

## 審査の結果の要旨

論文提出者氏名 清水 伸高

現代の科学技術においては、多数の要素からなる大規模システムの取り扱いが重要である。各要素間の接続関係を表現する道具として、様々な局面でグラフが用いられている。大規模システムのモデル化によって現れるグラフは、単に頂点と辺からなる図形として静的に与えられるだけではなく、確率的な現象として出現するランダムグラフや、時間の推移と共に変化する動的グラフであることが多い。また、グラフの中を一定の確率的なルールに従って推移するランダムウォークや各点の状態が隣接点の状況から影響を受けてランダムに更新される投票過程も合意形成や影響伝搬のモデルとして広く使われている。本論文は、このようにランダムネスを内包したグラフ上の様々な現象を、計算量理論的な問題意識に基づいて解析して得られた新たな知見を示している。

本論文は「Algorithmic Study on Randomness in Graphs」(グラフのランダムネスに関するアルゴリズムの研究)と題し、10章からなる。

第1章「Introduction」(序論)では、グラフ上のランダムネスを研究する背景を説明するとともに、本論文の主要な結果を概説している。

第2章「Preliminaries」(準備)では、本論文中で用いる既知の事実を紹介している。

第3章「Biclique Counting on Random Bipartite Graphs」(ランダム2部グラフ上の2部クリークの数え上げ)では、2部グラフに含まれる2部クリークの個数を計算する問題の計算量を解析している。精緻計算量理論の中で採用されている強指数時間仮説(ETH)と呼ばれる強い予想の成立を仮定した下で、この問題に対する計算量のタイトな上下界を導出している。さらに、ランダム2部グラフ中の2部クリークの数え上げ問題を高い確率で解くアルゴリズムが存在すれば、任意の2部グラフを殆ど同じ計算量で解く乱択アルゴリズムが導かれることも示している。

第4章「Fine-Grained Hardness Amplification」(精緻困難性の増幅)では、平均計算量理論における困難性増幅の技法を精緻計算量理論の文脈に移植して、平均計算量のより強い下界を導出する手法を導入している。その結果として、ETHが成立するという仮定の下で、ランダム2部グラフ上の2部クリークの数え上げ問題に対する平均計算量のより強い下界を得ている。

第5章「Functional Voting」(関数型投票)では、分散プロトコルにおける局所多数決モデルとして、関数型投票過程と呼ばれる新たなモデルを導入している。このモデルは、0-1区間上の関数を設定することによって定義される確率的プロトコルであり、これまでに深く研究されてきた best-of-two と best-of-three の両者を含む広い枠組みとなっている。

第6章「Voting Process on Stochastic Block Model」(確率的ブロックモデル上の投票過程)では、確率的ブロックモデル上での best-of-two, best-of-three 両局所多数決モデルの挙動を解析している。確率的ブロックモデルは、密な二つのコミュニティの間が疎に結合されている状態を表現したランダムグラフであるが、コミュニティ間結合の密度に関する閾値が存在して、閾値より密ならば高速に合意に到達し、閾値より疎ならば合意時間が頂点数に対して指数関数的になるという相転移現象を示している。

第7章「Quasi-Majority Functional Voting」（擬多数決関数型投票）では、関数型投票の中で、best-of-two と best-of-three の両者を含みながらも、より限定的な擬多数決関数型投票モデルを導入し、疎でありながらも高い結合性を実現するエクスペンダーにおいて、擬多数決関数型投票モデルが、高速に合意に達することを示している。

第8章「Random Walk on Growing Networks」（成長ネットワーク上のランダムウォーク）では、頂点と辺が時間の経過と共に付け加わって行く成長ネットワーク上のランダムウォークに関する未訪問頂点数の挙動を解析している。特に、一般の成長ネットワークに適用可能な上界を与えると共に、グラフの形状が常にパスである場合に、この上界がタイトとなることを示している。

第9章「Average Distance and Diameter」（平均距離と直径）では、各頂点の次数が頂点数の冪乗で指定されるランダム正則グラフ上の平均距離や直径の漸近的挙動を精密に解析している。その結果として、次数を表す指数が整数の逆数でない限り、同じ次数の正則グラフの中で最小の直径がランダム正則グラフによって達成されることを示している。

最後に、第10章「Conclusion」（結論）では、本論文の成果を簡潔に纏めると共に、今後の研究課題を提示している。

以上を要するに、本論文はグラフ上のランダムネスに関する様々な現象に対して、精密な理論を展開することによって、計算量理論的に意義のある新たな結果を多数導いている。理論計算機科学における非常に質の高い貢献であり、数理情報学の発展に大きく寄与している。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。