に射影し、式(4.2.3)～式(4.2.5)に示す境界条件を組み込んだ式は4.2節に示す式(4.2.20)となるので、ここでは説明を省略する。以下では、Galerkin射影を圧力ポアソン方程式に適用して、圧力基底空間に射影する方法について説明する。

基礎式である圧力ポアソン方程式(式(4.3.3))の $\vec{u}^*, p^*$ に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ を代入する。

$$\nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] = \vec{R}_{PE} \quad (4.3.10)$$

式(4.3.10)中の $\vec{R}_{PE}$ は、圧力ポアソン方程式に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ を代入した結果生じる残差ベクトルである。式(4.3.10)にGalerkin射影を適用し、圧力基底 $\vec{\chi}_i, i = 1, \dots, r_p$ との内積をとることで、基礎方程式である圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影する。

$$\begin{aligned} \langle \vec{\chi}_i, \vec{R}_{PE} \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

ここで、式(4.3.11)に、式(4.3.7)、式(4.3.8)に示す境界条件を組み込むために、式(4.3.11)を弱形式に変形する。式(4.3.11)の左辺第1項と左辺第2項にガウスの発散定理を適用すると、以下のように変形される。

$$\langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) \rangle = -\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* \rangle_S \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle \\ = -\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

式(4.3.12)、式(4.3.13)を式(4.3.11)に代入し整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\ - \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S = 0 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

境界面 $S$ のうち、流出面 $S_{out}$ では、圧力は時間変化せず圧力の変動成分 $p$ はゼロとなるので、圧力基底 $\vec{\chi}_i$ もゼロとなる。これより、式(4.3.14)の左辺第3項は以下となる。

$$\begin{aligned} \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\ = \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_{S_{ne}} \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

式(4.3.7)を式(4.3.15)に代入して整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\ = -\nu \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_{S_{ne}} \\ = \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

式(4.3.16)を式(4.3.14)に代入して整理すると、圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影し、式(4.3.7)、式(4.3.8)に示す境界条件を組み込んだ式が得られる。

$$\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} = 0 \quad (4.3.17)$$

式(4.3.11)から式(4.3.17)への導出過程の詳細について付録Fに示す。

式(4.2.20)と式(4.3.17)に式(4.2.11)、式(4.3.9)を代入して整理すると、以下に示す結合係数  $a_i, b_l$  に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij} a_j + \overline{C3}_{ij} a_j + C_{ijk} a_j a_k - \bar{A}_i - A_{im} b_m + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j + \nu \overline{BT}_i \\ + \nu BT_{ij} a_j = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, r_u, m = 1, \dots, r_p \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_l + E_{lm} b_m + \overline{F1}_l + \overline{F2}_{lj} a_j + \overline{F3}_{lj} a_j + F_{ljk} a_j a_k - \nu \bar{G}_l - \nu G_{lj} a_j = 0 \\ i, j, k = 1, \dots, r_u, l, m = 1, \dots, r_p \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

式(4.3.18)中の係数  $A, B, C$  は式(4.2.22)~式(4.2.31)にて計算される。また、(4.3.19)中の係数  $E, F, G$  は、流速基底  $\vec{\varphi}_i$ 、圧力基底  $\vec{\chi}_i$ 、流速平均成分  $\vec{u}$ 、圧力平均成分  $\bar{p}$  を用いて以下にて計算される。

$$E_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \vec{\chi}_j \rangle \quad (4.3.20)$$

$$\bar{E}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \bar{p} \rangle \quad (4.3.21)$$

$$F_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k) \rangle \quad (4.3.22)$$

$$\overline{F1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \rangle \quad (4.3.23)$$

$$\overline{F2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u}) \rangle \quad (4.3.24)$$

$$\overline{F3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j) \rangle \quad (4.3.25)$$

$$G_{ij} \equiv \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{\varphi}_j \rangle_{S_{ne}} \quad (4.3.26)$$

$$\bar{G}_i \equiv \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u} \rangle_{S_{ne}} \quad (4.3.27)$$

式(4.2.20)、式(4.3.17)から式(4.3.18)~式(4.3.27)への導出過程の詳細を付録Gに示す。4.2.2節で述べた方法と同様にして、式(4.3.18)の時間微分項を後退オイラー法で離散化し整理する

と、 $a_j^{n+1}, b_m^{n+1}$ に関する $r_u + r_p$ 個の非線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{ij} + \Delta t [\nu(B_{ij} + BT_{ij}) + \overline{C2}_{ij} + \overline{C3}_{ij} + C_{ijk}a_k^{n+1}] & -\Delta t A_{im} \\ -\nu G_{lj} + \overline{F2}_{lj} + \overline{F3}_{lj} + F_{ljk}a_k^{n+1} & E_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j^{n+1} \\ b_m^{n+1} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} a_i^n + \Delta t [-\nu(\overline{B}_i + \overline{BT}_i) - \overline{C1}_i + \overline{A}_i] \\ \nu \overline{G}_l - \overline{E}_l - \overline{F1}_l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

次に、 $a_j^{n+1}, b_m^{n+1}$ の初期値 $a_j^0, b_m^0$ の計算方法について説明する。 $a_j^0$ については、4.2.2節で述べた方法と同様であり説明を省略する。 $b_m^0$ については、式(4.3.9)に $t_\beta = 0$ を代入して、4.2.2節で述べた方法と同様にして、式(4.3.29)より計算する。

$$b_m^0(Re_\alpha, 0) = \langle p^*(Re_\alpha, 0, \vec{x}_\gamma) - \bar{p}(\vec{x}_\gamma), \vec{\chi}_m(\vec{x}_\gamma) \rangle \quad (4.3.29)$$

## 4.4 RANS 方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法

本節では乱流を対象として、RANS(Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equation, RANS)方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法[69]を説明する。

### 4.4.1 基礎式

式(4.2.1)に示すNS方程式に対して、レイノルズ平均[99]を適用し、レイノルズ応力を渦粘性モデル[99]でモデル化することで、以下に示すRANS方程式が得られる。

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*) = \nabla \cdot [-p^* \mathbf{I} + (\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)] \quad (4.4.1)$$

$$p^* = \frac{p_s^*}{\rho} + \frac{2}{3} k^* \quad (4.4.2)$$

式(4.4.2)の $p_s^*$ は静圧、 $\rho$ は密度、 $k^*$ は乱流エネルギーである。本節で説明する縮約モデル構築方法では、式(4.4.1)に示すRANS方程式を基礎式として、流速 $\vec{u}^*$ 、圧力 $p^*$ 、渦粘性係数 $\nu_t$ を未知数とする。本アプローチでは、乱流モデルの変数（例えば $k-\varepsilon$ モデルでは、乱流エネルギー $k^*$ と乱流散逸率 $\varepsilon^*$ ）に対する方程式を基礎式に含めず、代わりに乱流モデル変数から計算される渦粘性係数 $\nu_t$ を縮約モデルにて計算する。 $\nu_t$ の計算方法は乱流モデルにより異なるが、 $\nu_t$ を含むRANS方程式の形は乱流モデルに対して不変である。従って、RANS方程式を基礎式として $\nu_t$ を計算することにより、乱流モデルに依存することなく汎用的に縮約モデルを乱流解析に適用できる。

RANS方程式に対する境界条件は4.2.1節で述べた境界条件と同一であり、式(4.4.3)~式(4.4.5)にて与えるものとする。

$$\vec{u}^* = \vec{0} \text{ on } S_{wall} \quad (4.4.3)$$

$$\vec{u}^* = \vec{f}(\vec{x}) \text{ on } S_{in} \quad (4.4.4)$$

$$[-p^* \mathbf{I} + (\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)] \cdot \vec{n} = \vec{0} \text{ on } S_{out} \quad (4.4.5)$$

#### 4.4.2 Galerkin 射影の適用

4.2節で述べたNS方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法と同様に、本節で説明する縮約モデル構築手法においても、流速に関しては、式(4.2.6)、式(4.2.7)にて基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を抽出し、式(4.2.6)にて流速の変動成分を流速基底 $\vec{\varphi}_i$ の線形結合にて近似する。また、圧力に関しても、式(4.2.10)にて基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を抽出し、式(4.2.11)にて圧力の変動成分を圧力基底 $\vec{\chi}_i$ の線形結合にて近似する。次に、渦粘性係数については、付録Hに示すように、3次元流体解析により算出される渦粘性係数 $\nu_t^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ の変動成分 $\nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ にSnapshot PODを適用し、式(4.4.6)、式(4.4.7)より渦粘性係数の基底空間 $\vec{\phi}_i (i = 1, \dots, r_v)$ を抽出する。ここで、 $r_v$ は渦粘性係数の基底数である。

$$N^T W N \vec{v}_{vi} = \lambda_{ni} \vec{v}_{vi} \quad (4.4.6)$$

$$\vec{\phi}_i = N \vec{v}_{vi} / \sqrt{\lambda_{vi}}, i = 1, \dots, r_v \quad (4.4.7)$$

式(4.4.6)、式(4.4.7)中のNは、渦粘性係数 $\nu_t^*$ を用いて、付録Hに示す式(H.3)にて定義される行列である。本節で説明する縮約モデル構築方法では、4.2.1節で述べた圧力基底計算の近似方法と同様して、 $\vec{v}_{vi} \approx \vec{v}_{ui}, \lambda_{vi} \approx \lambda_{ui}$ と近似し、式(4.4.6)、式(4.4.7)の代わりに式(4.4.8)より $\vec{\phi}_i$ を計算する。

$$\vec{\phi}_i = N \vec{v}_{ui} / \sqrt{\lambda_{ui}}, i = 1, \dots, r_u \quad (4.4.8)$$

また、渦粘性係数の変動成分を渦粘性係数基底 $\vec{\phi}_i$ の線形結合にて近似する。

$$\nu_t^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \cong \nu_{tROM}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{\nu}_t(\vec{x}_\gamma) + \sum_{j=1}^{r_u} a_j(Re_\alpha, t_\beta) \vec{\phi}_j(\vec{x}_\gamma) \quad (4.4.9)$$

式(4.4.9)において、渦粘性係数基底に対する結合係数は流速基底に対する結合係数 $a_j$ と等しいと近似している。基礎式であるRANS方程式(式(4.4.1))の $\vec{u}^*, p^*, \nu_t^*$ に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*, \nu_{tROM}^*$ を代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \\ & - \nabla \cdot [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + (\nu + \nu_{tROM}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] = \vec{R}_{RANS} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

式(4.4.10)中の $\vec{R}_{RANS}$ は、RANS方程式に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*, \nu_{tROM}^*$ を代入した結果生じる残差ベクトルである。式(4.4.10)にGalerkin射影を適用し、流速基底 $\vec{\varphi}_i, i = 1, \dots, r_u$ との内積を

とすることで、基礎方程式であるRANS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影する。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\varphi}_i, \vec{R}_{RANS} \rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle \\
& \quad = 0 \\
& \Leftrightarrow \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [(\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle = 0 \tag{4.4.11}
\end{aligned}$$

ここで、式(4.4.11)に、式(4.4.3)～式(4.4.5)に示す境界条件を組み込むために、式(4.4.11)を弱形式に変形する。式(4.4.11)の左辺第3項にガウスの発散定理を適用すると、式(4.2.16)に変形される。また、式(4.4.11)の左辺第4項にガウスの発散定理を適用すると、以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [(\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle \\
& = - \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
& \quad + \langle \vec{\varphi}_i, (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \vec{n} \rangle_S \tag{4.4.12}
\end{aligned}$$

式(4.2.16)、式(4.4.12)を式(4.4.11)に代入し整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned}
& \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
& \quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\varphi}_i, [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \cdot \vec{n} \rangle_S \\
& \quad = 0 \tag{4.4.13}
\end{aligned}$$

ここで、4.2.1項にて述べた内容と同様に、境界条件が式(4.4.3)～式(4.4.5)にて与えられるとすると、式(4.4.13)の左辺第5項はゼロとなる。従って、RANS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、式(4.4.3)～式(4.4.5)に示す境界条件を組み込んだ式は以下となる。

$$\begin{aligned}
& \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
& \quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle = 0 \tag{4.4.14}
\end{aligned}$$

式(4.4.14)に式(4.2.11)、式(4.2.12)、式(4.4.9)を代入して整理すると、以下に示す結合係数 $a_i$ に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_i}{\partial t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij}a_j + \overline{C3}_{ij}a_j + C_{ijk}a_ja_k - \bar{A}_i - A_{ij}a_j + \nu\bar{B}_i + \nu B_{ij}a_j + \nu\overline{BT}_i \\
+ \nu\overline{BT}_{ij}a_j + \overline{D1}_i + \overline{D2}_{ij}a_j + \overline{D3}_{ij}a_j + D_{ijk}a_ja_k + \overline{DT1}_i \\
+ \overline{DT2}_{ij}a_j + \overline{DT3}_{ij}a_j + DT_{ijk}a_ja_k = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, r_u
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

式(4.4.15)中の係数 $A, B, C$ は式(4.2.22)~式(4.2.31)にて計算される。また、(4.4.15)中の係数 $D$ は、流速基底 $\vec{\varphi}_i$ 、渦粘性係数基底 $\vec{\phi}_i$ 、流速平均成分 $\bar{u}$ 、渦粘性係数平均成分 $\bar{v}_t$ を用いて以下にて計算される。

$$D_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j \nabla \vec{\varphi}_k \rangle \tag{4.4.16}$$

$$\overline{D1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{v}_t \nabla \bar{u} \rangle \tag{4.4.17}$$

$$\overline{D2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j \nabla \bar{u} \rangle \tag{4.4.18}$$

$$\overline{D3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{v}_t \nabla \vec{\varphi}_j \rangle \tag{4.4.19}$$

$$DT_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j (\nabla \vec{\varphi}_k)^T \rangle \tag{4.4.20}$$

$$\overline{DT1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{v}_t (\nabla \bar{u})^T \rangle \tag{4.4.21}$$

$$\overline{DT2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j (\nabla \bar{u})^T \rangle \tag{4.4.22}$$

$$\overline{DT3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{v}_t (\nabla \vec{\varphi}_j)^T \rangle \tag{4.4.23}$$

式(4.4.14)から式(4.4.15)~式(4.4.23)への導出過程の詳細を付録Iに示す。4.2.2節で述べた方法と同様にして、式(4.4.15)の時間微分項を後退オイラー法で離散化し整理すると、 $a_j^{n+1}$ に関する $r_u$ 個の非線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
[I_{ij} + \Delta t [\nu(B_{ij} + \overline{BT}_{ij}) + \overline{C2}_{ij} + \overline{C3}_{ij} + \overline{D2}_{ij} + \overline{D3}_{ij} + \overline{DT2}_{ij} \\
+ \overline{DT3}_{ij} + (C_{ijk} + D_{ijk} + DT_{ijk})a_k^{n+1} - A_{ij}] a_j^{n+1} \\
= a_i^n + \Delta t [-\nu(\bar{B}_i + \overline{BT}_i) - \overline{C1}_i - \overline{D1}_i - \overline{DT1}_i + \bar{A}_i]
\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

$a_j^{n+1}$ の初期値 $a_j^0$ については、4.2.2節で述べた方法と同様にして、式(4.2.25)より計算する。

## 4.5 RANS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法

本節では乱流を対象として、RANS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法を説明する

### 4.5.1 基礎式

式(4.4.1)の両辺の発散をとる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{u}^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] &= \nabla \cdot [\nabla \cdot [-p^* \mathbf{I} + (\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{u}^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] & \\ &= -\nabla \cdot (\nabla p^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

式(4.5.1)の左辺第1項は式(4.2.1)よりゼロとなる。また、式(4.5.1)の右辺第2項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \\ = 2\nabla \nu_t \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^*)) + (\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T) : \nabla (\nabla \nu_t) \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

式(4.5.2)中の  $:$  は2階テンソルに対する内積（フロベニウス積）[101]である。式(4.5.2)を式(4.5.1)に代入して、乱流に対する圧力ポアソン方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla p^*) &= -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] + 2\nabla \nu_t \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^*)) \\ &\quad + (\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T) : \nabla (\nabla \nu_t) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

層流に対する圧力ポアソン方程式(式(4.3.3))と比較すると、渦粘性係数 $\nu_t$ が空間分布を持つことにより、右辺第2項、第3項が付与される形となっている。

次に、境界面 $S_{ne}$ 上で、境界面の法線方向 $\vec{n}$  に対して式(4.4.1)を考慮することで、圧力に対するノイマン境界条件を導く。

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t} + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \\ = -\vec{n} \cdot \nabla p^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \text{ on } S_{ne} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

式(4.5.4)の $S_{ne}$ は圧力ノイマン境界条件を設定する境界面である。ここで、境界面 $S_{ne}$ 上では $\partial/\partial t(\vec{n} \cdot \vec{u}^*) = 0$ であると仮定し、式(4.5.4)の左辺第1項をゼロとする。また、式(4.5.4)の右辺

第2項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot [\nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \\ = \nu \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)] + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot [\nu_t(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

式(4.5.5)の右辺第1項は、式(4.3.5)より以下となる。

$$\nu \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)] = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] \quad (4.5.6)$$

また、式(4.5.5)の右辺第2項は以下のように変形される。

$$\vec{n} \cdot [\nabla \cdot [\nu_t(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] = \nu_t \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^*)] + \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T) \cdot \nabla \nu_t] \quad (4.5.7)$$

(4.5.6)、式(4.5.7)を式(4.5.5)に代入して、

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot [\nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T)]] \\ = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] + \nu_t \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^*)] + \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T) \cdot \nabla \nu_t] \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

式(4.5.8)を式(4.5.4)に代入して整理すると、圧力に対するノイマン境界条件が得られる。

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \nabla p^* \\ = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] + \nu_t \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^*)] \\ + \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T) \cdot \nabla \nu_t] - \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \text{ on } S_{ne} \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

本節で説明する縮約モデル構築方法では、式(4.4.1)に示すRANS方程式と、式(4.5.3)に示す圧力ポアソン方程式を基礎式として、流速 $\vec{u}^*$ 、圧力 $p^*$ 、渦粘性係数 $\nu_t$ を未知数とする。また、4.4節で述べたように、本研究では、境界面 $S$ は壁面 $S_{wall}$ 、流入面 $S_{in}$ 、流出面 $S_{out}$ から構成されるものとし、式(4.4.3)～式(4.4.5)に示す境界条件の他に、圧力に関して以下の境界条件を与える。

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \nabla p^* \\ = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] + \nu_t \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^*)] \\ + \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}^* + (\nabla \vec{u}^*)^T) \cdot \nabla \nu_t] - \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \text{ on } S_{ne} \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

$$p^* = p_D \text{ on } S_{out} \quad (4.5.11)$$

## 4.5.2 Galerkin 射影の適用

4.3節で述べたNS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築する手法と

同様に、本節で説明する縮約モデル構築手法においても、流速に関しては、式(4.2.6)、式(4.2.7)にて基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を抽出し、式(4.2.6)にて流速の変動成分を流速基底 $\vec{\varphi}_i$ の線形結合にて近似する。また、圧力に関しては、式(4.2.8)、式(4.2.9)にて基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ を抽出し、式(4.3.9)にて圧力の変動成分を圧力基底 $\vec{\chi}_i$ の線形結合にて近似する。さらに、渦粘性係数については、式(4.4.8)にて基底空間 $\vec{\phi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を抽出し、式(4.4.9)にて渦粘性係数の変動成分を渦粘性係数基底 $\vec{\phi}_i$ の線形結合にて近似する。ここで、Galerkin射影を適用し、基礎方程式であるRANS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影する。RANS方程式を流速基底空間に射影し、式(4.4.3)～式(4.4.5)に示す境界条件を組み込んだ式は4.4節に示す式(4.4.14)となるので、ここでは説明を省略する。以下では、Galerkin射影を圧力ポアソン方程式に適用して、圧力基底空間に射影する方法について説明する。

基礎式である圧力ポアソン方程式(式(4.5.3))の $\vec{u}^*, p^*$ に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*, \nu_{tROM}^*$ を代入する。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) + \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] - 2\nabla \nu_{tROM}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \\ - (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) : \nabla (\nabla \nu_{tROM}^*) = \vec{R}_{PE} \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

式(4.5.12)中の $\vec{R}_{PE}$ は、圧力ポアソン方程式に近似値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ を代入した結果生じる残差ベクトルである。式(4.5.12)にGalerkin射影を適用し、圧力基底 $\vec{\chi}_i, i = 1, \dots, r_p$ との内積をとることで、基礎方程式である圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影する。

$$\begin{aligned} \langle \vec{\chi}_i, \vec{R}_{PE} \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle \\ - 2\langle \vec{\chi}_i, \nabla \nu_{tROM}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle \\ - \langle \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) : \nabla (\nabla \nu_{tROM}^*) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

ここで、式(4.5.13)に、式(4.5.10)、式(4.5.11)に示す境界条件を組み込むために、式(4.5.13)を弱形式に変形する。式(4.5.13)の左辺第1項と左辺第2項はそれぞれ式(4.3.12)、式(4.3.13)に変形される。また、式(4.5.13)の左辺第3項と左辺第4項にガウスの発散定理を適用すると、以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \nabla \nu_{tROM}^* \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle \\
& = -\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nu_{tROM}^* (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \nu_{tROM}^* \vec{n} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle_S
\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) : \nabla (\nabla \nu_{tROM}^*) \rangle \\
& = -\langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^* \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\chi}_i, (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \cdot \nabla \nu_{tROM}^* \rangle \\
& \quad + \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot ((\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^*) \rangle_S
\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

式(4.3.12)、式(4.3.13)、式(4.5.14)、式(4.5.15)を式(4.5.13)に代入し整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\
& \quad - \langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^* \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\chi}_i, (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \cdot \nabla \nu_{tROM}^* \rangle \\
& \quad - 2\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nu_{tROM}^* (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle \\
& - \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \\
& - \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^*] - 2\nu_{tROM}^* \vec{n} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle_S = 0
\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

境界面 $S$ のうち、流出面 $S_{out}$ では、圧力は時間変化せず圧力の変動成分 $p$ はゼロとなるので、圧力基底 $\vec{\chi}_i$ もゼロとなる。これより、式(4.5.16)の左辺第6項は以下となる。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \\
& - \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^*] - 2\nu_{tROM}^* \vec{n} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle_S \\
& = \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \\
& - \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^*] - 2\nu_{tROM}^* \vec{n} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle_{S_{ne}}
\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

式(4.5.10)を式(4.5.17)に代入して整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \\
& - \vec{n} \cdot [(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{tROM}^*] - 2\nu_{tROM}^* \vec{n} \cdot (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle_S \\
& = -\langle \vec{\chi}_i, (\nu - \nu_{tROM}^*) \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_{S_{ne}} \\
& = \langle \vec{n} \times \nabla [(\nu - \nu_{tROM}^*) \vec{\chi}_i], \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} \\
& = \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} - \langle \vec{n} \times \nabla (\nu_{tROM}^* \vec{\chi}_i), \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}}
\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

式(4.5.18)を式(4.5.16)に代入して整理すると、圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影し、式(4.5.10)、式(4.5.11)に示す境界条件を組み込んだ式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\
& \quad - \langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \nabla \nu_{t_{ROM}}^* \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\chi}_i, (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \cdot \nabla \nu_{t_{ROM}}^* \rangle \\
& \quad - 2 \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nu_{t_{ROM}}^* (\nabla \cdot (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle - \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} \\
& \quad + \langle \vec{n} \times \nabla (\nu_{t_{ROM}}^* \vec{\chi}_i), \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} = 0
\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

式(4.2.20)と式(4.5.19)に式(4.2.11)、式(4.3.9)、式(4.4.9)を代入して整理すると、以下に示す結合係数 $a_i, b_l$ に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial a_i}{\partial t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij} a_j + \overline{C3}_{ij} a_j + C_{ijk} a_j a_k - \bar{A}_i - A_{im} b_m + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j + \nu \overline{BT}_i \\
& \quad + \nu \overline{BT}_{ij} a_j + \overline{D1}_i + \overline{D2}_{ij} a_j + \overline{D3}_{ij} a_j + D_{ijk} a_j a_k + \overline{DT1}_i \\
& \quad + \overline{DT2}_{ij} a_j + \overline{DT3}_{ij} a_j + DT_{ijk} a_j a_k = 0
\end{aligned} \tag{4.5.20}$$

$i, j, k = 1, \dots, r_u, m = 1, \dots, r_p$

$$\begin{aligned}
& \bar{E}_l + E_{lm} b_m + F_{ljk} a_j a_k + \overline{F1}_l + \overline{F2}_{lj} a_j + \overline{F3}_{lj} a_j + H_{ljk} a_j a_k + \overline{H1}_l + \overline{H2}_{lj} a_j \\
& \quad + \overline{H3}_{lj} a_j + \overline{HT}_{ljk} a_j a_k + \overline{HT1}_l + \overline{HT2}_{lj} a_j + \overline{HT3}_{lj} a_j - O_{ljk} a_j a_k \\
& \quad - \overline{O1}_l - \overline{O2}_{lj} a_j - \overline{O3}_{lj} a_j - 2\overline{Q1}_l - 2\overline{Q2}_{lj} a_j \\
& \quad - 2\overline{Q3}_{lj} a_j - \nu \bar{G}_l - \nu G_{lj} a_j + R_{ljk} a_j a_k + \overline{R1}_l + \overline{R2}_{lj} a_j + \overline{R3}_{lj} a_j \\
& \quad = 0
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

$j, k = 1, \dots, r_u, l, m = 1, \dots, r_p$

式(4.5.20)中の係数 $A, B, C$ は式(4.2.22)~式(4.2.31)にて計算され、係数 $D$ は式(4.4.16)~式(4.4.23)にて計算される。また、式(4.5.20)中の係数 $E, F, G$ は式(4.3.20)~式(4.3.27)にて計算される。さらに、式(4.5.20)中の(4.5.21)中の係数 $H, O, Q, R$ は、流速基底 $\vec{\phi}_i$ 、圧力基底 $\vec{\chi}_i$ 、渦粘性係数基底 $\vec{\phi}_i$ 、流速平均成分 $\bar{u}$ 、渦粘性係数平均成分 $\bar{\nu}_t$ を用いて以下にて計算される。

$$H_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \vec{\phi}_j \cdot \nabla \vec{\phi}_k \rangle \tag{4.5.22}$$

$$\overline{H1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \bar{u} \cdot \nabla \bar{\nu}_t \rangle \tag{4.5.23}$$

$$\overline{H2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \vec{\varphi}_j \cdot \nabla \vec{v}_t \rangle \quad (4.5.24)$$

$$\overline{H3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{\phi}_j \rangle \quad (4.5.25)$$

$$HT_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{\varphi}_j)^T \cdot \nabla \vec{\phi}_k \rangle \quad (4.5.26)$$

$$\overline{HT1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u})^T \cdot \nabla \vec{v}_t \rangle \quad (4.5.27)$$

$$\overline{HT2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{\varphi}_j)^T \cdot \nabla \vec{v}_t \rangle \quad (4.5.28)$$

$$\overline{HT3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, (\nabla \vec{u})^T \cdot \nabla \vec{\phi}_j \rangle \quad (4.5.29)$$

$$O_{ijk} \equiv \langle \vec{\chi}_i, [\nabla \cdot (\nabla \vec{\varphi}_j)] \cdot \nabla \vec{\phi}_k \rangle \quad (4.5.30)$$

$$\overline{O1}_i \equiv \langle \vec{\chi}_i, [\nabla \cdot (\nabla \vec{u})] \cdot \nabla \vec{v}_t \rangle \quad (4.5.31)$$

$$\overline{O2}_{ij} \equiv \langle \vec{\chi}_i, [\nabla \cdot (\nabla \vec{\varphi}_j)] \cdot \nabla \vec{v}_t \rangle \quad (4.5.32)$$

$$\overline{O3}_{ij} \equiv \langle \vec{\chi}_i, [\nabla \cdot (\nabla \vec{u})] \cdot \nabla \vec{\phi}_j \rangle \quad (4.5.33)$$

$$Q_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \vec{\phi}_j [\nabla \cdot (\nabla \vec{\varphi}_k)] \rangle \quad (4.5.34)$$

$$\overline{Q1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \vec{v}_t [\nabla \cdot (\nabla \vec{u})] \rangle \quad (4.5.35)$$

$$\overline{Q2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \vec{\phi}_j [\nabla \cdot (\nabla \vec{u})] \rangle \quad (4.5.36)$$

$$\overline{Q3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \vec{v}_t [\nabla \cdot (\nabla \vec{\varphi}_j)] \rangle \quad (4.5.37)$$

$$R_{ijk} \equiv \langle \vec{n} \times \nabla (\vec{\phi}_j \vec{\chi}_i), \nabla \times \vec{\varphi}_k \rangle_{S_{ne}} \quad (4.5.38)$$

$$\overline{R1}_i \equiv \langle \vec{n} \times \nabla (\vec{v}_t \vec{\chi}_i), \nabla \times \vec{u} \rangle_{S_{ne}} \quad (4.5.39)$$

$$\overline{R2}_{ij} \equiv \langle \vec{n} \times \nabla (\vec{\phi}_j \vec{\chi}_i), \nabla \times \vec{u} \rangle_{S_{ne}} \quad (4.5.40)$$

$$\overline{R3}_{ij} \equiv \langle \vec{n} \times \nabla(\bar{v}_t \bar{\chi}_i), \nabla \times \bar{\varphi}_j \rangle_{S_{ne}} \quad (4.5.41)$$

4.2.2節で述べた方法と同様にして、式(4.5.20)の時間微分項を後退オイラー法で離散化し整理すると、 $a_j^{n+1}, b_m^{n+1}$ に関する $r_u + r_p$ 個の非線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{ij} + \Delta t[\nu(B_{ij} + BT_{ij}) + U_{ijk}] & -\Delta t A_{im} \\ -\nu G_{lj} + V_{ijk} & E_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j^{n+1} \\ b_m^{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_i^n + \Delta t[-\nu(\bar{B}_i + \bar{BT}_i) - \bar{C1}_i - \bar{D1}_i - \bar{DT1}_i + \bar{A}_i] \\ \nu \bar{G}_l - \bar{E}_l - \bar{F1}_l - \bar{H1}_l - \bar{HT1}_l + \bar{O1}_l + 2\bar{Q1}_l - \bar{R1}_l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.42)$$

$$\begin{aligned} U_{ijk} \equiv & \overline{C2}_{ij} + \overline{C3}_{ij} + C_{ijk} a_k^{n+1} + \overline{D2}_{ij} + \overline{D3}_{ij} + D_{ijk} a_k^{n+1} + \overline{DT2}_{ij} + \overline{DT3}_{ij} \\ & + DT_{ijk} a_k^{n+1} \end{aligned} \quad (4.5.43)$$

$$\begin{aligned} V_{ijk} \equiv & \overline{F2}_{lj} + \overline{F3}_{lj} + F_{ljk} a_k^{n+1} + \overline{H2}_{lj} + \overline{H3}_{lj} + H_{ljk} a_k^{n+1} + \overline{HT2}_{lj} + \overline{HT3}_{lj} \\ & + HT_{ljk} a_k^{n+1} - \overline{O2}_{lj} - \overline{O3}_{lj} - O_{ljk} a_k^{n+1} \\ & - 2(\overline{Q2}_{lj} + \overline{Q3}_{lj} + Q_{ljk} a_k^{n+1}) + \overline{R2}_{lj} + \overline{R3}_{lj} + R_{ljk} a_k^{n+1} \end{aligned} \quad (4.5.44)$$

$a_j^{n+1}, b_m^{n+1}$ の初期値 $a_j^0, b_m^0$ については、4.3.2節で述べた方法と同様にして、式(4.2.25)、式(4.3.29)より計算する。

## 4.6 乱流条件でのキャビティ流れ解析への縮約モデルの適用

### 4.6.1 計算条件

計算対象を図4. 1に示す。流速境界条件として、上部境界面に境界面に平行な流速 $\vec{u} = (1, 0, 0)$ を与え、それ以外の境界面は流速ゼロの条件を与えた。また、圧力境界条件として、全ての境界面に圧力勾配ゼロの条件を与えた。初期条件は領域全体で流速をゼロとした。

3次元流体解析の計算条件を表4. 2に示す。流体ソルバーとしては、オープンソースの3次元流体解析ソルバーであるOpenFOAM[86]を用いた。また、計算格子として $x, y, z$ 方向にそれぞれ300,300,1に分割した格子を用いた。さらに、流れが乱流となるようにレイノルズ数( $Re$ )を $Re = 10^4$ (Case1-1)、 $Re = 10^5$ (Case1-2)とし、解析時間をCase1-1では100[s]、Case1-2では200[s]とした。

次に縮約モデルの計算条件を表4. 3に示す。3次元流体解析にて0.1(s)間隔で出力した時系列データに対して、流れ場の時間変動成分を対象として固有直交分解を適用し、式(4.2.6)、式(4.2.7)、式(4.2.10)、式(4.4.8)より、流速、圧力、渦粘性係数の基底空間を抽出した。さらに得られた基底空間に対して、基底数 $r$ をCase1-1では $r = 1, 2, 3, 4, 5$ 、Case1-2では $r = 20, 30, 40$ として、式(4.4.15)、式(4.2.22)~式(4.2.31)、式(4.4.16)~式(4.4.23)より縮約モデルを構築し、式(4.4.24)より基底の結合係数 $a_j^{n+1}$ を計算した。ここで、式(4.4.24)を解く際の時間ステップ幅は0.01[s]とした。

### 4.6.2 適用結果

[ 3次元流体解析の計算結果 ]

3次元流体解析の計算結果として、上部境界面から距離0.05[m]の位置 (図4. 1中の点A) における $x$ 方向流速成分の時間変化を図4. 2に示す。図4. 2よりCase1-1では時刻60[s]以降で流れは定常状態となり、Case1-2では時刻150[s]以降で定常状態となった。

[ 基底空間の抽出結果 ]

次に、基底空間の抽出結果として、式(4.2.6)より計算される固有値 $\lambda_{ui}$ を式(4.6.1)にて規格化し、値が大きい順にプロットした結果を図4. 3に示す。

$$\bar{\lambda}_{ui} = \frac{\lambda_{ui}}{\sum_{i=1}^m \lambda_{ui}} \quad (4.6.1)$$

式(4.6.1)において、右辺分子項は $\lambda_{ui}$ に対応する基底 $\varphi_i$ が保有している流れ場のエネルギーを表しており、右辺分母項はもともとの流れ場が保有している全エネルギーを表している。従って、規格化固有値 $\bar{\lambda}_{ui}$ は、もともとの流れ場が保有しているエネルギーに対して、 $\bar{\lambda}_{ui}$ に対応する基底 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーの割合を示す値である。図4.3より基底 $\varphi_i$ のインデックス $i$ 、すなわち基底次数が大きくなると、 $\bar{\lambda}_{ui}$ は急激に減少し、基底 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーの割合も急激に減少し、Case1-1とCase1-2を比較するとCase1-2の方が減少率が小さい結果となった。これは、Case1-2の方がレイノルズ数が大きいことが理由であると考えられる。乱流内のエネルギーの伝達過程では、外部から供給されるエネルギーは、まず大スケールの渦に受け渡され、大スケールの渦が小スケールの渦に分裂していく過程で、エネルギーは大スケールの渦から小スケールの渦へと受け渡されていく。渦は最終的に分子粘性により消滅し、エネルギーは熱として散逸する。レイノルズ数は大スケール渦と小スケール渦のスケール比に等しく、レイノルズ数が大きくなると、エネルギーの伝達過程において流れ場中に含まれる渦のスケール比は大きくなり、渦が保有するエネルギーの範囲も広くなる。このため、Case1-2で基底が保有するエネルギーの減少率が小さくなったと考えられる。

Case1-1に対する時間平均場と基底の空間分布を図4.4に示し、Case1-2に対する時間平均場と基底の空間分布を図4.5に示す。基底次数が大きくなると、基底が保有するエネルギーの割合が減少することに対応して、基底次数が大きくなるに従って基底の空間スケールが小さくなる結果となった。

#### [ 縮約モデルの計算精度評価 ]

次に、縮約モデルの計算精度を評価するために、式(4.6.2)より3次元流体解析の流速 $\vec{u}_{FOM}(t)$ と縮約モデルの流速 $\vec{u}_{ROM}(t)$ の誤差 $E(t)$ を計算した。

$$E(t) \equiv 100 \times \frac{\sqrt{\int_V \|\vec{u}_{ROM}(t) - \vec{u}_{FOM}(t)\|^2 dV}}{\sqrt{\int_V \|\vec{u}_{FOM}(t)\|^2 dV}} \quad (4.6.2)$$

式(4.6.2)の右辺分子項は $\vec{u}_{FOM}(t)$ と $\vec{u}_{ROM}(t)$ の差の絶対値 (L2ノルム) であり、右辺分母項は

$\bar{u}_{FOM}(t)$ の絶対値である。誤差 $E(t)$ の時間変化を図4. 6に示し、 $E(t)$ の時間平均値 $\bar{E}$ を表4. 4に示す。図4. 6および表4. 4により、Case1-1、Case1-2いずれにおいても、基底数の増加とともに $E(t)$ と $\bar{E}$ が減少する結果が得られた。表4. 4より、Case1-1では、基底数 $r = 5$ の条件に対して縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差0.99%で一致し、Case1-2では、基底数 $r = 40$ の条件に対して時間平均誤差2.64%で一致する結果が得られた。一方で、時間平均誤差が $\bar{E} < 3.0$ を満足するための基底数 $r$ は、Case1-1では $r = 2$ であるのに対して、Case1-2では $r = 40$ であった。上で述べたように、レイノルズ数が大きくなると、流れ場に含まれる渦のスケール比が大きくなり、渦が保有するエネルギーの範囲が広がるため、目標精度を満足するための基底数が増えたと考えられる。ここで、実運用上としては、縮約モデルを構築するためにあらかじめ基底数を決定する必要がある、以下では基底数の決定方法を考察する。1.4節で述べた通り、縮約モデルを用いた流体解析では、図1. 2のStep2において3次元流体解析の計算結果から基底空間を抽出し、Step3において基底空間に流体の基礎式を射影して縮約モデルを構築した後、縮約モデルを用いて異なるプラント運転条件に対して詳細な流れ場を計算する。プラントの定格負荷から最低負荷までの運転条件を計算対象とすると、プラント運転条件でレイノルズ数が最大となるプラント運転条件は、代表流速 $U$ 、すなわち流量が最大となる定格負荷運転時である。Case1-1とCase1-2の比較結果から、基底数はレイノルズ数に依存し、レイノルズ数が大きくなると精度確保のための基底数が増えることから、図1. 2中のStep2では、定格負荷運転条件に対する3次元流体解析の計算結果から要求精度を満足する基底数を決定し、基底空間を抽出する。Step3において、縮約モデルを用いて異なるプラント運転条件に対して流れ場を計算する過程では、レイノルズ数は定格負荷運転条件に対するレイノルズ数より小さくなるため、基底数は十分であり要求精度を満足すると考察する。

#### [ 縮約モデルによる計算時間短縮化の効果 ]

次に、縮約モデルによる計算時間短縮化の効果を確認するために、3次元流体解析と縮約モデルを用いた場合のCPU時間を比較した結果を表4. 5に示す。CPU時間比較のために用いた計算機のスペックは、CPU：Intel Core i7-8700 3.2GHz、メモリ：32GBである。いずれの条件に対してもシングルコアで計算した。表4. 5より、初回計算時には、Case1-1では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は7506[s]、縮約モデルを用いた場合は279[s]、Case1-2では

3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は31578[s]、縮約モデルを用いた場合は7782[s]であり、縮約モデルにより計算時間は4.1~26.9倍高速化されることを確認した。また、2回目以降計算時には、Case1-1では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は7506[s]、縮約モデルを用いた場合は61[s]、Case1-2では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は31578[s]、縮約モデルを用いた場合は363[s]であり、縮約モデルにより計算時間は87.0~123.0倍高速化されることを確認した。高速化の要因は、各時間ステップにおいて、3次元流体解析では流速、圧力、渦粘性係数に関する格子分割数=90000オーダーの方程式を解く必要があるのに対して、縮約モデルでは基底の結合係数に関する基底数 $r=5$ (Case1-1)、 $r=40$ (Case1-2)の方程式を解くことで済むためである。一方、縮約モデルを用いた場合に、初回計算時にCPU時間が増大する理由は、前処理として係数を計算して縮約モデルを構築する必要があるからである。しかしながら、一度縮約モデルを構築すれば、異なるプラント運転条件に対しては、構築済みの縮約モデルを用いて流れ場を計算することができ前処理は不要であるため、縮約モデル構築にかかるCPU時間が計算時間短縮のボトルネックにはならないと考える。

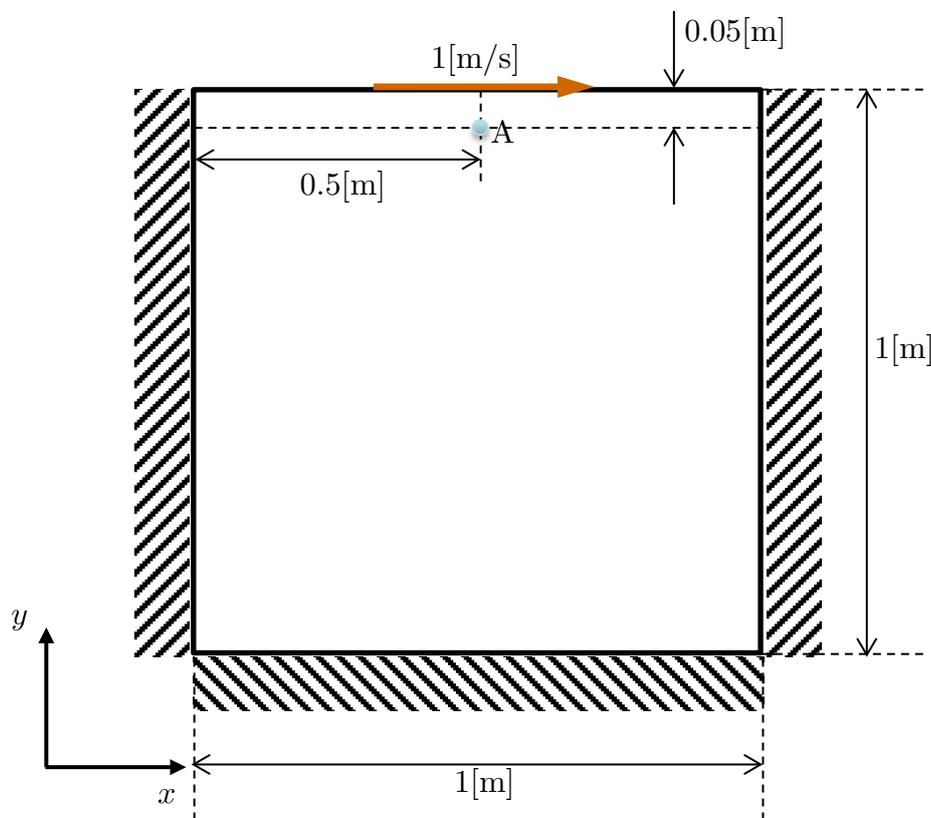


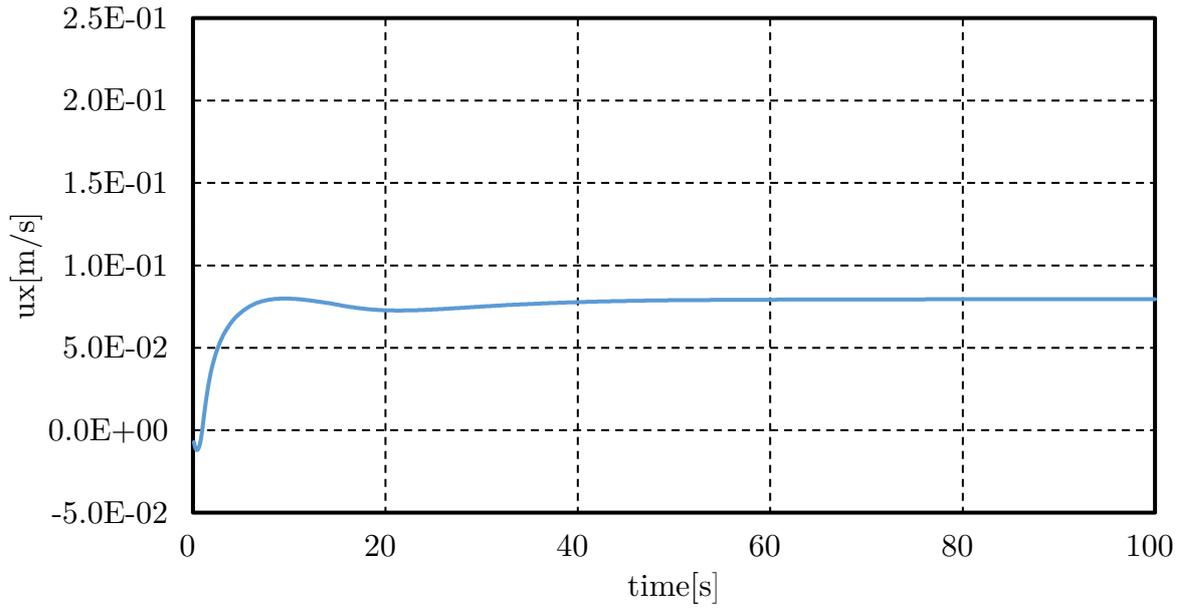
図 4.1 キャビティー流れ解析対象

表 4. 2 3次元流体解析計算条件

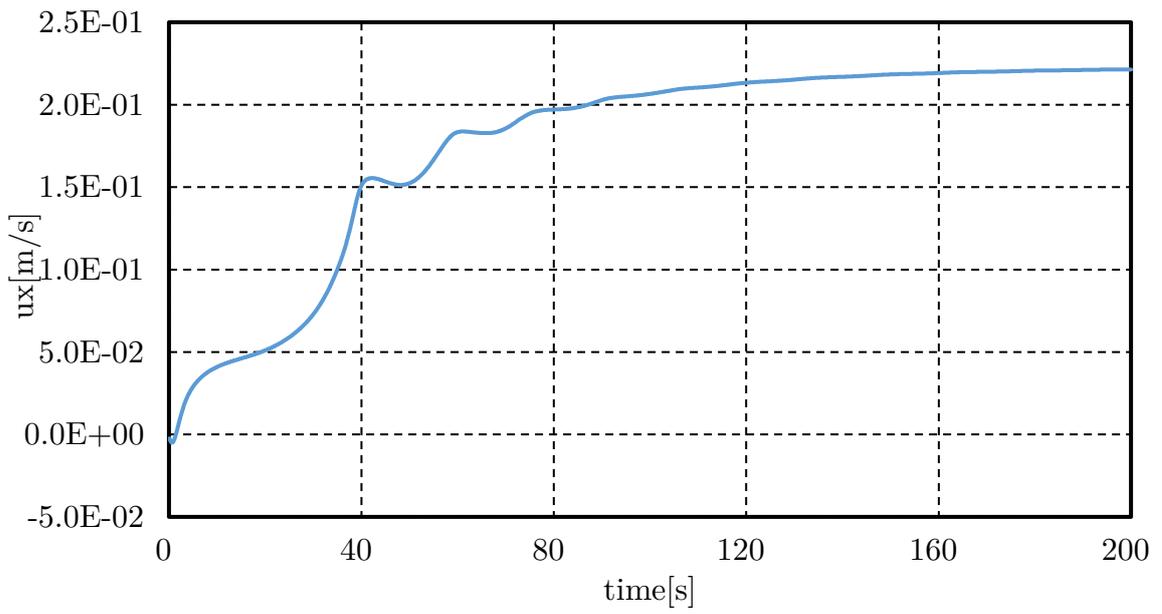
項目	条件	
	Case1-1	Case1-2
流体ソルバー	OpenFOAM	
計算格子	300 × 300 × 1(Nonuniform Grid)	
レイノルズ数(Re)	10 <sup>4</sup>	10 <sup>5</sup>
解析時間	100[s]	200[s]

表 4. 3 縮約モデル計算条件

項目	条件	
	Case1-1	Case1-2
3次元流体解析結果の サンプリング間隔	0.1[s]	
基底数	1, 2, 3, 4, 5	20, 30, 40
時間ステップ幅	0.01[s]	
解析時間	100[s]	200[s]



(a) Case1-1



(b) Case1-2

図 4. 2 3次元流体解析計算結果

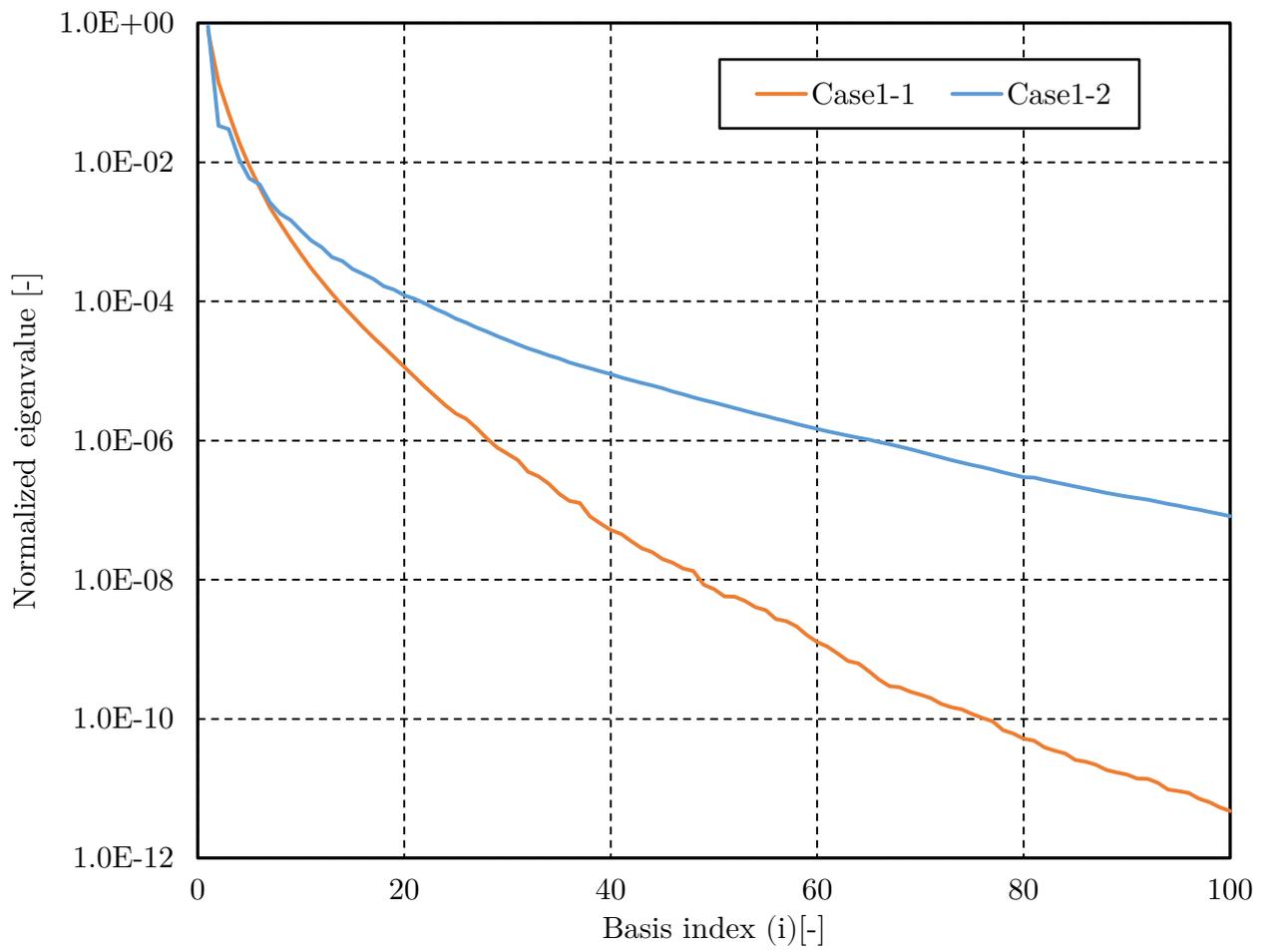


図 4. 3 乱流条件でのキャビティー流れに対する規格化固有値

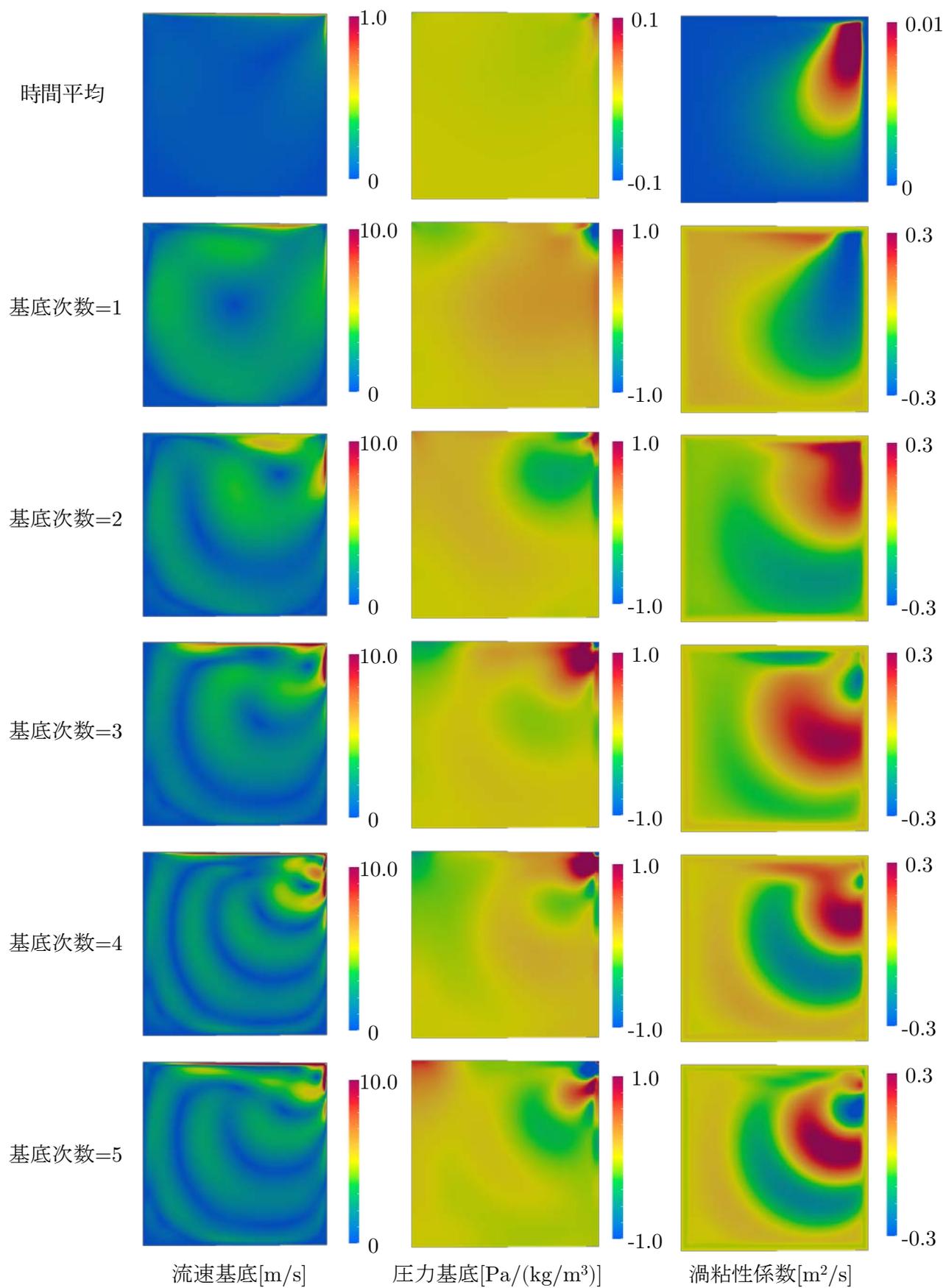


図 4. 4 時間平均場および基底空間分布(Case1-1)

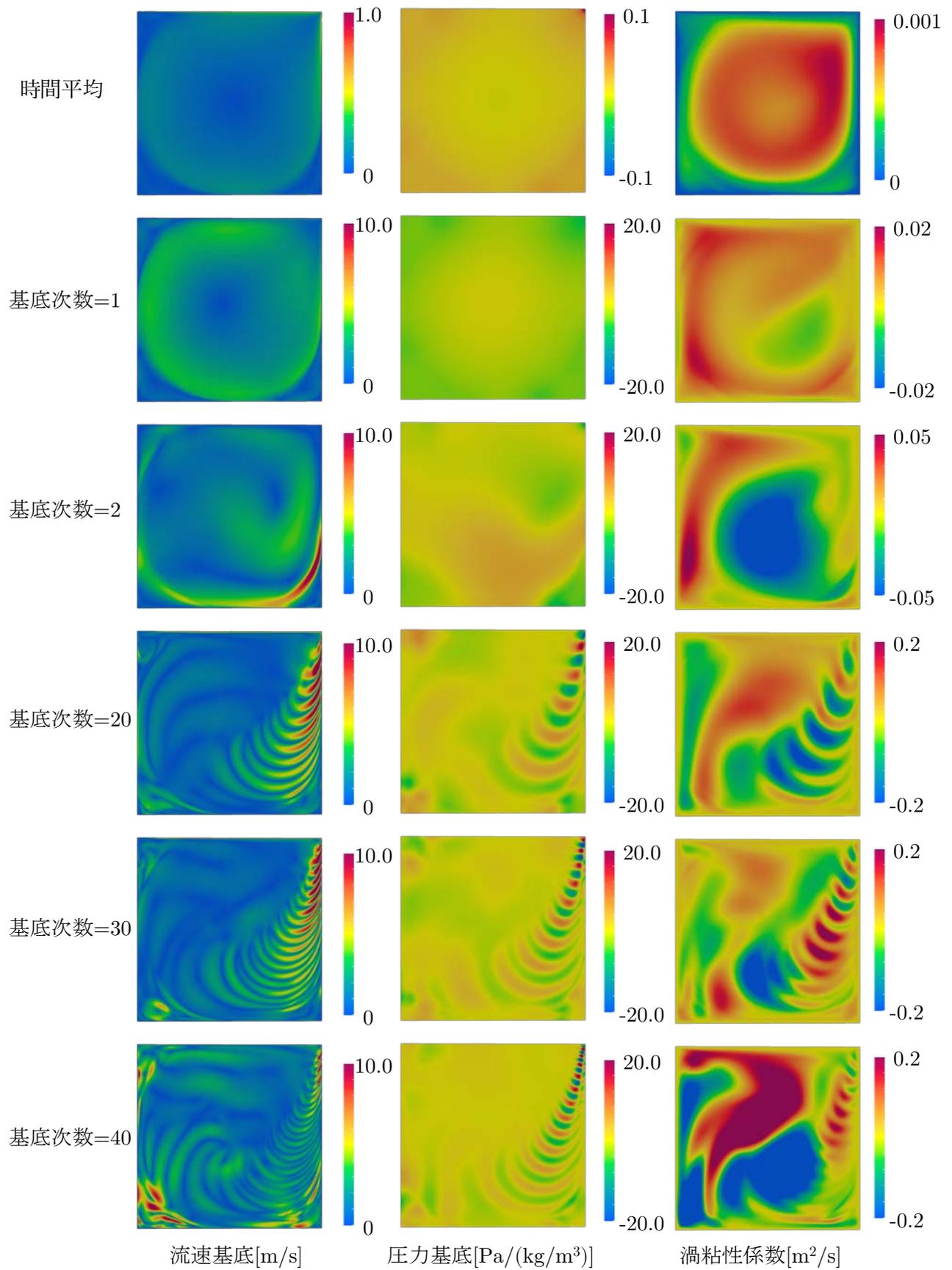
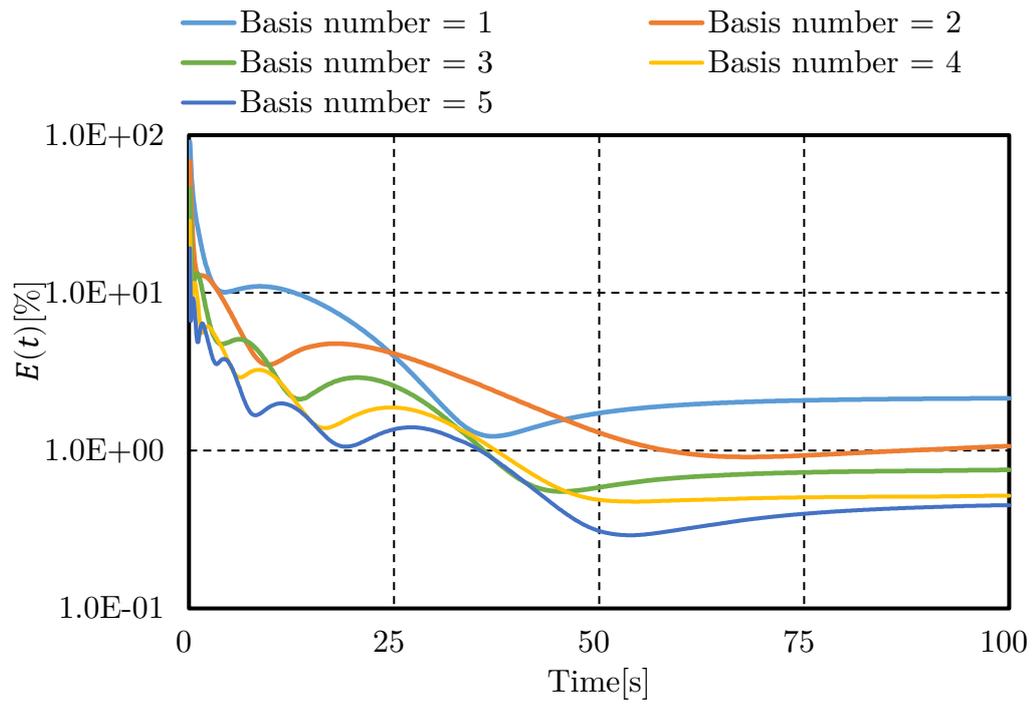
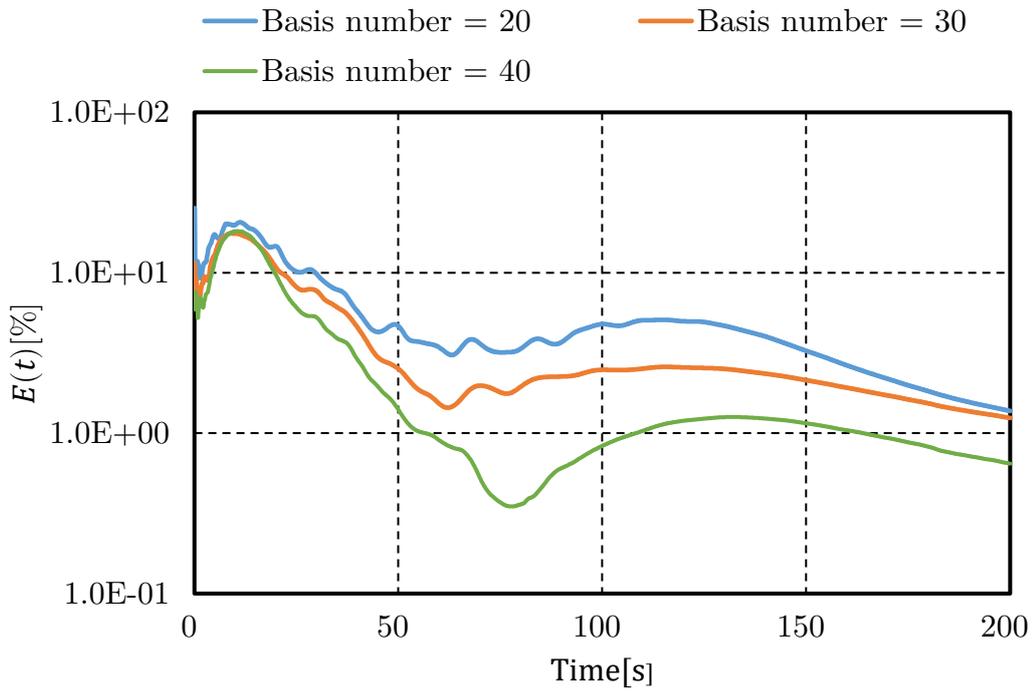


図 4. 5 時間平均場および基底空間分布(Case1-2)



(a) Case1-1



(b) Case1-2

図 4.6 乱流条件でのキャビティー流れに対する誤差の時間変化

表 4.4 乱流条件でのキャビティ流れに対する時間平均誤差

(a) Case1-1

	基底数				
	1	2	3	4	5
$\bar{E}[\%]$	4.13	2.72	1.70	1.28	0.99

(b) Case1-2

	基底数		
	20	30	40
$\bar{E}[\%]$	5.43	3.81	2.64

表 4.5 乱流条件でのキャビティ流れに対する計算時間の比較

			Case1-1 (基底数=5)		Case1-2 (基底数=40)	
			ROM	FOM	ROM	FOM
初回計算	CPU時間[s]	ROM構築	218	-	7419	-
		計算	61	7506	363	31578
		全体	279	7506	7782	31578
	CPU 時間の加速率[-]		26.9	1	4.1	1
2回目以降計算	CPU時間[s]	計算	61	7506	363	31578
	CPU 時間の加速率[-]		123.0	1	87.0	1

## 4.7 模擬配管流れ解析への縮約モデルの適用

### 4.7.1 計算条件

図4. 7に示すエルボ、分岐を含む模擬配管系を計算対象とした。模擬配管系の配管口径 $D$ は0.5 [m] であり、分岐と曲率半径が $1D$ であるエルボを間隔 $1D$ で接続し、上流側に長さ $10D$ の直管、下流側に長さ $50D$ の直管を配置した。エルボと接続していない分岐下流側の流路は閉止としている。流速境界条件として、流入面に一様な流速 $\vec{u} = (4, 0, 0)$ 、流出面に流速勾配ゼロ、壁面に流速ゼロの条件を与えた。また、圧力境界条件として、流出面に圧力ゼロ、それ以外の境界面に勾配ゼロの条件を与えた。

3次元流体解析の計算条件を表4. 6に示す。キャビティー流れと同様に、流体ソルバーとしては、オープンソースの3次元流体解析ソルバーであるOpenFOAM[86]を用いた。また、計算には図4. 7に示す分割数660,000の計算格子を用いた。さらに、流れが乱流となるようにレイノルズ数( $Re$ )を $Re = 10^4$ (Case2-1)、 $Re = 10^5$ (Case2-2)とし、解析時間をCase2-1では15[s]、Case2-2では100[s]とした。

次に、縮約モデルの計算条件を表4. 7に示す。3次元流体解析にて0.1(s)間隔で出力した時系列データに対して、流れ場の時間変動成分を対象として固有直交分解を適用し、式(4.2.6)、式(4.2.7)、式(4.2.10)、式(4.4.8)より、流速、圧力、渦粘性係数の基底空間を抽出した。さらに得られた基底空間に対して、基底数 $r$ をCase2-1では $r = 3, 4, 5, 6$ 、Case2-2では $r = 20, 30, 40$ として、式(4.4.15)、式(4.2.22)~式(4.2.31)、式(4.4.16)~式(4.4.23)より縮約モデルを構築し、式(4.4.24)より基底の結合係数 $a_j^{n+1}$ を計算した。ここで、式(4.4.24)を解く際の時間ステップ幅は0.01[s]とした。

### 4.7.2 適用結果

[ 3次元流体解析の計算結果 ]

解析終了時刻(Case2-1では15[s]、Case2-2では100[s])における模擬配管内の流線を可視化した結果を図4. 8に示す。流線の色は流速の絶対値を表している。Case2-1、Case2-2いずれにおいても分岐とエルボでの流路の曲がりの影響でエルボ下流の直管にて旋回流れが発生しており、Case2-1とCase2-2を比較するとCase2-2の方がより強い旋回流れが発生した。

流出面上の管中心軸から距離0.25 $D$ の位置における流れの旋回成分の時間変化を図4. 9に

示す。図4.9より、Case2-1では時刻7[s]以降で流れは定常状態となったのに対して、Case2-2では時刻40[s]以降で一定の振幅幅で振動する結果となった。3次元流体解析結果を踏まえ、Case2-2では、流れが一定の振幅幅で振動する時間領域である50~100[s]を対象として縮約モデルを構築した。

#### [ 基底空間の抽出結果 ]

基底空間の抽出結果として、式(4.2.6)より計算される固有値 $\lambda_i$ を式(4.6.1)にて規格化し、値が大きい順にプロットした結果を図4.10に示す。キャビティ流れと同様に基底 $\varphi_i$ のインデックス $i$ が大きくなると、規格化固有値 $\bar{\lambda}_i$ は急激に減少し、 $\varphi_i$ が保有しているエネルギーの割合も急激に減少する結果となった。また、Case2-1とCase2-2で大きな差異は見られなかった。これは、模擬配管内の流れでは、流路の曲がりの影響によりレイノルズ数が小さい条件でも乱流状態が強い流れとなり、Case2-1とCase2-2で流れ場中に含まれる渦のスケール比が同等になったためであると考えられる。

#### [ 縮約モデルの計算精度評価 ]

誤差 $E(t)$ の時間変化を図4.11に示し、 $E(t)$ の時間平均値 $\bar{E}$ を表4.8に示す。図4.11および表4.8より、Case2-1では、概ね基底数の増加とともに誤差 $E(t)$ と $\bar{E}$ が減少する結果が得られた。一方、Case2-2では、基底数が増加しても $E(t)$ と $\bar{E}$ は減少せず、ほぼ同じ値となった。また、流れの振動と同じ周期で $E(t)$ が振動する結果となった。表4.8より、Case2-1では、基底数 $r = 6$ の条件に対して縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差0.43%で一致し、Case2-2では、基底数 $r = 40$ の条件に対して時間平均誤差7.05%で一致する結果が得られた。

次に旋回流れにおける旋回強度を示す無次元量である配管断面に対する平均スワール数[85]を用いて、縮約モデルの計算精度を評価した。1.1節で述べたように、縮約モデルを用いて配管系の旋回流れを評価する対象として、配管内で生じる旋回流れにより流量計精度が低下する現象がある。配管内に旋回流れが生じると、旋回流れの影響により配管断面の流速分布は無旋回時の流速分布から変化し、その結果、壁面圧力が変化する。差圧式流量計は、オリフィス前後の壁面差圧から流量計指示値を算出しており、壁面圧力が変化すると、流量計指示値も影響を受けることになる。旋回流れが強くなると流量計指示値は低下し、配管断面

に対する平均スワール数と流量計指示値の低下幅には相関があることが知られている[1]。配管内の旋回流れに対して、平均スワール数が評価できれば流量計指示値の低下幅が予測できることから、平均スワール数に対する縮約モデルの計算精度を評価した。

配管断面に対する平均スワール数 $Sw(z, t)$ は式(4.7.1)にて計算される。

$$Sw(z, t) \equiv \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} r \rho U(r, \theta, z, t) V(r, \theta, z, t) r d\theta dr}{R \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho U(r, \theta, z, t) U(r, \theta, z, t) r d\theta dr} \quad (4.7.1)$$

式(4.7.1)の $\rho$ は密度、 $U$ は配管軸方向流速成分、 $V$ は旋回流速成分、 $R$ は配管半径、 $r$ は配管半径方向座標値、 $\theta$ は配管角度方向座標値、 $z$ は配管軸方向座標値である。式(4.7.1)の右辺分子項は配管断面上の角運動量、右辺分母項は配管断面上の軸方向運動量に配管半径を乗じた値であり、 $Sw(z, t)$ は角運動量と軸方向運動量の比を表している。図4.7に示す模擬配管系のエルボ下流の直管を対象として、式(4.7.2)より3次元流体解析結果から算出したスワール数 $Sw_{FOM}(z, t)$ と縮約モデルから算出したスワール数 $Sw_{ROM}(z, t)$ の誤差 $E_{Sw}(z, t)$ を計算した。

$$E_{Sw}(z, t) \equiv 100 \times \frac{\|Sw_{ROM}(z, t) - Sw_{FOM}(z, t)\|}{Sw_{FOM}(z_{in}, t)} \quad (4.7.2)$$

式(4.7.1)の $z_{in}$ は直管入口に対する配管軸方向座標値である。さらに、式(4.7.3)、式(4.7.4)より空間方向平均誤差 $\bar{E}_{Sw}(t)$ 、全体平均誤差 $\bar{E}_{Sw, total}$ を計算した。

$$\bar{E}_{Sw}(t) \equiv \frac{\int_{z_{in}}^{z_{out}} E_{Sw}(z, t) dz}{\int_{z_{in}}^{z_{out}} dz} \quad (4.7.3)$$

$$\bar{E}_{Sw, total} \equiv \frac{\int_{t_{start}}^{t_{end}} \bar{E}_{Sw}(t) dt}{\int_{t_{start}}^{t_{end}} dt} \quad (4.7.4)$$

式(4.7.1)の $z_{out}$ は直管出口に対する配管軸方向座標値、 $t_{start}$ は計算精度を評価する開始時刻、 $t_{end}$ は終了時刻である。

Case2-1に対して、基底数 $r = 6$ の条件で構築した縮約モデルを対象として $t = 15[s]$ における $Sw_{FOM}(z, t)$ と $Sw_{ROM}(z, t)$ を比較した結果を図4.12に示し、 $t_{start} = 0, t_{end} = 15$ として、 $\bar{E}_{Sw}(t), \bar{E}_{Sw, total}$ を評価した結果を表4.9、表4.10に示す。図4.12より、縮約モデルから算出したスワール数 $Sw_{ROM}(z, t)$ は3次元流体解析結果から算出したスワール数 $Sw_{FOM}(z, t)$ とほ

ば一致し、表4. 10より全体平均誤差0.13%で一致することを確認した。

次に、Case2-2に対して、基底数 $r = 20$ の条件で構築した縮約モデルを対象として $t = 52, 53, 54, 55[s]$ における $Sw_{FOM}(z, t)$ と $Sw_{ROM}(z, t)$ を比較した結果を図4. 13に示す。また、図4. 9に示す流れが周期的に変動する時間領域(50 ~ 100[s])に対して、1周期分を対象として計算精度を評価することとして、 $t_{start} = 50, t_{end} = 55$ として、 $\bar{E}_{Sw}(t), \bar{E}_{Sw, total}$ を評価した結果を表4. 11、表4. 12に示す。図4. 13より、 $t = 53[s]$ において直管上流で $Sw_{ROM}(z, t)$ と $Sw_{FOM}(z, t)$ の差異が大きくなったが、それ以外では $Sw_{ROM}(z, t)$ と $Sw_{FOM}(z, t)$ は概ね一致し、表4. 12より全体平均誤差2.64%で一致することを確認した。縮約モデルを用いて配管系の旋回流を計算し流量計精度を評価するためには、配管断面平均スワール数の計算精度が重要であり、Case2-1では全体平均誤差0.13%で一致し、Case2-1では全体平均誤差2.64%で一致したことから、縮約モデルを流量計精度の評価に適用可能であることを確認した。

#### [ 縮約モデルによる計算時間短縮化の効果 ]

3次元流体解析と縮約モデルを用いた場合のCPU時間を比較した結果を表4. 13示す。CPU時間比較のために用いた計算機のスペックはキャビティー流れと同一である。表4. 13より、初回計算時には、Case2-1では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は15192[s]、縮約モデルを用いた場合は2044[s]、Case2-2では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は48036[s]、縮約モデルを用いた場合は55842[s]であり、縮約モデルを用いた場合の計算時間の加速率は0.9~7.4倍となった。また、2回目以降計算時には、Case2-1では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は15192[s]、縮約モデルを用いた場合は400[s]、Case2-2では3次元流体解析を用いた場合のCPU時間は48036[s]、縮約モデルを用いた場合は2564[s]であり、縮約モデルにより計算時間は18.7~38.0倍高速化されることを確認した。キャビティー流れと同様に、縮約モデルを用いた場合に、初回計算時にCPU時間が増大する理由は、縮約モデルを構築する必要があるからである。一度縮約モデルを構築すれば、2回目以降計算時には、構築済みの縮約モデルを用いて流れ場を計算でき、縮約モデル構築にかかるCPU時間が計算時間短縮のボトルネックにはならないと考える。

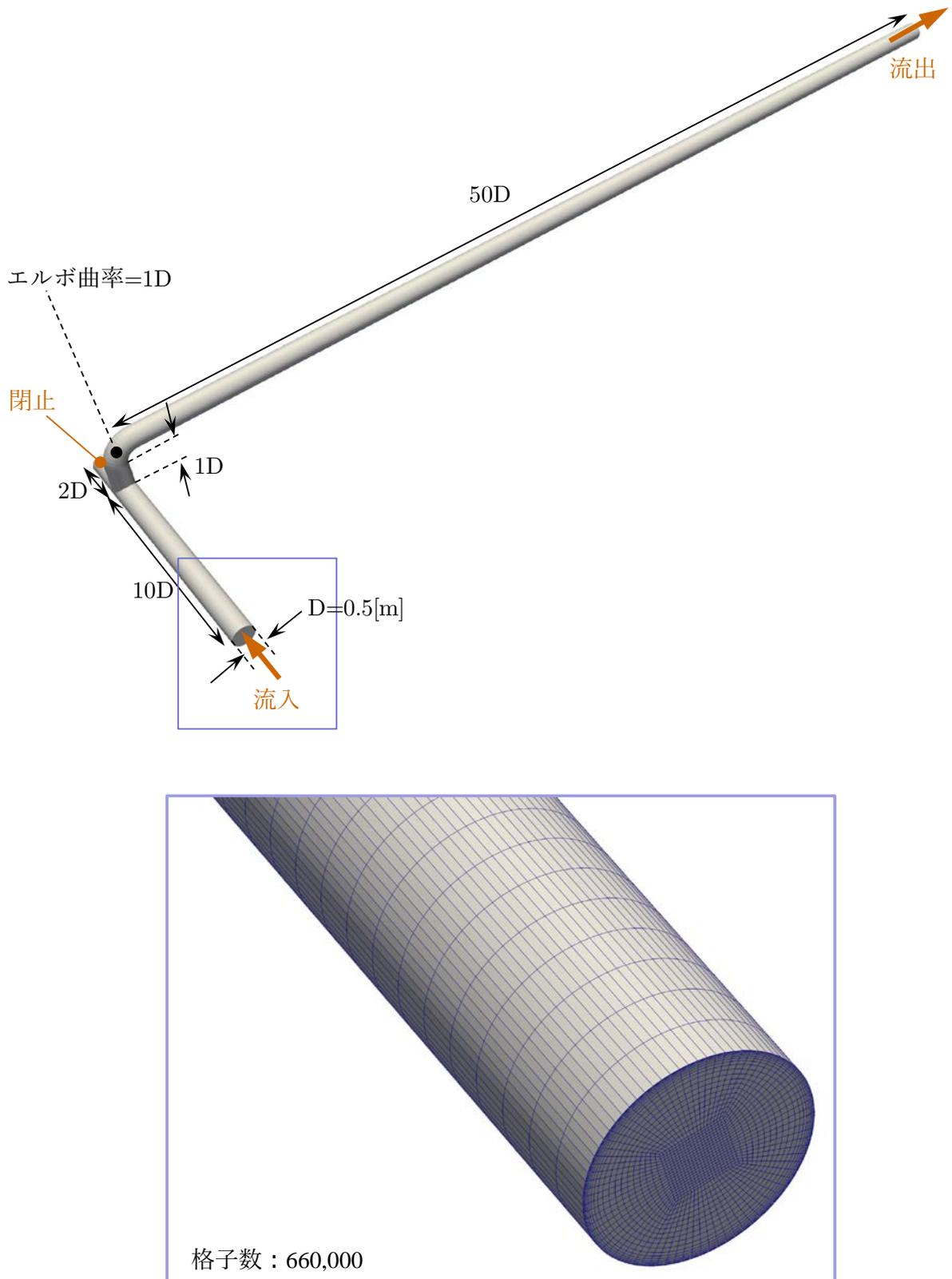


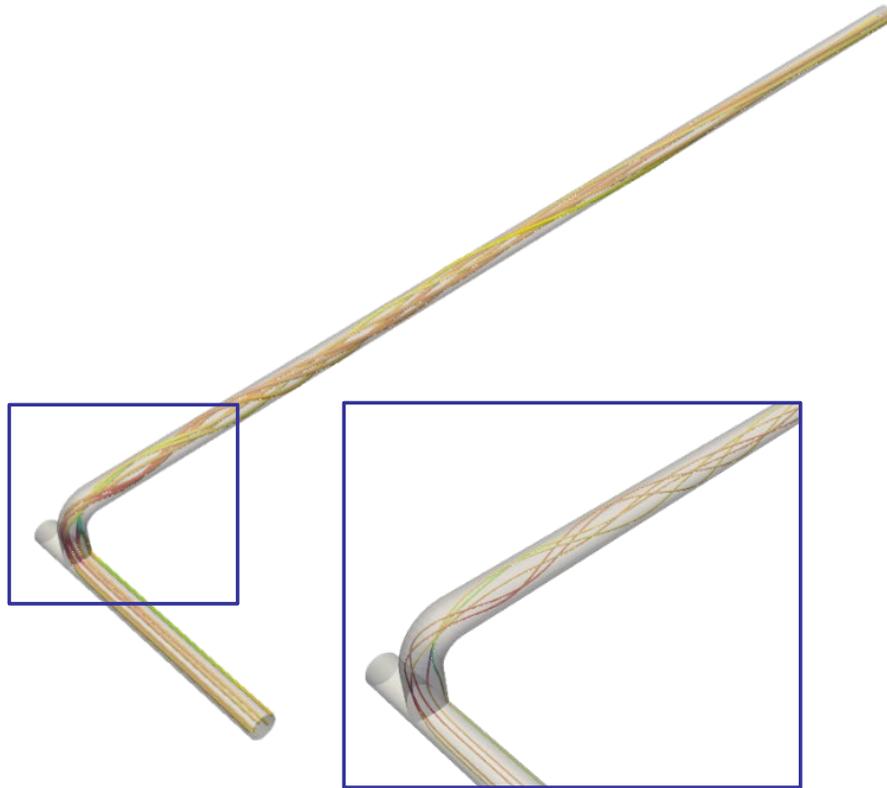
図 4.7 模擬配管流れ解析対象

表 4.6 3次元流体解析計算条件

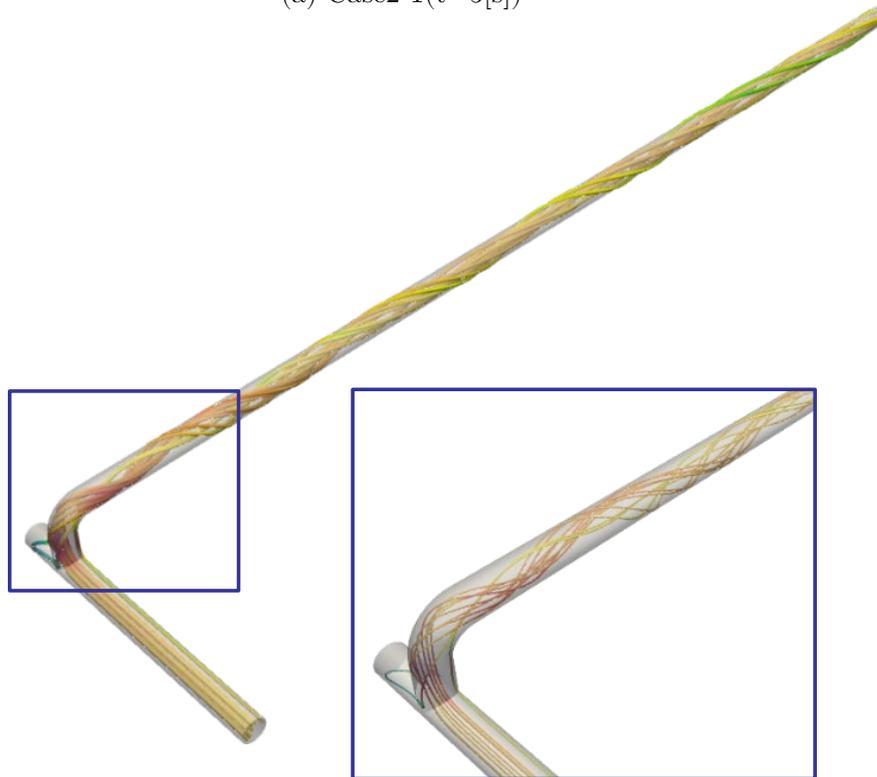
項目	条件	
	Case2-1	Case2-2
流体ソルバー	OpenFOAM	
レイノルズ数(Re)	$10^4$	$10^5$
解析時間	15[s]	100[s]

表 4.7 縮約モデル計算条件

項目	条件	
	Case2-1	Case2-2
3次元流体解析結果の サンプリング間隔	0.1[s]	
基底数	3, 4, 5, 6	20, 30, 40
時間ステップ幅	0.01[s]	
解析時間	15[s]	50[s]



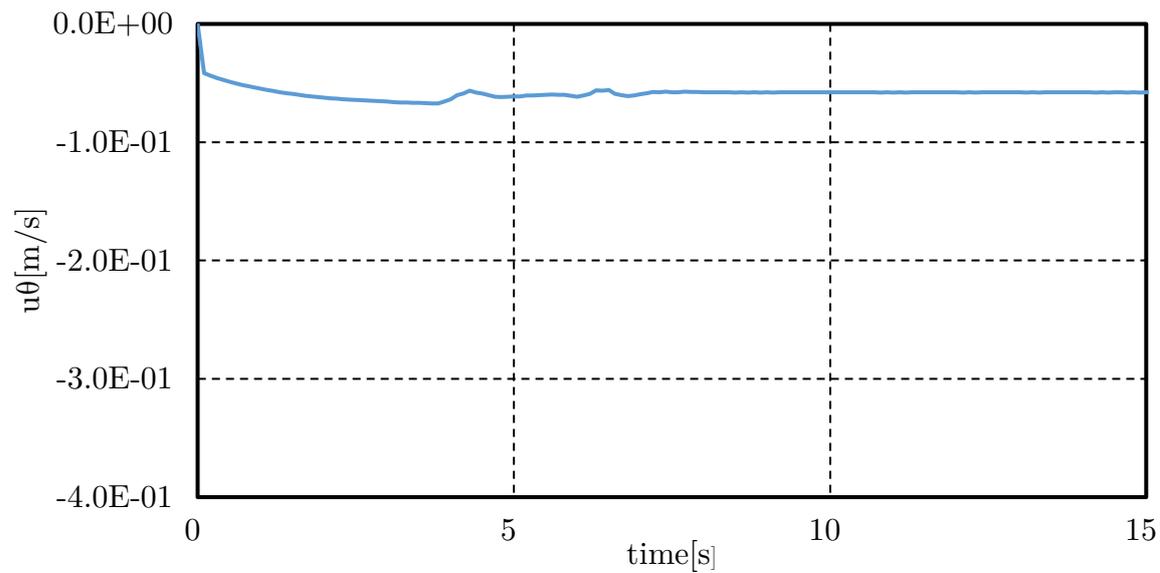
(a) Case2-1( $t=5[s]$ )



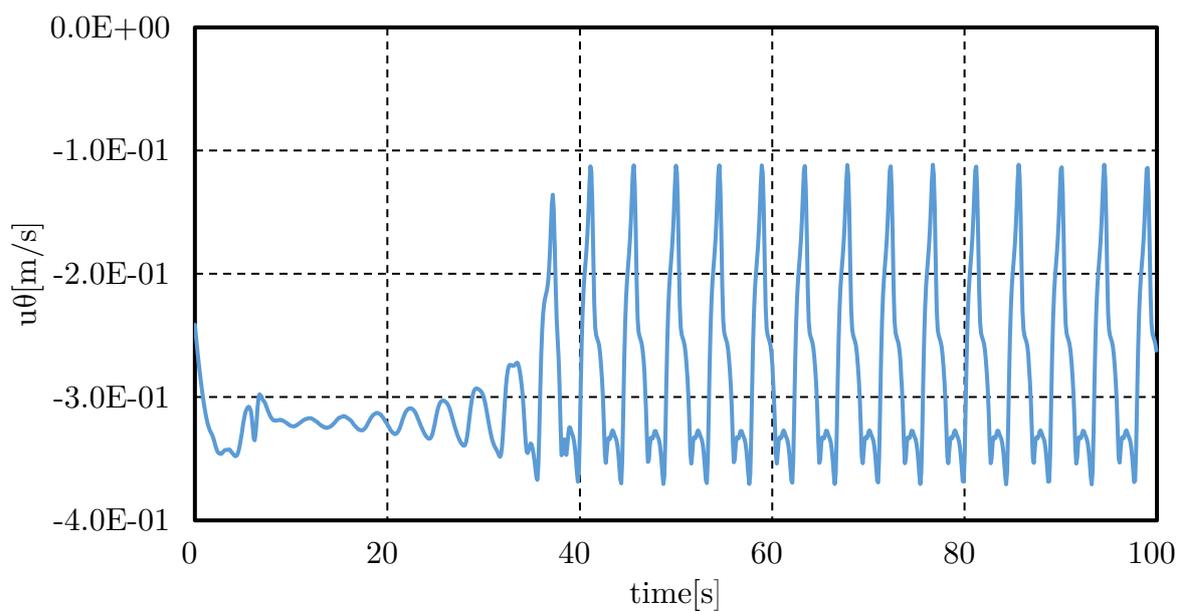
(b) Case2-2( $t=100[s]$ )



図 4. 8 3 次元流体解析計算結果(流線)



(a) Case2-1



(b) Case2-2

图 4. 9 3 次元流体解析結果(流速時間変化)

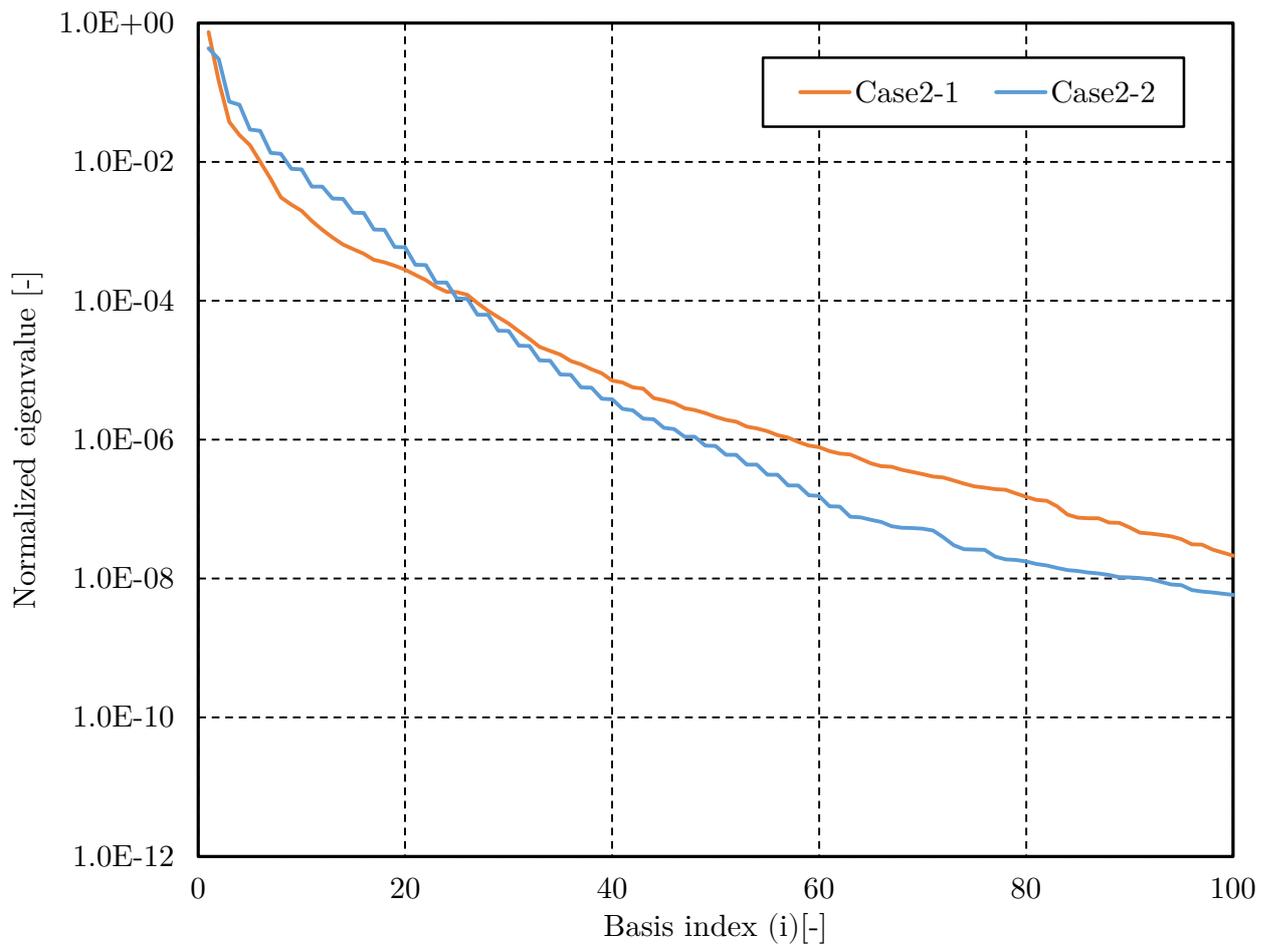


図 4.10 模擬配管流れに対する規格化固有値

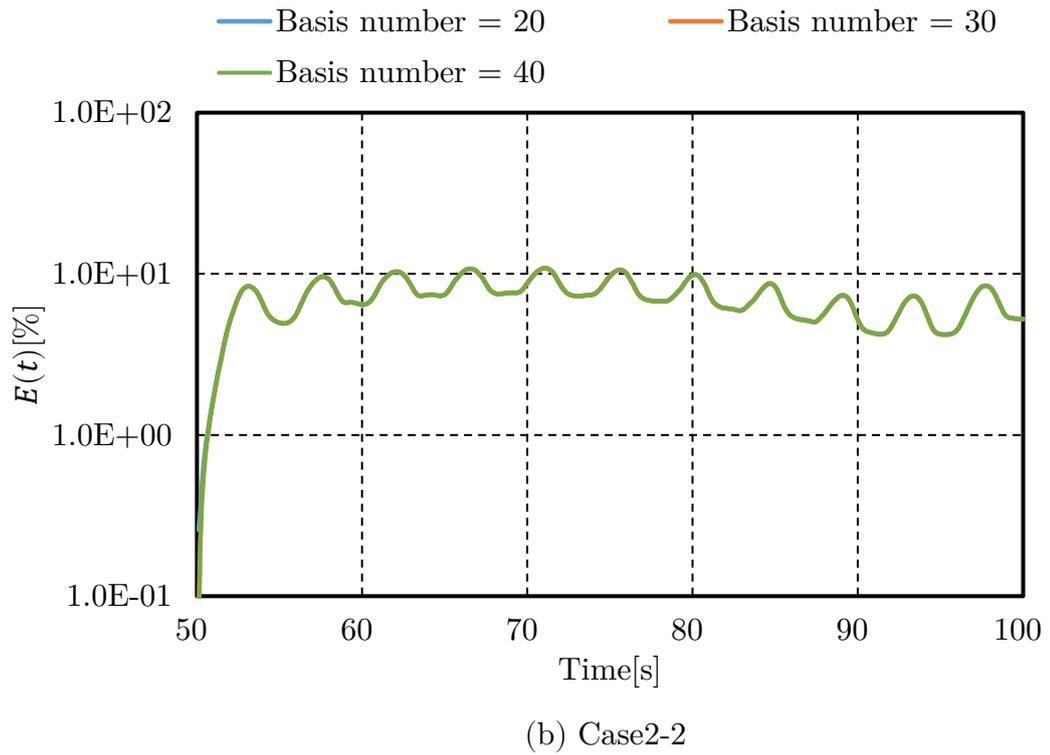
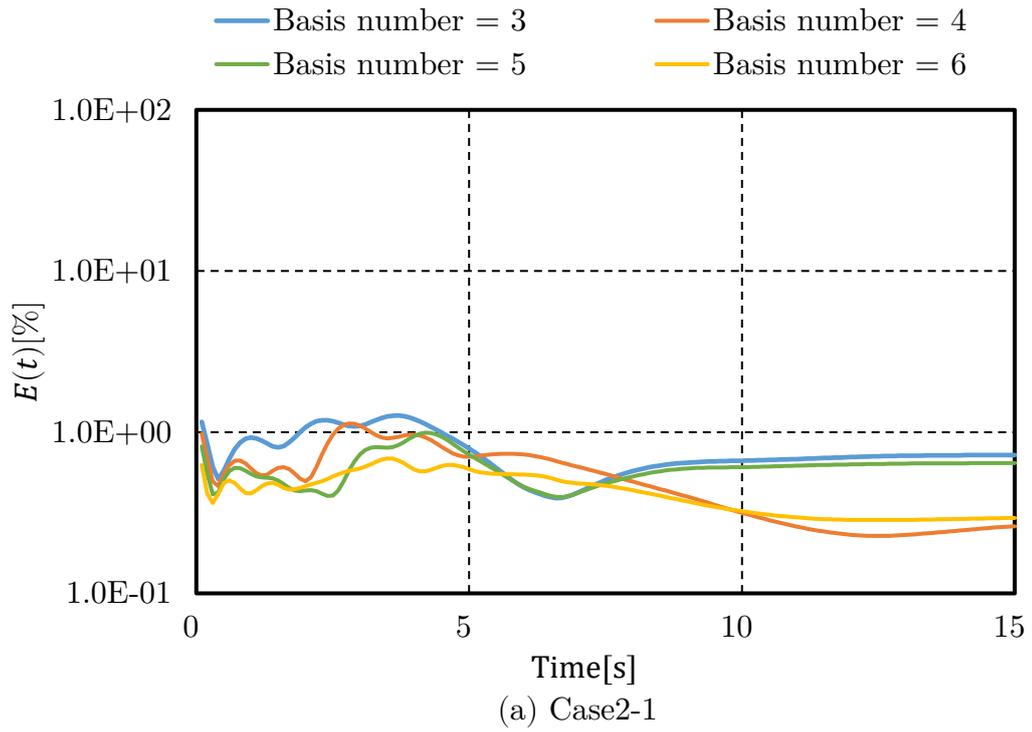


図 4.11 模擬配管流れに対する誤差の時間変化

表 4.8 模擬配管流れに対する時間平均誤差

(a) Case2-1

	基底数			
	3	4	5	6
$\bar{E}[\%]$	0.75	0.52	0.60	0.43

(b) Case2-2

	基底数		
	20	30	40
$\bar{E}[\%]$	7.05	7.05	7.05

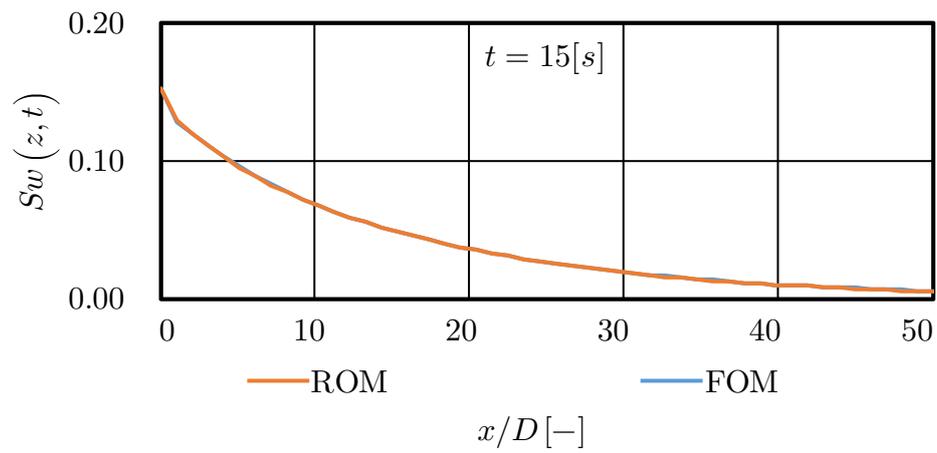


図 4. 12 配管断面平均スワール数の比較(Case2-1)

表 4. 9 配管断面平均スワール数の空間平均誤差(Case2-1)

$t[s]$	0	5	10	15
$\bar{E}_{Sw}(t)$	0.20	0.15	0.10	0.08

表 4. 10 配管断面平均スワール数の全体平均誤差(Case2-1)

$\bar{E}_{Sw, total}$	0.13
-----------------------	------

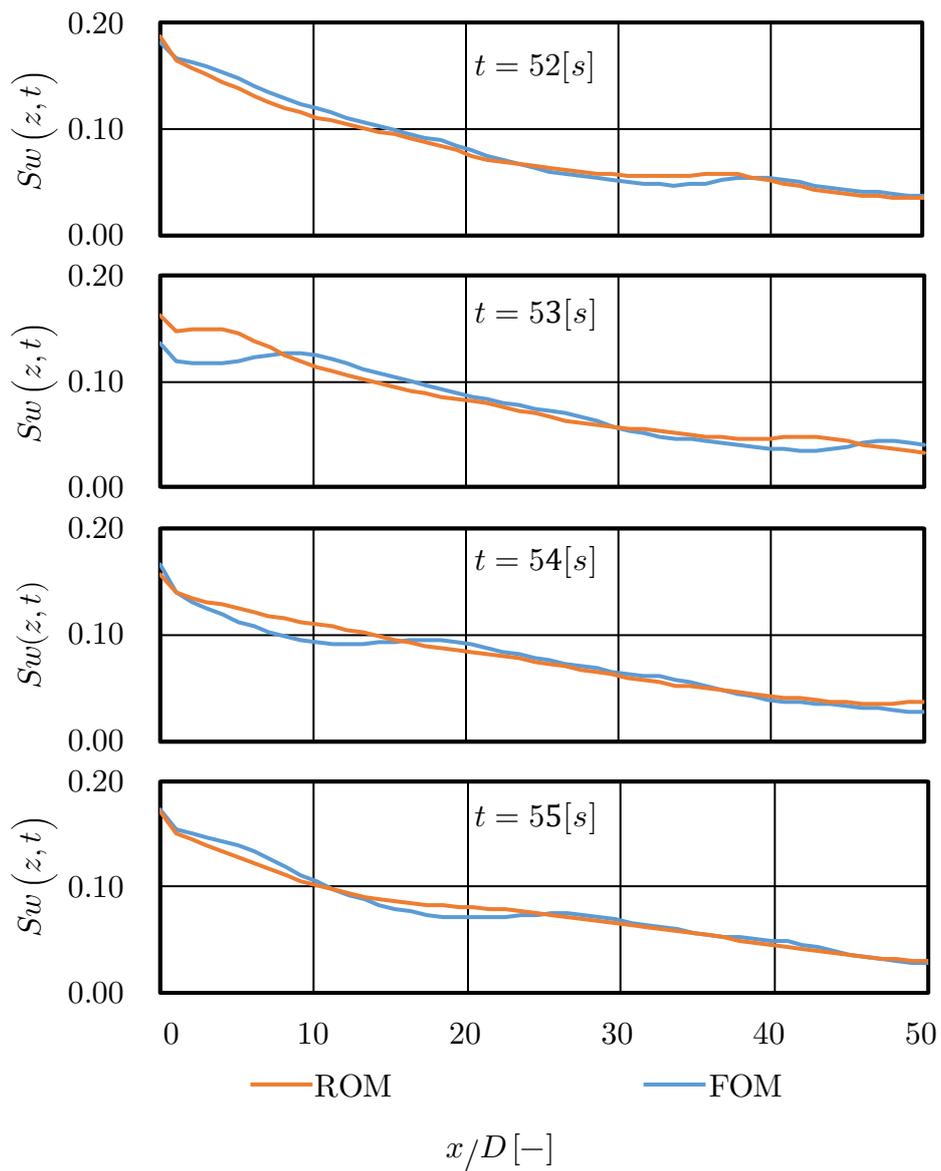


図 4. 13 配管断面平均スワール数の比較(Case2-2)

表 4. 11 配管断面平均スワール数の空間平均誤差(Case2-2)

$t[s]$	50	51	52	53	54	55
$\bar{E}_{Sw}(t)$	0.01	1.22	2.80	5.14	3.39	2.41

表 4. 12 配管断面平均スワール数の全体平均誤差(Case2-2)

$\bar{E}_{Sw,total}$	2.64
----------------------	------

表 4. 13 模擬配管流れに対する計算時間の比較

			Case2-1 (基底数=6)		Case2-2 (基底数=40)	
			ROM	FOM	ROM	FOM
初回計算	CPU時間[s]	ROM構築	1644	-	53278	-
		計算	400	15192	2564	48036
		全体	2044	15192	55842	48036
	CPU 時間の加速率[-]		7.4	1	0.9	1
2回目以降計算	CPU時間[s]	計算	400	15192	2564	48036
	CPU 時間の加速率[-]		38.0	1	18.7	1

## 4.8 層流条件でのキャビティ流れ解析への NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデルの適用

### 4.8.1 計算条件

計算対象を図4.1に示し、3次元流体解析の計算条件を表4.14に示す。本計算では、流れが層流となるようにレイノルズ数( $Re$ )を $Re = 10^3$ とし、解析時間を40[s]とした。それ以外の計算条件は4.6節で述べた条件と同じである。

次に縮約モデルの計算条件を表4.15に示す。3次元流体解析にて0.1(s)間隔で出力した時系列データに対して、表4.15に示す3通りのアプローチで縮約モデルを構築した。Case3-1では、NS方程式を基礎式として縮約モデルを構築した。具体的には、式(4.2.6)、式(4.2.7)、式(4.2.10)より、流速、圧力の基底空間を抽出した後、式(4.2.21)~式(4.2.31)より縮約モデルを構築し、式(4.2.32)より基底の結合係数 $a_j^{n+1}$ を計算した。Case3-2、Case3-3では、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築した。具体的には、式(4.2.6)、式(4.2.7)より流速の基底空間を抽出し、式(4.2.8)、式(4.2.9)より圧力の基底空間を抽出した後、式(4.3.18)~式(4.2.27)、式(4.2.22)~式(4.2.31)より縮約モデルを構築し、式(4.3.28)より流速基底の結合係数 $a_j^{n+1}$ と圧力基底の結合係数 $b_m^{n+1}$ を計算した。Case3-2とCase3-3の違いは、Case3-2では、圧力境界条件として境界面法線方向の圧力勾配をゼロとする式(4.8.1)を用いたのに対して、Case3-3では、圧力境界条件として運動量バランスから導出した圧力に対するノイマン境界条件である式(4.3.7)を用いた点である。

$$\vec{n} \cdot \nabla p^* = 0 \text{ on } S_{ne} = S_{wall} \cup S_{in} \quad (4.8.1)$$

Case3-1、Case3-2、Case3-3において流速基底数 $r_u = 10$ 、圧力基底数 $r_p = 10$ とした。また、式(4.2.32)、式(4.3.28)を解く際の時間ステップ幅は0.01[s]とした。

### 4.8.2 適用結果

[ 3次元流体解析の計算結果 ]

3次元流体解析の計算結果として、上部境界面から距離0.05[m]の位置 (図4.1中の点A) における $x$ 方向流速成分の時間変化を図4.14に示す。図4.14より時刻30[s]以降で流れは定常

状態となった。

[ 縮約モデルの計算精度評価 ]

縮約モデルの計算精度を評価するために、式(4.6.2)より3次元流体解析の流速 $\bar{u}_{FOM}(t)$ と縮約モデルの流速 $\bar{u}_{ROM}(t)$ の誤差 $E_u(t)$ を計算し、式(4.8.2)より3次元流体解析の圧力勾配 $\nabla p_{FOM}(t)$ と縮約モデルの圧力勾配 $\nabla p_{ROM}(t)$ の誤差 $E_p(t)$ を計算した。

$$E_p(t) \equiv 100 \times \frac{\sqrt{\int_V \|\nabla p_{ROM}(t) - \nabla p_{FOM}(t)\|^2 dV}}{\sqrt{\int_V \|\nabla p_{FOM}(t)\|^2 dV}} \quad (4.8.2)$$

非圧縮性流れにおいては、圧力は圧力勾配項として基礎式に組み込まれ、圧力値そのものは定数分の任意性を含むので、圧力値ではなく圧力勾配を用いて圧力の計算精度を評価した。

Case3-1、Case3-2、Case3-3に対する誤差 $E_u(t), E_p(t)$ の時間変化を図4. 15に示し、 $E_u(t), E_p(t)$ の時間平均値 $\bar{E}_u, \bar{E}_p$ を表4. 16に示す。図4. 15、表4. 16より、流速の計算精度に関しては、NS方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチ(Case3-1)よりも、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチ(Case3-2, Case3-3)の方がわずかではあるが誤差が小さい結果となった。一方、圧力の計算精度に関しては、Case3-2、Case3-3よりもCase3-1の条件で誤差が小さい結果となった。また、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチにおいて、圧力境界条件として式(4.8.1)を用いた場合(Case3-2)よりも、式(4.3.7)を用いた場合(Case3-3)の条件で誤差が小さい結果となった。Case3-2とCase3-3の比較結果より、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチでは、運動量バランスから導出した圧力に対するノイマン境界条件である式(4.3.7)を用いることで圧力の計算精度が向上することを確認した。次に、Case3-1とCase3-3の比較から、流速の計算精度はCase3-3の条件で誤差が小さいが、その差はわずかであり、圧力の計算精度はCase3-1の条件で誤差が小さいことから、総合的にはCase3-1の条件で計算精度が高い結果となった。Case3-1では、流速に対する固有直交分解結果から式(4.2.10)に示す近似式より圧力基底を算出している。一方、Case3-3では、圧力の3次元解析結果に固有直交分解法を適用して圧力基底を算出している。本計算結果では、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とし、固有直交分解法から圧力基底を算出するアプローチの優位性は見られなかった。

本計算の計算対象であるキャビティ流れでは、図4.1中の上部コーナ一点は流速境界条件に関して特異点となる。その結果、上部コーナ一点近傍で圧力勾配は急激に大きくなり計算精度が低下する。ここで、式(4.8.3)より計算した圧力勾配誤差分布の時間変化を図4.16に示す。

$$E_p(\vec{x}, t) \equiv \nabla p_{ROM}(\vec{x}, t) - \nabla p_{FOM}(\vec{x}, t) \quad (4.8.3)$$

図4.16より、いずれの計算条件(Case3-1~Case3-3)に対しても上部コーナ一点近傍でA、Bにおける誤差が大きくなった。本計算において、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とし、固有直交分解法から圧力基底を算出するアプローチの優位性が見られなかった理由として、上部コーナ一点が流速境界条件に関して特異点となり、上部コーナ一点近傍で計算精度が低下したためであると考察する。一方、配管系流れでは、特異点となる境界条件を含まないため、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とし、固有直交分解法から圧力基底を算出するアプローチの優位性が見られる可能性があると考えられる。

本章では、4.5節において、乱流を対象として、RANS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法を導出した。乱流に対して、RANS方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法とRANS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル構築方法の比較、検討は今後の課題としたい。

表 4. 14 3次元流体解析計算条件

項目	条件
	Case3-1, Case3-2, Case3-3
流体ソルバー	OpenFOAM
計算格子	300 × 300 × 1(Nonuniform Grid)
レイノルズ数(Re)	10 <sup>3</sup>
解析時間	40[s]

表 4. 15 縮約モデル計算条件

項目	条件		
	Case3-1	Case3-2	Case3-3
3次元流体解析結果の サンプリング間隔	0.1[s]		
基礎式	NS方程式	NS方程式+圧力ポアソン方程式	
圧境界条件	—	式(4.8.1)	式(4.3.7)
流速基底数	10		
圧力基底数	10		
時間ステップ幅	0.01[s]		
解析時間	40[s]		

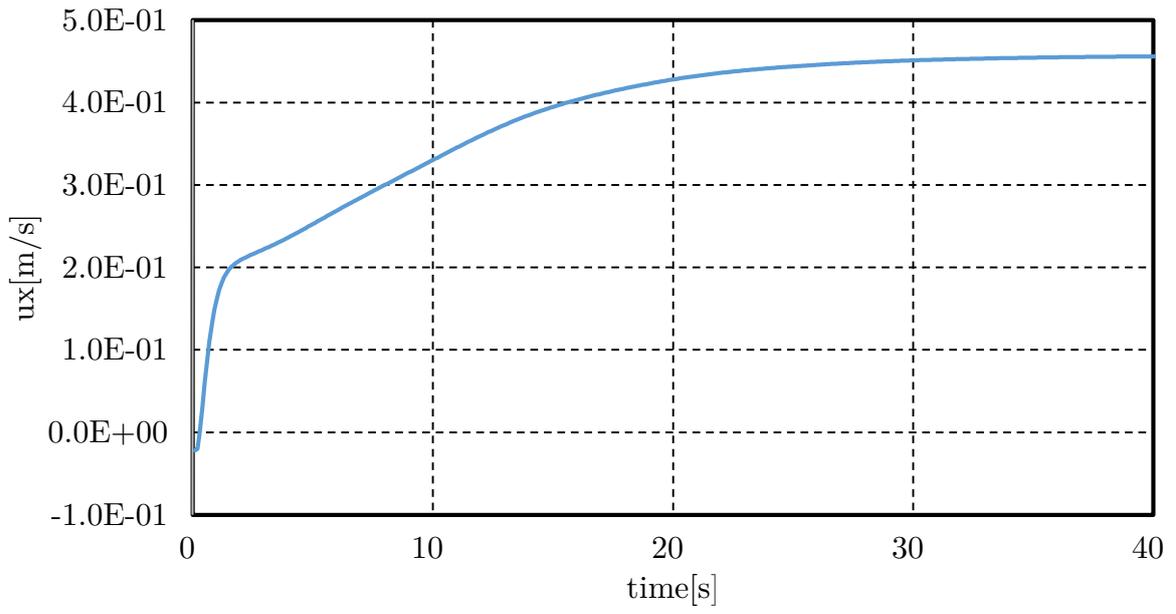


图 4. 14 3 次元流体解析計算結果

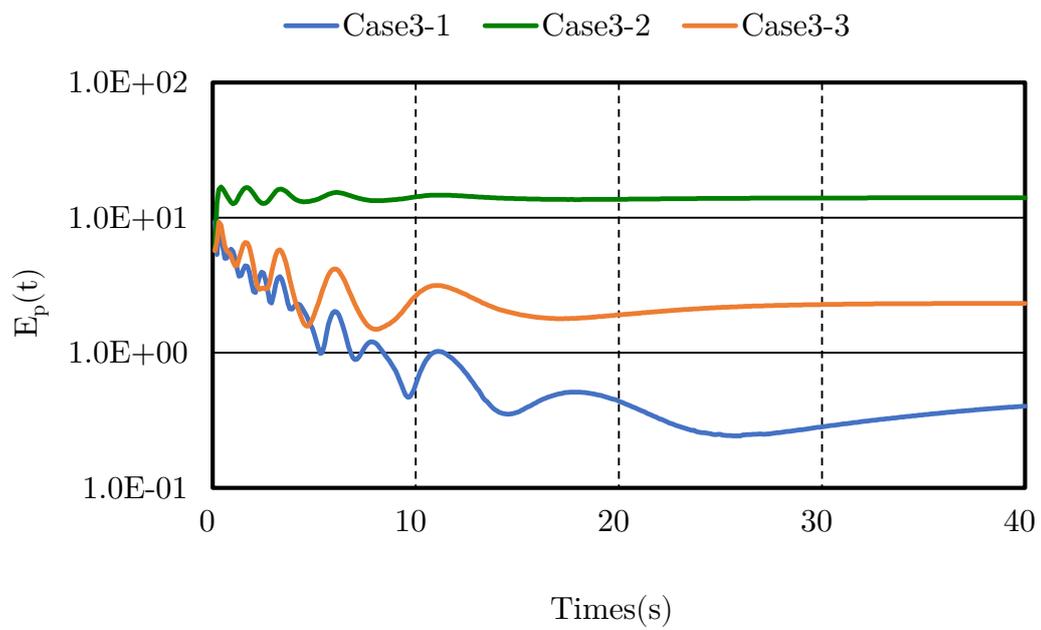
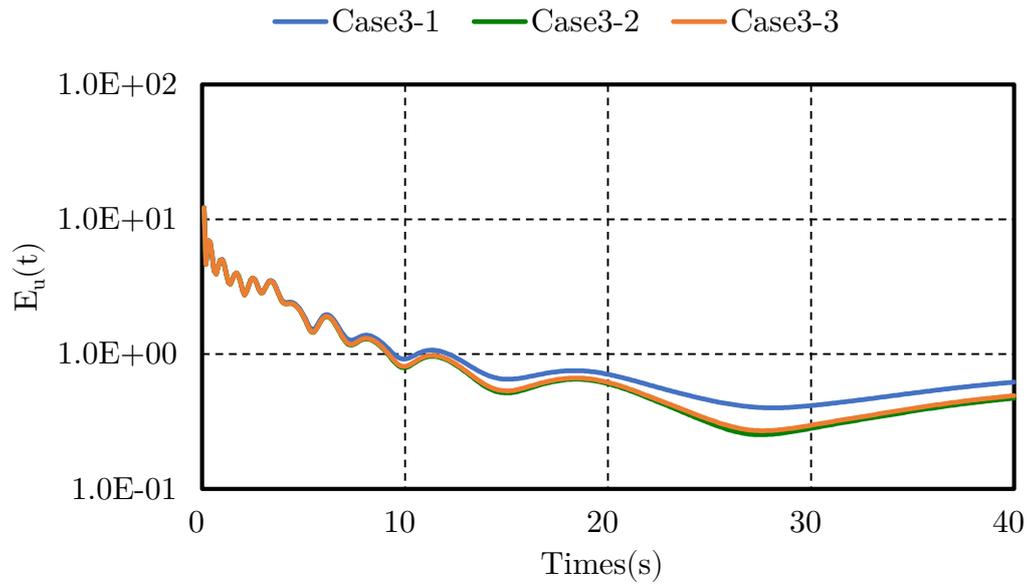
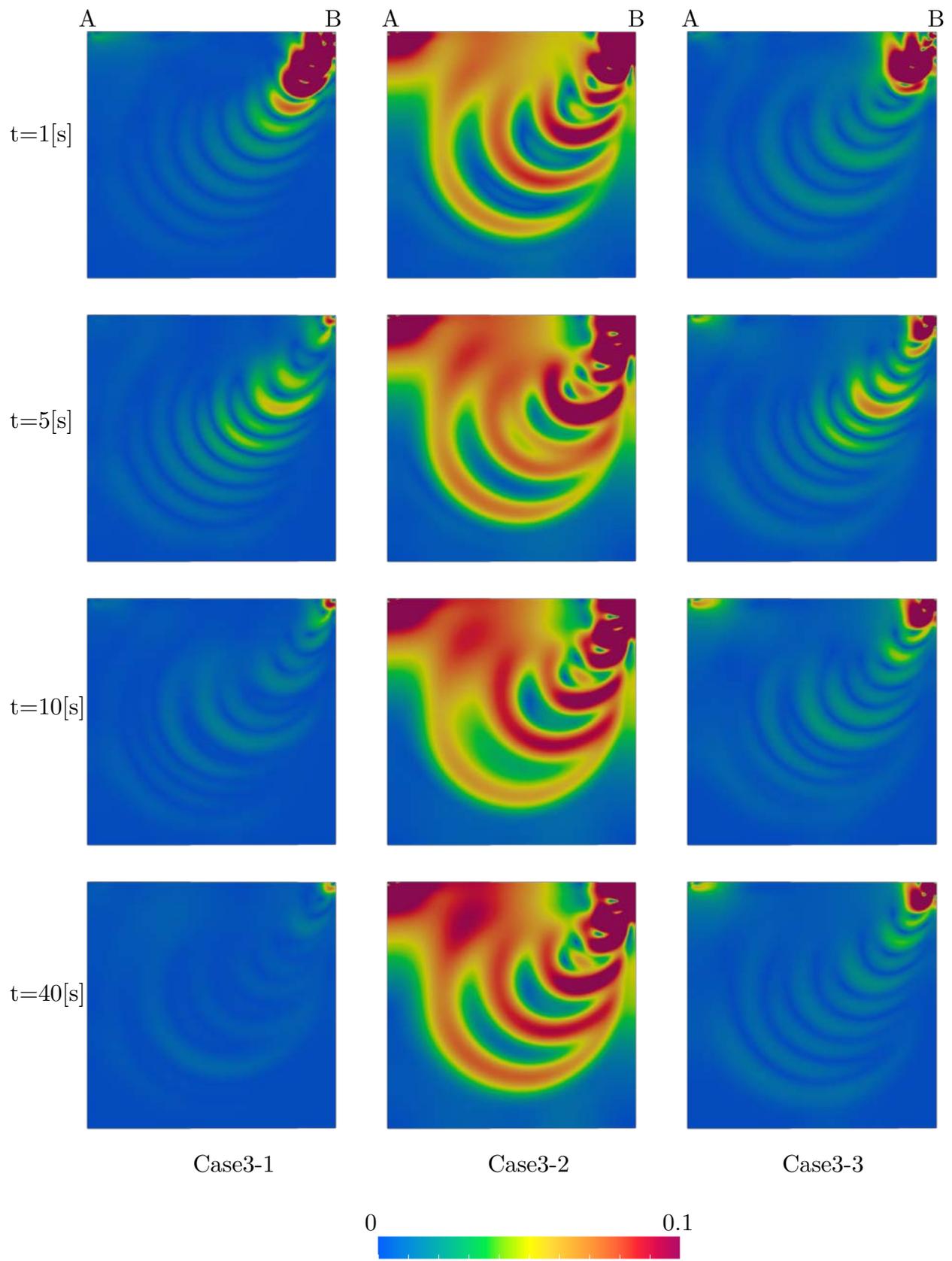


図 4. 15 層流条件でのキャビティー流れに対する誤差の時間変化

表 4.16 層流条件でのキャビティー流れに対する時間平均誤差

	条件		
	Case3-1	Case3-2	Case3-3
$\bar{E}_u$ [%]	1.08	0.98	0.97
$\bar{E}_p$ [%]	0.89	14.0	2.51



圧力勾配の誤差 $[\text{Pa}/(\text{kg}/\text{m}^3)/\text{m}]$

図 4. 16 圧力勾配誤差分布の時間変化

## 4.9 結論

Galerkin射影を用いて、流れ解析の基礎式を基底空間上に射影し、配管系流れ解析に対する縮約モデルを構築する手法を提案した。提案手法を層流条件および乱流条件のキャビティ流れ、乱流条件の配管内旋回流れ解析に適用し、縮約モデルを用いた流れ解析の計算精度、計算時間短縮の効果を検討し、以下の結論を得た。

- ① キャビティ流れに対して、レイノルズ数 $Re = 10^5$ の条件で、基底数40で縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を計算した。縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差2.64%で一致し、2回目以降計算時のCPU時間は、3次元流体解析を用いた場合と比較し87.0倍高速化された。
- ② 模擬配管流れに対して、レイノルズ数 $Re = 10^4$ の条件で、基底数6で縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を計算した。縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差0.43%で一致した。また、レイノルズ数 $Re = 10^5$ の条件で、流基底数40で縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を計算した。縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差7.05%で一致した。次に、配管断面平均スワール数を用いて計算精度を評価し、 $Re = 10^4$ の条件では全体平均誤差0.13%で一致し、 $Re = 10^5$ の条件では全体平均誤差2.64%で一致した。配管断面平均スワール数に対する計算精度評価結果より、縮約モデルを流量計精度の評価に適用可能であることを確認した。さらに、CPU時間を評価し、 $Re = 10^4$ の条件では2回目以降計算時のCPU時間は、3次元流体解析を用いた場合と比較し18.7倍高速化され、 $Re = 10^5$ の条件では2回目以降計算時のCPU時間は、3次元流体解析を用いた場合と比較し38.0倍高速化された。
- ③ キャビティ流れに対して、レイノルズ数 $Re = 10^3$ の条件で、NS方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチと、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチを適用した。NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチでは、運動量バランスから導出した圧力に対するノイマン境界条件を用いることで圧力の計算精度が向上することを確認した。また、本計算結果では、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とし、固有直交分解法から圧力基底を算出するアプローチの優位性は見られなかった。

## 第5章

### 結論

本研究では、配管系を対象とした3次元流体解析の計算時間短縮を目的として、固有直交分解法とGalerkin射影に基づく縮約モデルを配管系流れ解析に適用して、流れ場を短時間に計算する手法を開発した。

第2章では、固有直交分解法を用いて配管系流れ解析から基底空間を抽出する手法を提案した。提案手法を配管内旋回流れ解析に適用し、抽出した基底空間を用いた流れ場の近似精度について検討し、以下の結論を得た。(1) 二つのエルボを含む模擬配管系を対象として、3次元流体解析より得られた複数の流量条件に対する定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出した。定常流れでは、最小流量と最大流量に対するレイノルズ数を含んだ上で、中間流量に対するレイノルズ数の数を増やし、同時に基底数を増やすことで、基底空間による近似精度が上昇する。レイノルズ数の数4、基底数3の条件で、3次元流体解析の流速を誤差0.6[%]以下の精度で近似できることを確認した。(2) エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、3次元流体解析より得られた複数の流量条件に対する非定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出した。時間方向のサンプリング数は基底空間による近似精度への影響は小さい。一方、最小流量と最大流量に対するレイノルズ数を含んだ上で、中間流量に対するレイノルズ数の数を増やし、同時に基底数を増やすことで、基底空間による近似精度が上昇する。レイノルズ数の数4、基底数100の条件で、3次元流体解析の流速を時間平均誤差2.7[%]以下の精度で近似できることを確認した。(3) エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、3次元流体解析より得られた周期的な流れに対する流れの周波数特性と基底の関係を検討した。3次元流体解析の流れ場の周期性に対応して、基底の基底結合係数も周期的に変化する結果となった。さらに、基底次数 $i = 2k - 1, 2k$ に対する基底結合係数の周波数は、3次元流体解析の流れ場の低周波成分の周波数 $f_k$ に一致することを確認した。(4) エルボ、分岐、オリフィス、弁を含む実配管系を対象として、3次元流体解析より得られた非定常流れ場に固有直交分解法を適用し基底空間を抽出した。基底数180の条件で、3次元流体解析の流速を時間平均誤差4.9[%]以下の精度で近似できることを確認した。

第3章では、プラントの配管系を対象とした旋回流解析結果に、機械学習を適用して短時間に渦中心位置を抽出する手法を提案し、以下の結論を得た。(1) 機械学習により渦中心の数を予測するモデルと渦中心位置と回転速度を予測するモデルを構築し、配管断面の流速・圧力分布を入力値として、渦中心の数、渦中心位置、回転速度を予測する手法を検討した。(2) エルボ、分岐を含む模擬配管系を対象として、流れ解析結果から予測モデルを学習し、配管断面の流速・圧力分布を入力値として、渦中心の数、渦中心位置、回転速度を予測した。数式モデルによる結果と比較して、予測モデルの結果はノイズにより生じた渦を除去し、より妥当な結果が得られていることを確認した。また、渦中心位置を計算するために必要なCPU時間は数学モデルに対して131倍加速されることを確認した。(3) 流れ解析結果に対して固有直交分解法を適用して基底空間を抽出した後、各基底に対して渦中心位置と回転速度を算出した。基底の次数が大きくなると、基底が保有している流速場のエネルギーが減少し、基底より抽出されるらせん渦の空間スケールが小さくなることを確認した。

第4章では、Galerkin射影を用いて、流れ解析の基礎式を基底空間上に射影し、配管系流れ解析に対する縮約モデルを構築する手法を提案した。開発手法を層流条件および乱流条件のキャビティー流れ、乱流条件の配管内旋回流解析に適用し、縮約モデルを用いた流れ解析の計算精度、計算時間短縮の効果を検討し、以下の結論を得た。(1) キャビティー流れに対して、レイノルズ数 $Re = 10^5$ の条件で、40個の基底で縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を計算した。縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差2.64%で一致し、2回目以降計算時のCPU時間は、3次元流体解析を用いた場合と比較し87.0倍高速化された。(2) 模擬配管流れに対して、レイノルズ数 $Re = 10^4$ の条件で、基底数6で縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を計算した。縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差0.43%で一致した。また、レイノルズ数 $Re = 10^5$ の条件で、流基底数40で縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を計算した。縮約モデルの計算結果は3次元流体解析の計算結果に対して時間平均誤差7.05%で一致した。次に、配管断面平均スワール数を用いて計算精度を評価し、 $Re = 10^4$ の条件では全体平均誤差0.13%で一致し、 $Re = 10^5$ の条件では全体平均誤差2.64%で一致した。配管断面平均スワール数に対する計算精度評価結果より、縮約モデルを流量計精度の評価に適用可能であることを確認した。さらに、CPU時間を評価し、 $Re = 10^4$ の条件では2回目以降計算時のCPU時間は、3次元流体解析を用いた場合と比較し18.7倍高速化され、 $Re = 10^5$ の条件では2

回目以降計算時のCPU時間は、3次元流体解析を用いた場合と比較し38.0倍高速化された。

(3) キャビティ流れに対して、レイノルズ数 $Re = 10^3$ の条件で、NS方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチと、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチを適用した。NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチでは、圧力の計算精度を向上させるためには、運動量バランスから導出した圧力に対するノイマン境界条件を用いることが必要であることを確認した。また、層流に対して、NS方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチの方が、NS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式として縮約モデルを構築するアプローチよりも、計算精度の観点で優位であることを確認した。

第2章、第3章、第4章の結果より、配管系流れ解析結果に対して、固有直交分解法とGalerkin射影を適用して基底空間上に流れ解析の基礎式を射影して縮約モデルを構築し、縮約モデルを用いて流れ場を短時間に計算できる見通しを得た。提案手法を用いて構築される縮約モデルを用いて、配管系の流量計精度評価、配管減肉速度評価に必要となる配管内部の旋回流れを短時間に算出可能である。これにより、開発技術をプラント運転前の流量計精度評価結果の配管系設計へのフィードバック、配管減肉速度予測結果に基づくプラント定期点検での肉厚測定作業の効率化に活用でき、プラントの設計、運転・保守の最適化、標準化に貢献できる。

## 謝辞

本論文は著者が東京大学大学院新領域創成科学研究科人間環境学専攻博士後期課程在籍中の研究成果をまとめたものです。本博士論文を執筆するにあたり、多くの方々のご支援を賜りました。謹んでお礼申し上げます。

はじめに、主査をお引き受けくださいました東京大学大学院新領域創成科学研究科奥田洋司教授に厚くお礼申し上げます。著者が本研究に取り組む機会を与えて頂くとともに、研究を進めていく過程で、指導教官として様々な御指導を賜りました。いつでも親身になって相談に乗ってくださり、精神的にも大きな励みとなりました。ここに深く感謝の意を表します。また、東京大学大学院新領域創成科学研究科橋本学講師には、研究室ゼミ等において様々な御助言を頂きました。心から感謝いたします。

本論文の副査をお引き受けくださいました東京大学大学院新領域創成科学研究科陳昱教授、党超鋆准教授、東京大学大学院工学系研究科越塚誠一教授、東京大学情報基盤センター中島研吾教授には貴重なご意見を数多く頂きました。感謝の意を表します。

研究室メンバーの皆様からは、研究室ゼミや日々の議論を通じて、多くの刺激を受けました。感謝の意を表します。

会社に所属しながら博士課程進学のお機会を与えて頂いた株式会社日立製作所研究開発グループの皆様にも大変お世話になりました。楠見尚弘センタ長、門田和也部長、伊藤智道研究主幹、山野井一郎主任研究員、片桐幸徳主任研究員には業務の調整をはじめ、多くの面でお力添え頂きました。ここに感謝いたします。

最後に、仕事と研究を両立するにあたって精神的な支えとなってくれた妻に感謝いたします。

# 付録

## 付録 A. 基底計算式の算出

2.2.1節で述べたように、基底 $\vec{\varphi}_i$ は、式(A.1)と式(A.2)の最大化問題の解として求められる。

$$\vec{\varphi}_i = \arg \max_{\vec{\varphi}_i} \vec{\varphi}_i^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i \quad (\text{A.1})$$

$$\langle \vec{\varphi}_i, \vec{\varphi}_i \rangle = \vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i = 1 \quad (\text{A.2})$$

ラグランジュの未定乗数法[100]より、式(A.1)と式(A.2)の最大化問題の解 $\vec{\varphi}_i$ は、ラグランジュ乗数 $\lambda_i$ より定義される式(A.3)が、 $\vec{\varphi}_i$ の成分 $\varphi_{i,s}$  ( $s = 1, \dots, n$ )に対して停留点をとる条件である式(A.4)より計算される。

$$L \equiv \vec{\varphi}_i^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i - \lambda_i (\vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i - 1) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_{i,s}} = 0 \quad (\text{A.4})$$

式(A.4)を式(A.3)に代入して、

$$\frac{\partial (\vec{\varphi}_i^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i)}{\partial \varphi_{i,s}} - \frac{\partial [\lambda_i (\vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i - 1)]}{\partial \varphi_{i,s}} = 0 \quad (\text{A.5})$$

式(A.5)の左辺第1項を変形して、

$$\frac{\partial \vec{\varphi}_i^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i}{\partial \varphi_{i,s}} = \vec{\xi}_s^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i + \vec{\varphi}_i^T \mathbf{WR} \vec{\xi}_s \quad (\text{A.6})$$

式(A.6)中の $\vec{\xi}_s$ は第 $s$ 成分が1、それ以外の成分が0となるベクトルである。式(A.6)の右辺を変形して、

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_s^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i + \vec{\varphi}_i^T \mathbf{WR} \vec{\xi}_s &= \vec{\xi}_s^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i + \vec{\xi}_s^T \mathbf{R}^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i \\ &= \vec{\xi}_s^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i + \vec{\xi}_s^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i \quad (\because \mathbf{R} \text{は対称行列}) \\ &= 2\vec{\xi}_s^T \mathbf{WR} \vec{\varphi}_i \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式(2.14)の左辺第2項を変形して、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial[\lambda_i(\vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i - 1)]}{\partial \varphi_{i,s}} &= \lambda_i \vec{\xi}_s^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i + \lambda_i \vec{\varphi}_i^T \mathbf{W} \vec{\xi}_s \\
 &= \lambda_i \vec{\xi}_s^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i + \lambda_i \vec{\xi}_s^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i \\
 &= 2\lambda_i \vec{\xi}_s^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

式(A.6)～式(A.8)を式(A.5)に代入して、

$$\vec{\xi}_s^T \mathbf{W} \mathbf{R} \vec{\varphi}_i - 2\lambda_i \vec{\xi}_s^T \mathbf{W} \vec{\varphi}_i = 2\vec{\xi}_s^T \mathbf{W} (\mathbf{R} \vec{\varphi}_i - \lambda_i \vec{\varphi}_i) = 0, s = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{R} \vec{\varphi}_i = \lambda_i \vec{\varphi}_i \tag{A.9}$$

すなわち、式(A.1)と式(A.2)の最大化問題の解 $\vec{\varphi}_i$ は、式(A.9)に示す共分散行列 $\mathbf{R}$ の固有ベクトルと固有値 $\lambda_i$ を求めることで得られる。

## 付録 B. Snapshot POD に基づく基底の算出方法

付録Aで述べたように、基底 $\vec{\varphi}_i$ は式(A.9)に示す共分散行列 $R$ の固有ベクトルと固有値 $\lambda_i$ を求めることで得られる。 $R$ はサイズ $n \times n$ の密行列である。2.2節で述べたように $n$ は $10^5 \sim 10^7$ のオーダーとなる状況が想定されるため、 $\vec{\varphi}_i$ を計算するためにサイズ $10^5 \sim 10^7$ の密行列に対する固有値問題を解くこととなり、計算に莫大な時間が必要となる。この課題の解決にSnapshot PODを適用する[84]。以下では、Snapshot PODに基づく基底 $\vec{\varphi}_i$ の算出方法の概要を説明する。

式(B.1)に示すように、行列 $W^{1/2}Y$ を特異値分解により直交行列 $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{(m \times l) \times (m \times l)}$ 、対角行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times (m \times l)}$ に分解する[101]。

$$W^{1/2}Y = U\Sigma V^T \quad (\text{B.1})$$

$$U = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_i \cdots \vec{u}_n], \vec{u}_i \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.2})$$

$$V = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_i \cdots \vec{v}_{m \times l}], \vec{v}_i \in \mathbb{R}^{m \times l} \quad (\text{B.3})$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_d) \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{u}_i^T \vec{u}_i = 1 \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{v}_i^T \vec{v}_i = 1 \quad (\text{B.6})$$

ここで、 $W, Y, \vec{u}_i, \vec{v}_i, \sigma_i$ に関して以下の関係が成り立つ。

$$W^{1/2}Y\vec{v}_i = \sigma_i\vec{u}_i \quad (\text{B.7})$$

$$Y^TW^{1/2}\vec{u}_i = \sigma_i\vec{v}_i \quad (\text{B.8})$$

式(B.8)の両辺に左側から $W^{1/2}Y$ を乗じた後、式(2.11)、式(B.8)を代入して、

$$W^{1/2}YY^TW^{1/2}\vec{u}_i = W^{1/2}Y(\sigma_i\vec{v}_i)$$

$$\Leftrightarrow YY^TW\vec{u}_i = \sigma_i W^{1/2}Y\vec{v}_i$$

$$\Leftrightarrow R\vec{u}_i = (\sigma_i)^2\vec{u}_i \quad (\text{B.9})$$

式(B.7)の両辺に左側から $Y^T W^{1/2}$ を乗じた後、式(B.8)を代入して、

$$\begin{aligned}
Y^T W^{1/2} W^{1/2} Y \vec{v}_i &= Y^T W^{1/2} (\sigma_i \vec{u}_i) \\
\iff Y^T W Y \vec{v}_i &= \sigma_i Y^T W^{1/2} (\vec{u}_i) \\
\iff Y^T W Y \vec{v}_i &= (\sigma_i)^2 \vec{v}_i
\end{aligned} \tag{B.10}$$

また、基底 $\vec{\varphi}_i$ に対して以下の関係式が成り立つ。

$$\vec{\varphi}_i^T W \vec{\varphi}_i = 1 \tag{B.11}$$

式(B.5)と式(B.11)を比較すると、 $\vec{\varphi}_i$ と $\vec{u}_i$ には以下の関係式が成り立つ。

$$W^{1/2} \vec{\varphi}_i = \vec{u}_i \tag{B.12}$$

式(B.12)を式(B.9)に代入して、

$$\begin{aligned}
R W^{1/2} \vec{\varphi}_i &= (\sigma_i)^2 W^{1/2} \vec{\varphi}_i \\
\iff W^{1/2} R \vec{\varphi}_i &= (\sigma_i)^2 W^{1/2} \vec{\varphi}_i \\
\iff R \vec{\varphi}_i &= (\sigma_i)^2 \vec{\varphi}_i
\end{aligned} \tag{B.13}$$

式(A.9)と式(B.13)を比較すると、 $\lambda_i$ と $\sigma_i$ には以下の関係式が成り立つ。

$$\lambda_i = (\sigma_i)^2 \tag{B.14}$$

式(B.7)に式(B.12)を代入して、

$$\begin{aligned}
W^{1/2} Y \vec{v}_i &= \sigma_i \vec{u}_i \\
\iff W^{1/2} Y \vec{v}_i &= \sigma_i W^{1/2} \vec{\varphi}_i \\
\iff Y \vec{v}_i &= \sigma_i \vec{\varphi}_i
\end{aligned} \tag{B.15}$$

式(B.15)と式(B.14)より、 $\vec{\varphi}_i$ と $\vec{v}_i$ の関係は以下となる。

$$\vec{\varphi}_i = Y \vec{v}_i / \sqrt{\lambda_i} \tag{B.16}$$

また、式(B.10)に式(B.14)を代入して、

$$Y^T W Y \vec{v}_i = (\sigma_i)^2 \vec{v}_i$$

$$\Leftrightarrow Y^T W Y \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \tag{B.17}$$

Snapshot PODでは、式(A.9)の代わりに、式(B.17)の固有値問題を解き、式(B.16)より $\vec{\varphi}_i$ を計算する。式(B.17)中の $Y^T W Y$ はサイズ $(m \times l) \times (m \times l)$ の密行列である。ここで $m$ は $y$ の時間方向のサンプリング数、 $l$ はレイノルズ数の計算条件数であり、それぞれ $10^1 \sim 10^2, 10^1$ のオーダーである。従って、 $Y^T W Y$ のサイズは $10^2 \sim 10^3$ のオーダーとなり、少ない計算負荷で $\vec{\varphi}_i$ を計算できる。

## 付録 C. 層流に対する基底空間構築方法の詳細

2.2節で説明した基底空間構築手法に従い、層流に対する3次元流体解析結果から流速と圧力の基底空間を構築する方法[68]を説明する。最初に流速の基底空間を構築する方法を説明する。3次元流体解析により算出される流速ベクトル $\vec{u}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ を式(C.1)に示すように平均成分 $\bar{\vec{u}}(\vec{x}_\beta)$ と変動成分 $\vec{u}(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ に分解する

$$\vec{u}^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{\vec{u}}(\vec{x}_\beta) + \vec{u}(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \quad (\text{C.1})$$

$\vec{u}(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ に対して、式(C.2)に示すように、レイノルズ数 $Re_\alpha$ 、時刻 $t_\beta$ を固定し、座標値 $\vec{x}_\gamma$ に対する流速を成分とするベクトル $\vec{u}_{\alpha\beta}$ を定義する。

$$\vec{u}_{\alpha\beta} \equiv \begin{bmatrix} u_1(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_1) \\ u_2(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_1) \\ u_3(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_1) \\ \vdots \\ u_1(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \\ u_2(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \\ u_3(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \\ \vdots \\ u_1(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_n) \\ u_2(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_n) \\ u_3(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times n} \quad (\text{C.2})$$

式(C.2)中の $u_1, u_2, u_3$ はそれぞれ流速の $x, y, z$ 成分である。また、式(C.3)に示すように、 $\vec{u}_{\alpha\beta}$ を列ベクトルとする行列 $U$ を定義する。

$$U \equiv [\vec{u}_{11} \cdots \vec{u}_{1m} \quad \vec{u}_{21} \cdots \vec{u}_{2m} \cdots \vec{u}_{l1} \cdots \vec{u}_{lm}] \in \mathbb{R}^{(3 \times n) \times (m \times l)} \quad (\text{C.3})$$

$\vec{u}(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ にSnapshot PODを適用し、式(C.4)の固有値問題を解き、式(C.5)より流速の基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ を計算する。ここで、 $r_u$ は流速の基底数である。

$$U^T W U \vec{v}_{ui} = \lambda_{ui} \vec{v}_{ui} \quad (\text{C.4})$$

$$\vec{\varphi}_i = U \vec{v}_{ui} / \sqrt{\lambda_{ui}}, i = 1, \dots, r_u \quad (\text{C.5})$$

次に、圧力の基底空間を抽出する方法を説明する。圧力 $p^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ を式(C.6)に示すように平均成分 $\bar{p}(\vec{x}_\beta)$ と変動成分 $p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ に分解し、 $p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$ よりベクトル $\vec{p}_{\alpha\beta}$ 、行列

Pを定義する。

$$p^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{p}(\vec{x}_\beta) + p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \quad (\text{C.6})$$

$$\vec{p}_{\alpha\beta} \equiv \begin{bmatrix} p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_1) \\ \vdots \\ p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \\ \vdots \\ p(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.7})$$

$$P \equiv [\vec{p}_{11} \cdots \vec{p}_{1m} \vec{p}_{21} \cdots \vec{p}_{2m} \cdots \vec{p}_{l1} \cdots \vec{p}_{lm}] \in \mathbb{R}^{(n) \times (m \times l)} \quad (\text{C.8})$$

流速と同様に、圧力の基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ はSnapshot PODを用いて以下より計算される。ここで、 $r_p$ は圧力の基底数である。

$$P^T W P \vec{v}_{pi} = \lambda_{pi} \vec{v}_{pi} \quad (\text{C.9})$$

$$\vec{\chi}_i = P \vec{v}_{pi} / \sqrt{\lambda_{pi}}, i = 1, \dots, r_p \quad (\text{C.10})$$

## 付録 D. NS 方程式の弱形式化

NS方程式中の流速、圧力を基底の線形結合で近似し、流速基底空間 $\bar{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影することにより式(D.1)が得られる。

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{\varphi}_i, \frac{\partial \bar{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \bar{\varphi}_i, \nabla \cdot (\bar{u}_{ROM}^* \otimes \bar{u}_{ROM}^*) \rangle + \langle \bar{\varphi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle \\ - \langle \bar{\varphi}_i, \nabla \cdot [\nu(\nabla \bar{u}_{ROM}^* + (\nabla \bar{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle = 0 \end{aligned} \quad (D.1)$$

付録Dでは、式(D.1)を弱形式[97]に式変形する詳細過程を説明する。最初に、式(D.1)の左辺第3項を以下にて変形する。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle \\ = \int_V \bar{\varphi}_i \cdot \nabla p_{ROM}^* dV \\ = \int_V \nabla \cdot (p_{ROM}^* \bar{\varphi}_i) dV - \int_V (\nabla \cdot \bar{\varphi}_i) p_{ROM}^* dV \quad (\because \text{式(L.1)より}) \end{aligned} \quad (D.2)$$

式(D.2)の右辺第1項にガウスの発散定理[97]を適用して、

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle \\ = \int_S \bar{n} \cdot (p_{ROM}^* \bar{\varphi}_i) dS - \int_V (\nabla \cdot \bar{\varphi}_i) p_{ROM}^* dV \\ = - \int_V (\nabla \cdot \bar{\varphi}_i) p_{ROM}^* dV + \int_S \bar{\varphi}_i \cdot p_{ROM}^* \bar{n} dS \\ = - \langle \nabla \cdot \bar{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle + \langle \bar{\varphi}_i, p_{ROM}^* \bar{n} \rangle_S \end{aligned} \quad (D.3)$$

次に、式(D.1)の左辺第4項を以下にて変形する。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_i, \nabla \cdot [\nu(\nabla \bar{u}_{ROM}^* + (\nabla \bar{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle \\ = \int_V \bar{\varphi}_i \cdot [\nabla \cdot (\nu[\nabla \bar{u}_{ROM}^* + (\nabla \bar{u}_{ROM}^*)^T])] dV \\ = \int_V \nabla \cdot [\bar{\varphi}_i \cdot (\nu[\nabla \bar{u}_{ROM}^* + (\nabla \bar{u}_{ROM}^*)^T])] dV \\ - \int_V \nabla \bar{\varphi}_i : [\nu(\nabla \bar{u}_{ROM}^* + (\nabla \bar{u}_{ROM}^*)^T)] dV \quad (\because \text{式(L.2)より}) \end{aligned} \quad (D.4)$$

式(D.4)中の  $:$  は2階テンソルに対する内積（フロベニウス積） [101]である。式(D.4)の右辺

第1項にガウスの発散定理を適用して、

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \rangle \\
&= \int_S \vec{n} \cdot [\vec{\varphi}_i \cdot [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)]] dS \\
&\quad - \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] dV \\
&= - \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] dV \\
&\quad + \int_S \vec{\varphi}_i \cdot [\nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \cdot \vec{n} dS \\
&= - \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \vec{n} \rangle_S
\end{aligned} \tag{D.5}$$

式(D.3)、式(D.5)を式(D.1)に代入して、式(D.1)の弱形式である式(D.6)が得られる。

$$\begin{aligned}
& \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
&\quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle + \langle \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \vec{n} \rangle_S \\
&\quad - \langle \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \cdot \vec{n} \rangle_S = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
&\quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
&\quad - \langle \vec{\varphi}_i, [-p_{ROM}^* \mathbf{I} + \nu(\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T)] \cdot \vec{n} \rangle_S = 0
\end{aligned} \tag{D.6}$$

## 付録 E. NS 方程式を基礎式とする縮約モデルの導出

NS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、境界条件を組み込んだ式は以下となる。

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\ + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

ここで、流速、圧力を基底の線形結合で近似した値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ は、以下にて計算される。

$$\vec{u}_{ROM}^* = \bar{\vec{u}} + \sum_{j=1}^{r_u} a_j \vec{\varphi}_j \equiv \bar{\vec{u}} + a_j \vec{\varphi}_j \quad (\text{E.2})$$

$$p_{ROM}^* = \bar{p} + \sum_{j=1}^{r_u} a_j \vec{\chi}_j \equiv \bar{p} + a_j \vec{\chi}_j \quad (\text{E.3})$$

式(E.2)、式(E.3)を式(E.1)に代入し、各項を変形する。まず、式(E.1)の左辺第1項(時間微分項)は以下のように変形される。

$$\left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\vec{u}} + a_j \vec{\varphi}_j) \right\rangle$$

$\bar{\vec{u}}$ は時間平均成分であり $\partial \bar{\vec{u}} / \partial t = 0$ となるので、

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial}{\partial t} (a_j \vec{\varphi}_j) \right\rangle \\ &= \int_V \vec{\varphi}_i \cdot \frac{\partial}{\partial t} (a_j \vec{\varphi}_j) dV \end{aligned}$$

流速基底 $\vec{\varphi}_j$ は計算格子座標の関数であり、流速基底結合係数 $a_j$ はレイノルズ数と時間の関数なので、

$$\left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle = \left( \int_V \vec{\varphi}_i \cdot \vec{\varphi}_j dV \right) \frac{\partial a_j}{\partial t} \quad (\text{E.4})$$

ここで、 $\vec{\varphi}_j$ は式(E.5)に示す正規直交条件を満足する。

$$\int_V \vec{\varphi}_i \cdot \vec{\varphi}_j dV = \delta_{ij} \quad (\text{E.5})$$

式(E.5)の $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。式(E.5)を式(E.4)に代入して、

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle &= \delta_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial t} \\ &= \frac{\partial a_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

次に、式(E.1)の左辺第2項(移流項)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} &\langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\ &= \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot [(\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) \otimes (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k)] \rangle \\ &= \int_V \vec{\varphi}_i \cdot [(\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) \otimes (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k)] dV \\ &= \int_V \vec{\varphi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})] dV + \int_V \vec{\varphi}_i \cdot [\nabla \cdot ((a_j \vec{\varphi}_j) \otimes \vec{u})] dV \\ &\quad + \int_V \vec{\varphi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes (a_j \vec{\varphi}_j))] dV \\ &\quad + \int_V \vec{\varphi}_i \cdot [\nabla \cdot ((a_j \vec{\varphi}_j) \otimes (a_k \vec{\varphi}_k))] dV \\ &= \int_V \vec{\varphi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})] dV + \left[ \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u})) dV \right] a_j \\ &\quad + \left[ \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j)) dV \right] a_j \\ &\quad + \left[ \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k)) dV \right] a_j a_k \\ &= \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij} a_j + \overline{C3}_{ij} a_j + C_{ijk} a_j a_k \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$C_{ijk} \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k) \rangle = \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k)) dV \quad (\text{E.8})$$

$$\overline{C1}_i \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \rangle = \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})) dV \quad (\text{E.9})$$

$$\overline{C2}_{ij} \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u}) \rangle = \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u})) dV \quad (\text{E.10})$$

$$\overline{C3}_{ij} \equiv \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j) \rangle = \int_V \vec{\varphi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j)) dV \quad (\text{E.11})$$

次に、式(E.1)の左辺第3項(圧力勾配項)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
&= \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \bar{p} + a_j \vec{\chi}_j \rangle \\
&= \int_V (\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \cdot (\bar{p} + a_j \vec{\chi}_j) dV \\
&= \int_V ((\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \bar{p}) dV + \left[ \int_V ((\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \vec{\chi}_j) dV \right] a_j \\
&= \bar{A}_i + A_{ij} a_j
\end{aligned} \tag{E.12}$$

$$A_{ij} \equiv \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \vec{\chi}_j \rangle = \int_V ((\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \vec{\chi}_j) dV \tag{E.13}$$

$$\bar{A}_i \equiv \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \bar{p} \rangle = \int_V ((\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \bar{p}) dV \tag{E.14}$$

また、式(E.1)の左辺第4項(拡散項)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
&= \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : \nu \left[ \nabla (\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) + \left( \nabla (\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) \right)^T \right] dV \\
&= \nu \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : \nabla \vec{u}) dV + \nu \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : (\nabla \vec{u})^T) dV + \nu \left[ \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : \nabla \vec{\varphi}_j) dV \right] a_j \\
&\quad + \nu \left[ \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : (\nabla \vec{\varphi}_j)^T) dV \right] a_j \\
&= \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j + \nu \overline{BT}_i + \nu BT_{ij} a_j
\end{aligned} \tag{E.15}$$

$$B_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nabla \vec{\varphi}_j \rangle = \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : \nabla \vec{\varphi}_j) dV \tag{E.16}$$

$$BT_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nabla \vec{\varphi}_j)^T \rangle = \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : (\nabla \vec{\varphi}_j)^T) dV \tag{E.17}$$

$$\bar{B}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nabla \vec{u} \rangle = \int_V (\nabla \vec{\varphi}_i : \nabla \vec{u}) dV \tag{E.18}$$

$$\overline{BT}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nabla \vec{u})^T \rangle = \int_V \left( \nabla \vec{\varphi}_i : (\nabla \vec{u})^T \right) dV \quad (\text{E.19})$$

式(E.6)、式(E.7)、式(E.12)、式(E.15)を式(E.1)に代入して整理すると、NS方程式を基礎式とする縮約モデルとして、式(E.20)に示す結合係数 $a_i$ に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij}a_j + \overline{C3}_{ij}a_j + C_{ijk}a_ja_k - \bar{A}_i - A_{ij}a_j + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij}a_j + \nu \overline{BT}_i \\ + \nu BT_{ij}a_j = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, r_u \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

## 付録 F. 圧力ポアソン方程式の弱形式化と境界条件の組み込み

圧力ポアソン方程式中の流速、圧力を基底の線形結合で近似し、圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影することにより式(F.1)が得られる。

$$\langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle = 0 \quad (\text{F.1})$$

付録Fでは、まず、式(F.1)を弱形式に式変形する詳細過程を説明する。最初に、式(F.1)の左辺第1項を以下にて変形する。

$$\begin{aligned} & \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) \rangle \\ &= \int_V \vec{\chi}_i (\nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*)) dV \\ &= \int_V \nabla \cdot (\vec{\chi}_i (\nabla p_{ROM}^*)) dV - \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla p_{ROM}^* dV \quad (\because \text{式(L.3)より}) \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

式(F.2)の右辺第1項にガウスの発散定理を適用して、

$$\begin{aligned} & \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla p_{ROM}^*) \rangle \\ &= \int_S \vec{n} \cdot [\vec{\chi}_i (\nabla p_{ROM}^*)] dS - \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla p_{ROM}^* dV \\ &= - \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla p_{ROM}^* dV + \int_S \vec{\chi}_i [\vec{n} \cdot (\nabla p_{ROM}^*)] dS \\ &= - \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* \rangle_S \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

次に、式(F.1)の左辺第2項を以下にて変形する。

$$\begin{aligned} & \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)) \rangle \\ &= \int_V \vec{\chi}_i [\nabla \cdot (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*))] dV \\ &= \int_V \nabla \cdot [\vec{\chi}_i (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*))] dV - \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)) dV \\ & \hspace{20em} (\because \text{式(L.3)より}) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

式(F.2)の右辺第2項にガウスの発散定理を適用して、

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \nabla \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle \\
&= \int_S \vec{n} \cdot [\vec{\chi}_i (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*))] dS - \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)) dV \\
&= - \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)) dV + \int_S \vec{\chi}_i [\vec{n} \cdot (\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*))] dS \\
&= - \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle + \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S
\end{aligned} \tag{F.5}$$

式(F.3)、式(F.5)を式(F.1)に代入し整理すると、式(F.1)の弱形式である式(F.6)が得られる。

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\
& \quad - \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S = 0
\end{aligned} \tag{F.6}$$

次に、以下に示す圧力の境界条件を式(F.6)に組み込む詳細過程を説明する。

$$\vec{n} \cdot \nabla p^* = -\nu \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}^*)] - \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}^* \otimes \vec{u}^*)] \text{ on } S_{ne} = S_{wall} \cup S_{in} \tag{F.7}$$

$$p^* = p_D \text{ on } S_{out} \tag{F.8}$$

式(F.8)より流出面 $S_{out}$ では、圧力は時間変化せず圧力の変動成分はゼロとなるので、圧力基底 $\vec{\chi}_i$ もゼロとなる。これより、式(F.6)の左辺第3項は以下となる。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\
&= \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_{S_{ne}}
\end{aligned} \tag{F.9}$$

式(F.7)を式(F.9)に代入して整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\
&= -\nu \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_{S_{ne}}
\end{aligned} \tag{F.10}$$

さらに、式(F.10)の右辺を以下にて変形する。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\
&= -\nu \int_{S_{ne}} \vec{\chi}_i [\vec{n} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*))] dS \\
&= -\nu \int_S \vec{n} \cdot [\vec{\chi}_i (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*))] dS
\end{aligned} \tag{F.11}$$

式(F.11)の右辺にガウスの発散定理を適用して、

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\
&= -\nu \int_V \nabla \cdot [\vec{\chi}_i (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*))] dV \\
&= -\nu \left[ \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)) dV - \int_V \vec{\chi}_i [\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*))] dV \right] \\
&\hspace{20em} (\because \text{式(L.3)より}) \\
&= -\nu \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)) dV (\because \text{式(L.4)より}) \\
&= -\nu \int_V (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*) \cdot (\nabla \times (\nabla \vec{\chi}_i)) dV + \nu \int_V \nabla \cdot (\nabla \vec{\chi}_i \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)) dV \\
&\hspace{20em} (\because \text{式(L.6)より}) \\
&= \nu \int_V \nabla \cdot (\nabla \vec{\chi}_i \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)) dV (\because \text{式(L.5)より}) \\
&= \nu \int_S \vec{n} \cdot (\nabla \vec{\chi}_i \times (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*)) dS \\
&= \nu \int_S (\vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i) \cdot (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*) dS (\because \text{式(L.7)より}) \tag{F.12}
\end{aligned}$$

ここで、流出面 $S_{out}$ では $\nabla \vec{\chi}_i$ は境界面の法線方向に一致するので、 $\vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i = \vec{0}$ となる。従って、式(F.12)は以下となる。

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{\chi}_i, \vec{n} \cdot \nabla p_{ROM}^* + \vec{n} \cdot [\nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*)] \rangle_S \\
&= \nu \int_{S_{ne}} (\vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i) \cdot (\nabla \times \vec{u}_{ROM}^*) dS \\
&= \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} \tag{F.13}
\end{aligned}$$

式(F.13)を式(F.6)に代入し整理すると、圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影し、式(F.7)、式(F.8)に示す境界条件を組み込んだ式が得られる。

$$\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} = 0 \tag{F.14}$$

## 付録 G. NS 方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデル の導出

NS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、境界条件を組み込んだ式は以下となる。

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\ + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (G.1)$$

また、圧力ポアソン方程式を圧力基底空間 $\vec{\chi}_i (i = 1, \dots, r_p)$ に射影し、境界条件を組み込んだ式は以下となる。

$$\langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle + \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \nu \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} = 0 \quad (G.2)$$

ここで、流速、圧力を基底の線形結合で近似した値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*$ は、以下にて計算される。

$$\vec{u}_{ROM}^* = \bar{\vec{u}} + \sum_{j=1}^{r_u} a_j \vec{\varphi}_j \equiv \bar{\vec{u}} + a_j \vec{\varphi}_j \quad (G.3)$$

$$p_{ROM}^* = \bar{p} + \sum_{j=1}^{r_p} b_j \vec{\chi}_j \equiv \bar{p} + b_j \vec{\chi}_j \quad (G.4)$$

式(G.3)、式(G.4)を式(G.1)、式(G.2)に代入し、各項を変形する。最初に、式(G.1)の式変形過程を説明する。式(G.1)のうち、左辺第1項、第2項、第4項については、付録Eで説明した式変形過程と同一であるため説明を省略する。以下では、左辺第3項の式変形過程を説明する。

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\ &= \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \bar{p} + b_j \vec{\chi}_j \rangle \\ &= \int_V (\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \cdot (\bar{p} + b_j \vec{\chi}_j) dV \\ &= \int_V [(\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \cdot \bar{p}] dV + \left[ \int_V [(\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \cdot \vec{\chi}_j] dV \right] b_j \\ &= \bar{A}_i + A_{ij} b_j \end{aligned} \quad (G.5)$$

$$A_{ij} \equiv \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \vec{\chi}_j \rangle = \int_V [(\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \cdot \vec{\chi}_j] dV \quad (\text{G.6})$$

$$\bar{A}_i \equiv \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, \bar{p} \rangle = \int_V [(\nabla \cdot \vec{\varphi}_i) \cdot \bar{p}] dV \quad (\text{G.7})$$

式(G.5)、および式(E.6)、式(E.7)、式(E.15)を式(G.1)に代入して整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial t} + \bar{C1}_i + \bar{C2}_{ij} a_j + \bar{C3}_{ij} a_j + C_{ijk} a_j a_k - \bar{A}_i - A_{im} b_m + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j + \nu \bar{BT}_i \\ + \nu BT_{ij} a_j = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, r_u, m = 1, \dots, r_p \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

次に、式(G.2)の式変形過程を説明する。式(G.2)の左辺第1項(圧力勾配発散項)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla p_{ROM}^* \rangle \\ &= \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla (\bar{p} + b_j \vec{\chi}_j) \rangle \\ &= \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla (\bar{p} + b_j \vec{\chi}_j)] dV \\ &= \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla \bar{p} dV + \left[ \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla \vec{\chi}_j dV \right] b_j \\ &= \bar{E}_i + E_{ij} b_j \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

$$E_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \vec{\chi}_j \rangle = \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla \vec{\chi}_j dV \quad (\text{G.10})$$

$$\bar{E}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \bar{p} \rangle = \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot \nabla \bar{p} dV \quad (\text{G.11})$$

次に、左辺第2項(移流発散項)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle \\ &= \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot [(\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) \otimes (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k)] \rangle \\ &= \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [(\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) \otimes (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k)] dV \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})] dV + \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot [(a_j \vec{\varphi}_j) \otimes \vec{u}]] dV \\
&\quad + \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot [\vec{u} \otimes (a_j \vec{\varphi}_j)]] dV \\
&\quad + \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot [(a_j \vec{\varphi}_j) \otimes (a_k \vec{\varphi}_k)]] dV \\
&= \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})] dV + \left[ \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u})] dV \right] a_j \\
&\quad + \left[ \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j)] dV \right] a_j \\
&\quad + \left[ \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k)] dV \right] a_j a_k \\
&= \overline{F1}_i + \overline{F2}_{ij} a_j + \overline{F3}_{ij} a_j + F_{ijk} a_j a_k
\end{aligned}$$

$$F_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k) \rangle = \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{\varphi}_k)] dV \quad (\text{G.13})$$

$$\overline{F1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \rangle = \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})] dV \quad (\text{G.14})$$

$$\overline{F2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u}) \rangle = \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{\varphi}_j \otimes \vec{u})] dV \quad (\text{G.15})$$

$$\overline{F3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j) \rangle = \int_V \nabla \vec{\chi}_i \cdot [\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{\varphi}_j)] dV \quad (\text{G.16})$$

次に、左辺第3項(圧力境界項)は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
&\langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times \vec{u}_{ROM}^* \rangle_{S_{ne}} \\
&= \langle \vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i, \nabla \times (\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j) \rangle_{S_{ne}} \\
&= \int_{S_{ne}} (\vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i) \cdot [\nabla \times (\vec{u} + a_j \vec{\varphi}_j)] dS \\
&= \int_{S_{ne}} [(\vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i) \cdot (\nabla \times \vec{u})] dS + \int_{S_{ne}} [(\vec{n} \times \nabla \vec{\chi}_i) \cdot (\nabla \times \vec{\varphi}_j)] dS a_j \\
&= \overline{G}_i + G_{ij} a_j
\end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

$$G_{ij} \equiv \langle \vec{n} \times \nabla \bar{\chi}_i, \nabla \times \bar{\varphi}_j \rangle_{S_{ne}} = \int_{S_{ne}} [(\vec{n} \times \nabla \bar{\chi}_i) \cdot (\nabla \times \bar{\varphi}_j)] dS \quad (\text{G.18})$$

$$\bar{G}_i \equiv \langle \vec{n} \times \nabla \bar{\chi}_i, \nabla \times \vec{u} \rangle_{S_{ne}} = \int_{S_{ne}} [(\vec{n} \times \nabla \bar{\chi}_i) \cdot (\nabla \times \vec{u})] dS \quad (\text{G.19})$$

式(G.9)、式(G.12)、式(G.17)、式(G.2)に代入して整理すると、以下となる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_l + E_{lm} b_m + \bar{F}1_l + \bar{F}2_{lj} a_j + \bar{F}3_{lj} a_j + F_{ljk} a_j a_k - \nu \bar{G}_l - \nu G_{lj} a_j = 0 \\ j, k = 1, \dots, r_u, l, m = 1, \dots, r_p \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

式(G.8)と式(G.20)がNS方程式と圧力ポアソン方程式を基礎式とする縮約モデルとなる。

## 付録 H. 渦粘性係数に対する基底空間構築方法の詳細

2.2節で説明した基底空間構築手法に従い、乱流に対する3次元流体解析結果から渦粘性係数の基底空間を構築する方法を説明する。3次元流体解析により算出される渦粘性係数  $\nu_t^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$  を式(H.1)に示すように平均成分  $\bar{\nu}_t(\vec{x}_\beta)$  と変動成分  $\nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$  に分解する。

$$\nu_t^*(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) = \bar{\nu}_t(\vec{x}_\beta) + \nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \quad (\text{H.1})$$

$\nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$  に対して、式(H.2)に示すように、レイノルズ数  $Re_\alpha$ 、時刻  $t_\beta$  を固定し、座標値  $\vec{x}_\gamma$  に対する渦粘性係数を成分とするベクトル  $\vec{\nu}_{t_{\alpha\beta}}$  を定義する。

$$\vec{\nu}_{t_{\alpha\beta}} \equiv \begin{bmatrix} \nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_1) \\ \vdots \\ \nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma) \\ \vdots \\ \nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{H.2})$$

また、式(H.3)に示すように、 $\vec{\nu}_{t_{\alpha\beta}}$  を列ベクトルとする行列  $N$  を定義する。

$$N \equiv [\vec{\nu}_{t_{11}} \cdots \vec{\nu}_{t_{1m}} \quad \vec{\nu}_{t_{21}} \cdots \vec{\nu}_{t_{2m}} \cdots \vec{\nu}_{t_{l1}} \cdots \vec{\nu}_{t_{lm}}] \in \mathbb{R}^{(n) \times (m \times l)} \quad (\text{H.3})$$

$\nu_t(Re_\alpha, t_\beta, \vec{x}_\gamma)$  に Snapshot POD を適用し、式(H.4)の固有値問題を解き、式(H.5)より渦粘性係数の基底空間  $\vec{\phi}_i (i = 1, \dots, r_\nu)$  を計算する。ここで、 $r_\nu$  は渦粘性係数の基底数である。

$$N^T W N \vec{\nu}_{\nu i} = \lambda_{\nu i} \vec{\nu}_{\nu i} \quad (\text{H.4})$$

$$\vec{\phi}_i = N \vec{\nu}_{\nu i} / \sqrt{\lambda_{\nu i}}, i = 1, \dots, r_\nu \quad (\text{H.5})$$

## 付録 I. RANS 方程式を基礎式とする縮約モデルの導出

RANS方程式を流速基底空間 $\vec{\varphi}_i (i = 1, \dots, r_u)$ に射影し、境界条件を組み込んだ式は以下となる。

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
 & \quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\nu + \nu_{t_{ROM}}^*) (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle = 0 \\
 \\
 \Leftrightarrow & \left\langle \vec{\varphi}_i, \frac{\partial \vec{u}_{ROM}^*}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{\varphi}_i, \nabla \cdot (\vec{u}_{ROM}^* \otimes \vec{u}_{ROM}^*) \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{\varphi}_i, p_{ROM}^* \rangle \\
 & \quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
 & \quad + \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu_{t_{ROM}}^* (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle = 0 \tag{I.1}
 \end{aligned}$$

ここで、流速、圧力、渦粘性係数を基底の線形結合で近似した値 $\vec{u}_{ROM}^*, p_{ROM}^*, \nu_{t_{ROM}}^*$ は、以下にて計算される。

$$\vec{u}_{ROM}^* = \bar{\vec{u}} + \sum_{j=1}^{r_u} a_j \vec{\varphi}_j \equiv \bar{\vec{u}} + a_j \vec{\varphi}_j \tag{I.2}$$

$$p_{ROM}^* = \bar{p} + \sum_{j=1}^{r_u} a_j \vec{\chi}_j \equiv \bar{p} + a_j \vec{\chi}_j \tag{I.3}$$

$$\nu_{t_{ROM}}^* = \bar{\nu}_t + \sum_{j=1}^{r_u} a_j \vec{\phi}_j \equiv \bar{\nu}_t + a_j \vec{\phi}_j \tag{I.4}$$

式(I.2)、式(I.3)、式(I.4)を式(I.1)に代入し、各項を変形する。このうち、左辺第1項、第2項、第3項、第4項については、付録Eで説明した式変形過程と同一であるため説明を省略する。

以下では、左辺第5項の式変形過程を説明する。

$$\begin{aligned}
 & \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \nu_{t_{ROM}}^* (\nabla \vec{u}_{ROM}^* + (\nabla \vec{u}_{ROM}^*)^T) \rangle \\
 & = \left\langle \nabla \vec{\varphi}_i, (\bar{\nu}_t + a_j \vec{\phi}_j) \left[ \nabla (\bar{\vec{u}} + a_k \vec{\varphi}_k) + \left( \nabla (\bar{\vec{u}} + a_k \vec{\varphi}_k) \right)^T \right] \right\rangle \\
 & = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\bar{\nu}_t + a_j \vec{\phi}_j) \left[ + \left( \nabla (\bar{\vec{u}} + a_k \vec{\varphi}_k) \right)^T \right] dV \tag{I.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [(\bar{v}_t + a_j \vec{\phi}_j) \nabla (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k)] dV \\
&\quad + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [(\bar{v}_t + a_j \vec{\phi}_j) (\nabla (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k))^T] dV
\end{aligned}$$

ここで、式(I.5)の左辺第1項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
&\int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [(\bar{v}_t + a_j \vec{\phi}_j) \nabla (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k)] dV \\
&= \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\bar{v}_t \nabla \vec{u}) dV + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (a_j \vec{\phi}_j \nabla \vec{u}) dV + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{v}_t \nabla (a_j \vec{\varphi}_j)] dV \\
&\quad + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [a_j \vec{\phi}_j \nabla (a_k \vec{\varphi}_k)] dV \\
&= \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\bar{v}_t \nabla \vec{u}) dV + \left[ \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\vec{\phi}_j \nabla \vec{u}) dV \right] a_j + \left[ \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\bar{v}_t \nabla \vec{\varphi}_j) dV \right] a_j \\
&\quad + \left[ \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\vec{\phi}_j \nabla \vec{\varphi}_k) dV \right] a_j a_k \\
&= \overline{D1}_i + \overline{D2}_{ij} a_j + \overline{D3}_{ij} a_j + D_{ijk} a_j a_k
\end{aligned} \tag{I.6}$$

$$D_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j \nabla \vec{\varphi}_k \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\vec{\phi}_j \nabla \vec{\varphi}_k) dV \tag{I.7}$$

$$\overline{D1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{v}_t \nabla \vec{u} \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\bar{v}_t \nabla \vec{u}) dV \tag{I.8}$$

$$\overline{D2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j \nabla \vec{u} \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\vec{\phi}_j \nabla \vec{u}) dV \tag{I.9}$$

$$\overline{D3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{v}_t \nabla \vec{\varphi}_j \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : (\bar{v}_t \nabla \vec{\varphi}_j) dV \tag{I.10}$$

また、式(I.5)の左辺第2項は以下のように変形される。

$$\int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [(\bar{v}_t + a_j \vec{\phi}_j) (\nabla (\vec{u} + a_k \vec{\varphi}_k))^T] dV \tag{I.11}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{\nu}_t (\nabla \vec{u})^T] dV + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [a_j \vec{\phi}_j (\nabla \vec{u})^T] dV \\
&\quad + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{\nu}_t (\nabla (a_j \vec{\varphi}_j))^T] dV \\
&\quad + \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [a_j \vec{\phi}_j (\nabla (a_k \vec{\varphi}_k))^T] dV \\
&= \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{\nu}_t (\nabla \vec{u})^T] dV + \left[ \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\vec{\phi}_j (\nabla \vec{u})^T] dV \right] a_j \\
&\quad + \left[ \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{\nu}_t (\nabla \vec{\varphi}_j)^T] dV \right] a_j + \left[ \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\vec{\phi}_j (\nabla \vec{\varphi}_k)^T] dV \right] a_j a_k \\
&= \overline{DT1}_i + \overline{DT2}_{ij} a_j + \overline{DT3}_{ij} a_j + DT_{ijk} a_j a_k
\end{aligned}$$

$$DT_{ijk} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j (\nabla \vec{\varphi}_k)^T \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\vec{\phi}_j (\nabla \vec{\varphi}_k)^T] dV \quad (\text{I.12})$$

$$\overline{DT1}_i \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{\nu}_t (\nabla \vec{u})^T \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{\nu}_t (\nabla \vec{u})^T] dV \quad (\text{I.13})$$

$$\overline{DT2}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \vec{\phi}_j (\nabla \vec{u})^T \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\vec{\phi}_j (\nabla \vec{u})^T] dV \quad (\text{I.14})$$

$$\overline{DT3}_{ij} \equiv \langle \nabla \vec{\varphi}_i, \bar{\nu}_t (\nabla \vec{\varphi}_j)^T \rangle = \int_V \nabla \vec{\varphi}_i : [\bar{\nu}_t (\nabla \vec{\varphi}_j)^T] dV \quad (\text{I.15})$$

式(E.6)、式(E.7)、式(E.12)、式(E.15)、式(I.6)、式(I.11)を式(I.1)に代入して整理すると、RANS方程式を基礎式とする縮約モデルとして、式(I.16)に示す結合係数 $a_i$ に関する方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_i}{\partial t} + \overline{C1}_i + \overline{C2}_{ij} a_j + \overline{C3}_{ij} a_j + C_{ijk} a_j a_k - \bar{A}_i - A_{ij} a_j + \nu \bar{B}_i + \nu B_{ij} a_j + \nu \overline{BT}_i \\
+ \nu BT_{ij} a_j + \overline{D1}_i + \overline{D2}_{ij} a_j + \overline{D3}_{ij} a_j + D_{ijk} a_j a_k + \overline{DT1}_i \\
+ \overline{DT2}_{ij} a_j + \overline{DT3}_{ij} a_j + DT_{ijk} a_j a_k = 0 \quad i, j, k = 1, \dots, r_u
\end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

## 付録 J. 式変形で用いる関係式

付録D～I付録に示した式変形過程で用いた関係式を式(L.1)～式(L.7)に示す。

$$\nabla \cdot (f\mathbf{T}) = f\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla f \quad (\text{L.1})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{T}\vec{u}) = [\nabla \cdot (\mathbf{T}^T)] \cdot \vec{u} + \mathbf{T}^T : \nabla f \quad (\text{L.2})$$

$$\nabla \cdot (f\vec{u}) = \vec{u} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \vec{u} \quad (\text{L.3})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0 \quad (\text{L.4})$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0} \quad (\text{L.5})$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \quad (\text{L.6})$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \quad (\text{L.7})$$

式(L.1)～式(L.7)において、 $f$ はスカラー、 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ はベクトル、 $\mathbf{T}$ は2階テンソルである。

## 参考文献

- [1] 村上光清, 鬼頭修己, 旋回流における絞り流量計の特性 (オリフィスの場合), 日本機械学会論文集, 43-369(1977), 1811-1821.
- [2] 日本工業規格編, 円形管路の絞り機構による流量測定方法—第1部: 一般原理及び要求事項(2007).
- [3] 稲田文夫, 米田公俊, 森田良, 藤原和俊, 古谷正裕, 配管減肉メカニズムに関する流体力学的考察, 材料と環境, 57-5(2008), 218-222.
- [4] 日本機械学会, 発電用設備規格: 配管減肉管理に関する規格, 丸善出版(2017).
- [5] 浜田紀昭, 大塚雅哉, 坪内邦良, 椎名孝次, 岩原光太郎, 久恒眞一, BWR オリフィス下流配管における減肉位置予測解析, 日本機械学会論文集 B 編, 79-803(2013), 1309-1318.
- [6] 渡辺瞬, 米田公俊, 森田良, 流れ加速型腐食起因の減肉傾向に対する旋回流の影響評価, 電力中央研究所報告, L15002(2016).
- [7] 樋口眞一, 岡崎輝幸, 妹尾茂樹, 圧縮機, タービンおよび燃焼器における CFD 活用事例 (特集 ガスタービンに関連する CFD 技術の最前線), 日本ガスタービン学会誌, 40-6(2012), 262-267.
- [8] S. M. A. Noori Rahim Abadi and A. hmadpour. S. M. N. R. Abadi, J. P. Meyer, CFD-based shape optimization of steam turbine blade cascade in transonic two phase flows, Applied Thermal Engineering, 112-5(2017), 1575-1589.
- [9] G. P. Greyvenstein, An implicit method for the analysis of transient flows in pipe networks, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 53-5(2002), 1127-1143.
- [10] M. Abbaspour and K. S. Chapman, Nonisothermal transient flow in natural gas pipeline, Journal of Applied Mechanics, 75-3(2008).
- [11] A. Herrán-González, J. M. De La Cruz, B. De Andrés-Toro and J.L. Risco-Martín, Modeling and simulation of a gas distribution pipeline network, Applied Mathematical Modelling, 33 (2009), 1584-1600.
- [12] M. Chaczykowski, Transient flow in natural gas pipeline – The effect of pipeline thermal model, Applied Mathematical Modelling, 34(2010), 1051-1067.
- [13] T. Yashiki, Y. Katagiri, Y. Ishii, S. Kuba, T. Mitadera and T. Yoshida, Development of a Steam Distribution Network Simulator for Enhanced Oil Recovery Systems, Proc. APCOM & ISCM 11-14th(2013).
- [14] Guang-Yan Zhu, Michael A. Henson and Lawrence Megan, Dynamic modeling and

- linear model predictive control of gas pipeline networks, *Journal of Process Control*, 11(2001), 192-148.
- [15] <https://gitlab.com/FrontISTR-Commons/FrontISTR/> (accessed 2020-10-6).
- [16] 奥田洋司, 並列有限要素解析〈2〉並列構造解析ソフトウェア FrontSTR を使いこなす, 培風館(2008)
- [17] <http://www.ciss.iis.u-tokyo.ac.jp/dl/> (accessed 2020-10-6).
- [18] T. Nishikawa, Y. Yamade, M. Sakuma and C. Kato, Application of Fully-resolved Large Eddy Simulation to KVLCC2 -Bare Hull Double Model at Model Ship Reynolds Number-, *日本船舶海洋工学会論文集*, 16(2012), 1-9.
- [19] 飯田明由, 加藤千幸, 吉村忍, 飯田桂一郎, 橋爪祥光, 山出吉伸, 秋葉博, 恩田邦藏, 空力・構造振動・音響連成解析による自動車車室内騒音の予測, *ながれ*, 33(2014), 119-123.
- [20] T. Nakashima, Y. Morikawa, M. Tsubokura, Y. Okada and T. Nouzawa, Unsteady Aerodynamics Simulations of a Sedan-Type Road Vehicle during Sinusoidal Steering Input, 33rd AIAA Applied Aerodynamics Conference (2015).
- [21] 宮川尚起, 数値解析における機械学習の展開可能性, *みずほ情報総研技報*, 9-1(2018), 85-87.
- [22] X. Guo, W. Li and F. Iorio, Convolutional Neural Networks for Steady Flow Approximation, *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*(2016), 481-490.
- [23] S. Lee and D. You, Data-driven prediction of unsteady flow over a circular cylinder using deep learning, *Journal of Fluid Mechanics*, 879-25(2019), 217-254.
- [24] W. H. Schilders, H. A. Vorst and J. Rommes, *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Springer (2008).
- [25] I. T. Georgiou and I. B. Schwartz, Dynamics of large scale coupled structural mechanical systems: A singular perturbation proper orthogonal decomposition approach, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 59-4(1999), 1178-1207.
- [26] R. Yu, S. Roberts, and I. Sharf, Model order reduction of structural dynamics of a very large optical telescope, In *Proceedings of SPIE Conference*, 5497(2004).
- [27] D. Amsallem, J. Cortial, K. Carlberg, and C. Farhat, An on-line method for interpolating linear reduced-order structural dynamics models, *Proceedings of 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* (2009).
- [28] Y. Sato and H. Igarashi, Model Reduction Based on the Method of Snapshots for Eddy

- Current Problems, IEEE Transactions on Magnetics, 49-5(2013), 1697-1700.
- [29] T. Henneron and S. Clnet, Model Order Reduction of Nonlinear Magnetostatic Problems Based on POD and DEI Methods, IEEE Transactions on Magnetics, 50-2(2014).
- [30] Y. Sato, F. Campelo and H. Igarashi, Fast Shape Optimization of Antennas Using Model Order Reduction, IEEE Transactions on Magnetics, 51-3(2015).
- [31] Y. Sato and H. Igarashi, Generation of Equivalent Circuit from Finite-Element Model Using Model Order Reduction, IEEE Transactions on Magnetics, 52-3(2016).
- [32] T. Shimotani, Y. Sato and H. Igarashi, Equivalent-Circuit Generation from Finite-Element Solution Using Proper Orthogonal Decomposition, IEEE Transactions on Magnetics, 52-3(2016).
- [33] P. Feldmann and R. A. Freund, Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 14-5(1995), 639-649.
- [34] R. W. Freund and P. Feldmann, Reduced-order modeling of large linear passive multi-terminal circuits using matrix-padé approximation, Proceedings of the conference on Design, automation and test in Europe(1998), 530-537.
- [35] A. Odabasioglu, M. Celik, and L. T. Pileggi, PRIMA: Passive Reduced Order Interconnect Macromodeling Algorithm, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, 17(1998), 645-654.
- [36] 安藤和昭, むだ時間の Padé 近似と連分数展開による実現法, 計測自動制御学会論文集, 21-11(1985), 1171-1176.
- [37] K. Taira, S. L. Brunton, S. T. M. Dawson, C. W. Rowley, T. Colonius, B. J. McKeon and O. T. Schmidt, Modal Analysis of Fluid Flows: An Overview, AIAA Journal, 55-12(2017), 4013-4041.
- [38] J. L. Lumley, The structure of inhomogeneous turbulent flows, Atmospheric turbulence and wave propagation (1967), 166–178.
- [39] P. Moin and R. D. Moser, Characteristic-eddy decomposition of turbulence in a channel, Journal of Fluid Mechanics, 200(1989), 471-509.
- [40] D. Rempfer and H. F. Fasel, Evolution of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer, Journal of Fluid Mechanics, 260(1994), 351–375.
- [41] D. Rempfer and H. F. Fasel, Dynamics of three-dimensional coherent structures in a flat-plate boundary layer, Journal of Fluid Mechanics, 275(1994), 257–283.
- [42] M. N. Glauser, S. J. Leib and W. K. George, Coherent structures in the axisymmetric

- turbulent jet mixing layer, *Turbulent shear flows*, Springer-Verlag (1987).
- [43] 竹内伸太郎, 三宅裕, 梶島岳夫, 青木誠司, 円形ノズルからの乱流噴流の直接シミュレーション, *日本機械学会論文集 B 編*, 65-640(1999), 3918-3925.
- [44] 辻本公一, 大矢直弘, 社河内敏彦, 鉛直平板間の自然対流場における大規模構造のダイナミクス, *ながれ*, 23-6(2004), 461-469.
- [45] C. E. Tinney, M. N. Glauser and L. S. Ukeiley, Low dimensional characteristics of a transonic jet. Part 1. Proper orthogonal decomposition, *Journal of Fluid Mechanics*, 612(2008), 107-141.
- [46] C. E. Tinney, L. S. Ukeiley and M. N. Glauser, Low dimensional characteristics of a transonic jet. Part 2. Estimate and far-field prediction, *Journal of Fluid Mechanics*, 615(2008), 53-92.
- [47] J. B. Freund, and T. Colonius, Turbulence and sound-field POD analysis of a turbulent jet, *International Journal of Aeroacoustics*, 8-7(2009), 337-354.
- [48] M. E. Eljack, Spectral-POD model for energetic structures in a fully developed turbulent channel flow, Ph.D. thesis, Osaka University (2009).
- [49] C. Wollblad and L. Davidson, POD based reconstruction of subgrid stresses for wall bounded flows using neural networks, *Turbulence, Heat and Mass Transfer* 5(2006).
- [50] R. Everson and L. Sirovich, Karhunen-Loève procedure for gappy data, *Journal of the Optical Society of America A*, 12-8(1995), 1657-1664.
- [51] N. E. Murray and L. S. Ukeiley, An application of gappy POD, for subsonic cavity flow PIV data, *Experiments in Fluids*, 42-1(2007), 79-91.
- [52] J. M. Maciejowski, モデル予測制御：制約のもとでの最適制御, 東京電機大学出版局 (2005).
- [53] C.W. Rowley, Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15-3(2005), 997-1013.
- [54] 中野道雄, 美多勉, 制御基礎理論[古典から現代まで], 昭晃堂(1982).
- [55] S. B. Bagheri and D. S. Henningson, Input-output analysis, model reduction and control of the flat-plate boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 620(2009), 263-298.
- [56] M. Ilak, Model reduction and feedback control of transitional channel flow, Ph.D. thesis, Princeton University (2009).
- [57] S. Ahuja and C. W. Rowley, Feedback control of unstable steady states of flow past a flat plate using reduced-order estimators, *Journal of Fluid Mechanics*, 645(2010), 447-478.

- [58] S. Lall, J. E. Marsden and S. Glavaški, A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(2002), 519-535.
- [59] M. Ilak, S. Bagheri, L. Brandt, C. W. Rowley and D. S. Henningson, Model reduction of the nonlinear complex Ginzburg-Landau equation, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 9-4(2010), 1284-1302.
- [60] P. J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, 656-10(2010), 5–28.
- [61] M.S. Hemati, C. W. Rowley, E. A. Deem E. A. and L. N. Cattafesta, De-biasing the Dynamic Mode Decomposition for Applied Koopman Spectral Analysis of Noisy Datasets, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 31(2017), 349–368.
- [62] S. T. M. Dawson, M. S. Hemati, M. O. Williams and C. W. Rowley, Characterizing and correcting for the effect of sensor noise in the dynamic mode decomposition, *Experiments in Fluids*, 57(2016).
- [63] C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter and D. S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 641-1(2009), 115-127.
- [64] J. H. Tu, Dynamic mode decomposition: theory and applications, Ph.D. thesis, Princeton University (2013).
- [65] 大道 勇哉, 小林 憲司, 金崎 雅博, 大規模非定常データに対する特徴構造抽出法の開発と大気突入カプセル後流解析への適用, 第 50 回流体力学講演会・第 36 回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム論文集(2019), 83-90.
- [66] N. Aubry, P. Holmes, J. L. Lumley and E. Stone, The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 192(1988).
- [67] 平邦彦, 固有直交分解による流体解析 : 1. 基礎, *ながれ*, 30(2011), 115-123.
- [68] S. Lorenzi, A. Cammi, L. Luzzi and G. Rozzaa, POD-Galerkin method for finite volume approximation of Navier–Stokes and RANS equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311-1(2016), 151-179.
- [69] G. Stabile and G. Rozzaa, Finite volume POD-Galerkin stabilized order methods for the parametrized incompressible Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, 173(2018), 273-284.
- [70] J. Weller, E. Lombardi, M. Bergmann and A. Iollo, Numerical methods for low-order modeling of fluid flows based on POD, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63-2(2010), 249–268.
- [71] G. Stabile, S. Hijazi, A. Mola, S. Lorenzi and G. Rozza, POD-Galerkin reduced order

- methods for CFD using Finite Volume Discretisation: vortex shedding around a circular cylinder, *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, 8-1(2017), 210-236.
- [72] Z. Wang, I. Akhtar, J. Borggaard and T. Iliescu, Two-level discretizations of nonlinear closure models for proper orthogonal decomposition, *Journal of Computational Physics*, 230(2011), 126–146.
- [73] T. Iliescu and Z. Wang, Variational multiscale proper orthogonal decomposition: Navier-Stokes equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(2014), 641–663.
- [74] W. Cazemier, R.W.C.P. Verstappen and A.E.P. Veldman, Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows, *Physics of Fluids*, 10(1998), 1685–1699.
- [75] Z. Wang, I. Akhtar, J. Borggaard and T. Iliescu, Proper orthogonal decomposition closure models for turbulent flows: a numerical comparison, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237–240(2012) 10–26.
- [76] J. Östh, B.R. Noack, S. Krajnović, D. Barros and J. Borée, On the need for a nonlinear subscale turbulence term in POD models as exemplified for a high-Reynolds-number flow over an Ahmed body, *Journal of Fluid Mechanics*, 747(2014), 515–544.
- [77] S. Walton, O. Hassan and K. Morgan, Reduced order modelling for unsteady fluid flow using proper orthogonal decomposition and radial basis functions, *Applied Mathematical Modelling*, 37(2013).
- [78] C. W. Rowley, T. Colonius and R. M. Murray, Model reduction for compressible flows using POD and Galerkin projection, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 189(2004), 115–129.
- [79] I. Kalashnikov and S. Arunajatesan, A stable Galerkin reduced order model (ROM) for compressible flow, 10th World Congress on Computational Mechanics (2014).
- [80] K. Carlberg, M. Barone and H. Antil, Galerkin v. least-squares Petrov–Galerkin projection in nonlinear model reduction, *Journal of Computational Physics*, 330(2017), 693-734.
- [81] R. Bourgueta and M. Braza, Reduced-order modeling for unsteady transonic flows around an airfoil, *Physics of Fluids*, 19(2007).
- [82] H. O. H. Leo, G. Bharathram and J. S. Alexander, Coherent structures in transitional pipe flow, *Physical Review Fluids*, 1-2(2016).
- [83] L. Hufnagel, J. Canton, R. Örlü, O. Marin, E. Merzari and P. Schlatter, The three-

- dimensional structure of swirl-switching in bent pipe flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 835(2018), 86-101.
- [84] L. Sirovich, Turbulence and the dynamics of coherent structures, Parts I-III, *Q. Appl. Math*, XLV-3(1987), 561-590.
- [85] 畠沢政保, まっすぐな円管内の乱流旋回流の特性(広い旋回強度範囲における旋回の減衰), *日本機械学会論文集 B 編*, 75-754(2009), 1275-1286.
- [86] <https://www.openfoam.com/> (accessed 2020-10-6).
- [87] T. Kajishima and K. Taira, *Computational fluid dynamics: incompressible turbulent flows*, Springer (2017).
- [88] M. S. Chong, A. E. Perry and B. J. Cantwell, A general classification of three-dimensional flow fields, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 2-5(1990), 765-777.
- [89] J. Jeong and F. Hussain, On the identification of a vortex, *Journal of fluid mechanics*, 285(1995), 69-94.
- [90] 三浦英明, 木田重雄, 一様流中の低圧力旋回渦のダイナミックス, *数理解析研究所講究録*, 1051(1998), 91-99.
- [91] 古川雅人, 山田和豊, 才木一寿, 井上雅弘, 複雑内部流れ場における渦構造の同定, *可視化情報学会誌*, 22-1(2002), 107-110.
- [92] G. E. Hinton and R. R. Salakhutdinov, Reducing the dimensionality of data with neural networks, *science*, 313(2006), 504-507.
- [93] 齋藤雄太, 後藤晋, 河原源太, 一様等方乱流における渦軸の階層構造の同定, *ながれ*, 33(2014), 99-102.
- [94] 中山雄行, 梅田賢治, 市川利郎, 西原幸夫, 高木周司, 旋回関数の定義と渦流の同定法への応用, *愛知工業大学総合技術研究所研究報告*, 9(2007), 117-124.
- [95] <https://keras.io/ja/> (accessed 2020-10-11).
- [96] <https://www.tensorflow.org/> (accessed 2020-10-11).
- [97] 竹内則雄, 檜山和男, 寺田賢二郎, *計算力学*, 森北出版(2012).
- [98] 中村育雄, *流体解析ハンドブック*, 共立出版(1998).
- [99] オープン CAE 学会, *OpenFOAM による熱移動と流れの数値解析*, 森北出版(2016).
- [100] 金谷健一, *これなら分かる最適化数学 ー基礎原理から計算手法までー*, 共立出版(2005).
- [101] 金谷健一, *線形代数セミナー: 射影, 特異値分解, 一般逆行列*, 共立出版(2018).
- [102] 山本哲朗, *行列解析の基礎*, サイエンス社(2010).