

## 学習者の理解状況とモニタリング能力の定量的診断法の提案

— 認知診断モデルと信号検出理論に基づく数理的アプローチ —

佐宗 駿 (東京大学)

Proposal of Assessment Tools for Students' Understanding and Monitoring Ability:  
Mathematical Approach Based on Cognitive Diagnostic Models and Signal Detection Theory

Shun SASO

The University of Tokyo

### Authors' Note

Shun Saso is a Ph.D. student, Graduate School of Education, The University of Tokyo

This research was supported by a grant, Young Scholar Training Program from Center for Advanced School Education and Evidence-Based Research (CASEER), Graduate School of Education, The University of Tokyo

### **Abstract**

Demand for diagnostic assessment of students' understanding and monitoring ability has rapidly increased, while the methodological difficulty remains in how to assess them quantitatively. This study proposed a two-step diagnosis procedure to assess students' understanding and monitoring ability based on two psychometric models: cognitive diagnostic models and signal detection theory. The proposed approach was applied to an educational test that includes responses for confidence level in answering each item. The empirical analysis demonstrated that even students who attained the identical raw score could show substantially different strengths and weaknesses in each aspect of the understanding. Furthermore, this study revealed that there are students who have high scores but low monitoring ability, as well as students who have low scores but high monitoring ability. Results from the two-step diagnosis procedure have much potential to improve daily students' learning and schoolteachers' instruction.

*Keywords* : Cognitive Diagnostic Models, Signal Detection Theory, Understanding, Monitoring Ability, Educational Assessment

## 学習者の理解状況とモニタリング能力の定量的診断法の提案

### — 認知診断モデルと信号検出理論に基づく数理的アプローチ —

#### 1 問題と目的

##### 1.1 学習者の理解状況とモニタリング能力の

##### 定量的診断の必要性

テストを活用して、学習者の理解状況を診断し、その結果を学習・指導改善に活かす必要性が近年、指摘されている (e.g., 文部科学省, 2019; Clark, 2012)。とりわけ、学習者の理解状況を多面的に診断することの重要性は論を俟たない。たとえば、数学的概念に関する理解には、内容領域に応じた複数の下位要素が考えられる。具体的には、通分や約分といった計算手続き上の概念や平行四辺形の特徴や比例のグラフの性質といった図表に関する概念などが挙げられる。こうした下位要素の習得状況を把握することができれば、つまずきに応じた指導と学習改善につながる診断情報になると考えられる。

理解状況の多面的な診断が学習・指導改善に必要であると同時に、学習者が自身の理解状況を正しくモニタリングできているかを診断することも重要である。つまり、数学的概念を学習しているときに、学習者がある概念を正しく理解できていないにも関わらず、理解できていると誤った判断をした場合、その概念の理解が不十分な状態で学習を終えてしまう可能性がある。

自己調整学習 (self-regulated learning; Zimmerman & Schunk, 2011) やキーコンピテンシーの提案 (Rychen & Salganik, 2003) に代表されるように、自身の学習を正しくモニタリングし、学習行動を適切にコントロールできる自立した学習者の育成の重要性は国内外で指摘されている。しかし、学習者は必ずしも自身の理解状態を正し

くモニタリングできているわけではない (e.g., Glenberg et al., 1982; Fukaya, 2013)。

以上の背景から、学習者の多面的な理解状況およびモニタリング能力を定量的に診断することができれば、その結果は日々の学習行動や教師による指導の改善に活きる可能性がある。学習者の多様な理解状況を適切に把握し、それらを包摂した指導改善に活かすための診断方法の提案は、本研究プロジェクトのテーマである「多様性と包摂性」の観点からも重要な意義をもつ。

##### 1.2 統計モデルによる定量的診断

本研究では、こうした学習者の多面的な理解状況およびモニタリング能力を定量的に診断するために、2つの統計モデルを段階的に活用した定量的な診断方法を提案する。具体的には、学習者の多面的な理解状況の定量的診断に対して、認知診断モデル (cognitive diagnostic model, CDM; Rupp et al., 2010) を用いる。モニタリング能力について、本研究では、自身の回答の正誤を正しく判断できる能力であるメタ認知的モニタリング能力に焦点を当て、信号検出理論 (signal detection theory, SDT; Wickens, 2002) という統計モデルを用いた定量的な診断を行う。

統計モデルのテストへの活用は、項目反応理論 (item response theory, IRT; 豊田, 2002) を中心に、TOEFL や TOEIC などの外国語能力試験で広く行われてきた (光永, 2022)。一方で、個々の学校教育場面においてこのような統計モデルを活用した診断や指導による有効性の検証や論点整理は、まだ十分に進んでいないと考えられる。

### 1.3 本稿の目的と構成

本研究で扱う HO-DINA モデル (Higher-Order DINA model; de la Torre & Douglas, 2004) と呼ばれる CDM と Selker et al. (2019) の提案した SDT は、応用上の有用性が示唆されながらも、実際のテストへの応用が十分に行われてこなかった。特に、国内に限って言えば、その応用は皆無である。本稿はこうした統計モデルを実際のテストへ応用した際に得られる推定結果を解釈することで、今後の活用に資する知見を提供することを目的とする。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第2節では、HO-DINA モデルと、Selker et al. (2019) の提案した SDT の概要を説明する。第3節では、本研究で用いる学習診断テスト COMPASS と今回分析の対象とした変数の概要を述べる。そして、第4節では、COMPASS のデータを用いた解析の方法について、第5節では、解析結果とその考察を加える。最後に、第6節で、まとめと今後の展望を述べる。

## 2 本研究で活用するモデルの導入

本節では、本研究で活用する CDM と SDT を説明する。なお、本研究では、各モデル内のパラメタの推定に関して、MCMC 法 (Markov chain Monte Carlo method) に基づくベイズ推定を利用する。その理由として、(1) 複雑なモデルの推定も、汎用的に解くことができること (e.g., 清水, 2018; Kruschke, 2015) (2) CDM では、教室場面のよう比較的サンプルサイズが小さい状況では、最尤推定法と比べて推定が安定すること (Yamaguchi & Okada, 2020) (3) SDT では、後述するシグナル試行もしくはノイズ試行のいずれかの試行回数が 0 でも補正の必要なく推定できること (Fleming, 2017) が挙げられる。

### 2.1 CDM の概要

CDM は、学習者の能力やスキルをアトリビュートと呼ばれる認知的要素に分けて、各アトリビュートの習得状況を推定する教育測定学の統計モデルである。本節では、まず、CDM のうち、最も基本的な DINA モデル (deterministic inputs, noisy and gate model; Junker & Sijtsma, 2001) を例示する。そして、DINA モデルを拡張した CDM であり、本研究で活用する HO-DINA モデルを説明する。

CDM の分析では、解答データの収集とモデル内の Q 行列 (Q-matrix; Tatsuoaka, 1983) の設定が必要となる。解答データ  $\mathbf{X}$  は、学習者  $i$  ( $1, 2, \dots, I$ ) の項目  $j$  ( $1, 2, \dots, J$ ) への解答  $x_{ij}$  ( $0$ : 誤答,  $1$ : 正答) を要素とするサイズ  $I \times J$  の行列である。Q 行列は、項目  $j$  に正答するためにアトリビュート  $k$  ( $= 1, 2, \dots, K$ ) が必要か否かを示す  $q_{jk}$  ( $0$ : 不要,  $1$ : 必要) を要素とするサイズ  $J \times K$  の行列である。

表 1 は Q 行列の例である。項目群は、整数どうしの足し算・引き算・掛け算の習得状況を診断している。つまり、アトリビュートとして、「A1: 足し算」・「A2: 引き算」・「A3: 掛け算」の 3 つを設定している。たとえば、項目「 $3 + 4 - 1$ 」の正答には、「A1: 足し算」・「A2: 引き算」の習得が必要と考えられるため、対応する要素に 1 が割り振られ、「A3: 掛け算」には 0 が割り振られる。

表 1 Q 行列の例

項目	A1: 足し算	A2: 引き算	A3: 掛け算
$3 + 5$	1	0	0
$9 - 3$	0	1	0
$8 \times 3$	0	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3 + 4 - 1$	1	1	0

解答データと Q 行列をもとに、CDM は、学習者  $i$  がアトリビュート  $k$  を習得しているかを示す離散潜在変数  $\alpha_{ik}$  (0 : 未習得, 1 : 習得) をまとめたアトリビュート習得パターン  $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{iK})^t$  (右肩の  $t$  は転置記号) を推定できる。つまり前述の例で、 $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})^t = (1, 1, 0)^t$  と推定されたとき、学習者  $i$  は足し算と引き算は習得できているが、掛け算は習得できていないと解釈できる。

DINA モデルでは、項目  $j$  の正答に必要なアトリビュートを学習者  $i$  が全て習得している場合に正答でき、一つでも未習得である場合は誤答するという仮定をおく。これは理想反応  $\eta_{ij}$  として、

$$\eta_{ij} = \prod_{k=1}^K \alpha_{ik}^{q_{jk}} \quad (1)$$

と表される。なお、 $0^0 = 1$  と定義する。

しかし、実際には、項目の正答に必要なアトリビュートを全て習得しているにも関わらずケアレスミスなどで誤答するケースや、全て習得していないにも関わらず当て推量などで正答するケースが存在する。これらのケースが発生する確率を、前者について slip パラメタ  $s_j$ 、後者は guessing パラメタ  $g_j$  で表現する。すなわち、

$$s_j = P(x_{ij} = 0 | \eta_{ij} = 1) \quad (2)$$

$$g_j = P(x_{ij} = 1 | \eta_{ij} = 0) \quad (3)$$

である。DINA モデルでは、これら  $\eta_{ij}, s_j, g_j$  の関数として、学習者  $i$  の項目  $j$  に対する項目正答確率を

$$p_{ij} = P(x_{ij} = 1 | \eta_{ij}, s_j, g_j) = (1 - s_j - g_j)\eta_{ij} + g_j \quad (4)$$

と表現する。つまり、 $\eta_{ij} = 1$  である学習者  $i$  が項目  $j$  に正答できる確率は、 $1 - s_j$  であり、 $\eta_{ij} = 0$  の場合は、 $g_j$  となる。以上が、DINA モデルにおける基本的な仮定である。

本研究で扱う HO-DINA モデルでは、この DINA モデルに対して、各アトリビュートの情報を一次的に縮約する高次因子として連続潜在変数  $\theta_i$  を導入する。つまり、学習者  $i$  のアトリビュート  $k$  の習得確率を

$$p_{ik} = P(\alpha_{ik} = 1 | \theta_i, \xi_k, \beta_k) = \frac{\exp(\xi_k \theta_i - \beta_k)}{1 + \exp(\xi_k \theta_i - \beta_k)} \quad (5)$$

と表現する。ここで、 $\xi_k, \beta_k$  は、それぞれアトリビュート  $k$  の習得に関する識別力と困難度の指標として解釈できる。なお、 $\xi_k > 0$  という制約が課されることが多い。これは、 $\theta_i$  が大きくなるほど各アトリビュートの習得確率も大きくなるという仮定を表している。

$\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_I)^t, \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_I)^t, \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_J)^t, \mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_J)^t, \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)^t, \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K)^t$  として、尤度関数  $L(\mathbf{X} | \mathbf{A}, \mathbf{s}, \mathbf{g})$  と全学習者のアトリビュート習得パターン  $\mathbf{A}$  を得る確率  $P(\mathbf{A} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta})$  は、それぞれ

$$L(\mathbf{X} | \mathbf{A}, \mathbf{s}, \mathbf{g}) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J p_{ij}^{x_{ij}} (1 - p_{ij})^{1 - x_{ij}} \quad (6)$$

$$P(\mathbf{A} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^I \prod_{k=1}^K p_{ik} \quad (7)$$

と表される。以上より、同時事後分布は、

$$P(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{A}, \mathbf{s}, \mathbf{g} | \mathbf{X}) \propto$$

$$L(\mathbf{X} | \mathbf{A}, \mathbf{s}, \mathbf{g}) P(\mathbf{A} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}) P(\boldsymbol{\lambda}) P(\boldsymbol{\theta}) P(\mathbf{s}) P(\mathbf{g}) \quad (8)$$

と表現できる。ただし、 $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\beta})^t$  である。

このように、HO-DINA モデルは、高次因子としての連続潜在変数  $\boldsymbol{\theta}$  とアトリビュート習得パターンの推定が同時に可能である。そのため、項目パラメタを考慮した学習者の一次的な順序づけに加え、高次因子の下位要素それぞれの習得・未習得を診断できる。こうした特徴を活かし、本研究では HO-DINA モデルによる学習者の理解状況の多面的かつ定量的な診断を試み、従来の正

答数得点との併用可能性も探る。

## 2.2 SDT の概要

SDT は、ある刺激に対して、知覚すべき刺激であるシグナルと無視すべき刺激であるノイズを弁別する力 (i.e., 弁別力) を評価するための統計モデルである。SDT を用いて、弁別力を評価する利点は、反応の偏りであるバイアスを考慮できる点にある。たとえば、弁別力の評価として、正しい反応 (e.g., シグナルをシグナルと判断) または誤った反応 (e.g., シグナルをノイズと判断) の割合を用いたとする。この場合、弁別力が同程度の学習者でも、シグナルを評価する基準が異なれば、これらの反応率にも違いが生じてしまう (島津・岡田, 2022)。このような問題に対して、弁別力とバイアスを独立に評価できるのが SDT の特徴である。

SDT において、正答した項目をシグナル試行、誤答した項目をノイズ試行とみなすことで、学習者ごとのメタ認知的モニタリング能力を推定することができる。本研究では、この特徴を活かして、項目ごとの正誤データおよび確信度データから、学習者のメタ認知的モニタリング能力を推定する。

SDT では、シグナルらしさの度合いを強度という一次元上で表現する。各ノイズ試行およびシグナル試行から学習者が受け取る強度をそれぞれ  $f^{(n)}, f^{(s)}$  とし、それぞれ以下の正規分布に従うとする。

$$f^{(n)} \sim \text{Normal}(0, 1) \quad (9)$$

$$f^{(s)} \sim \text{Normal}(\mu^{(s)}, \sigma^{(s)2}) \quad (10)$$

ここで、シグナル試行からはノイズ試行よりもシグナルらしさをより受け取ると考えられるため、 $\mu^{(s)} > 0$  の制約が通常、課される。また、 $f^{(n)}$  は識別上の観点から、標準正規分布に従うと仮定

されることが多い。本研究の分析においても、ノイズ分布には、標準正規分布を仮定する。

ノイズ試行、シグナル試行それぞれで観測された学習者  $i$  の  $C$  件法の確信度それぞれへの回答数をまとめた  $\mathbf{y}_i^{(n)} = (y_{i1}^{(n)}, y_{i2}^{(n)}, \dots, y_{iC}^{(n)})^t, \mathbf{y}_i^{(s)} = (y_{i1}^{(s)}, y_{i2}^{(s)}, \dots, y_{iC}^{(s)})^t$  は、各試行で受け取った強度と  $C - 1$  個の閾値  $\lambda_c$  に基づいて生成されたと考える。具体的に、図 1 では 3 件法 (i.e., 確信度の低い順に 1, 2, 3) で確信度を回答する場合を示している。このとき、閾値  $\lambda_c$  は  $\lambda_1, \lambda_2$  の 2 つである。図 1 において  $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$  は 2 回のノイズ試行からそれぞれ受け取った強度、 $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}$  は 2 回のシグナル試行からそれぞれ受け取った強度を表している。たとえば、 $f_1^{(n)}$  の強度を受け取ったとき、 $f_1^{(n)} < \lambda_1$  であるので確信度は 1、 $f_2^{(n)}$  の強度を受け取ったとき、 $\lambda_1 < f_2^{(n)} < \lambda_2$  であるので確信度は 2 と回答すると考えられる。同様に、 $f_1^{(s)}, f_2^{(s)}$  の強度を受け取ったとき、それぞれ 2, 3 と回答すると考えられる。

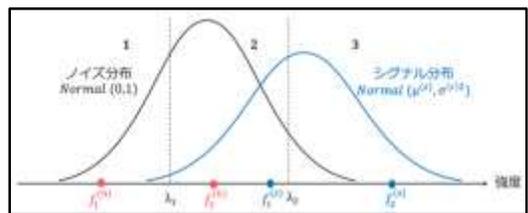


図 1 ノイズ分布とシグナル分布における閾値パラメータ

Selker et al. (2019) は、

$$\gamma_c = \log \left( \frac{\frac{c}{C}}{1 - \frac{c}{C}} \right) \quad (11)$$

$$\lambda_{ic} = a_i \gamma_c + b_i \quad (12)$$

として学習者*i*の*c*個目の閾値パラメタ $\lambda_{ic}$ を表現した。この表現により、 $C - 1$ 個の閾値パラメタを $a$ と $b$ の2つのパラメタで表現できる。ここで、 $a_i$ および $b_i$ と閾値パラメタの関係を図 2, 3 に示した。

$a$ は、閾値パラメタ間の幅の大きさに関係する正のパラメタで、 $a < 1$ では、閾値の幅は $a = 1$ のとき (i.e., バイアスなし)と比べて、狭くなり、両極のカテゴリ (i.e., 1, 3)へ回答する確率が高くなる (図 2)。 $a > 1$ のときは、閾値間の幅が広くなり、中間付近のカテゴリ (i.e., 2)へ回答する確率が高くなる。

$b$ は、閾値パラメタの位置に関わる量である。 $b > 0$ のときは閾値パラメタが強度軸の正の方向に平行移動する。その結果、1 と回答しやすくなる (図 3)。同様に、 $b < 0$ のとき、閾値パラメタは強度軸の負の方向に平行移動する。つまり、3 と回答しやすくなる。

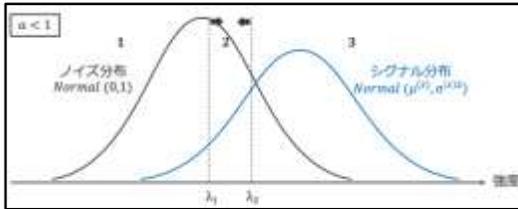


図 2 パラメタ $a$ と閾値パラメタ $\lambda$ の関係

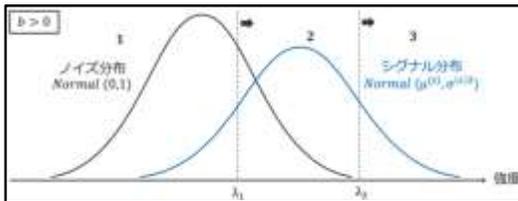


図 3 パラメタ $b$ と閾値パラメタ $\lambda$ の関係

ノイズ分布とシグナル分布それぞれで学習者*i*が確信度 $c$ を回答する確率 $P(y_i^{(n)} = c | a_i, b_i)$ ,

$P(y_i^{(s)} = c | a_i, b_i)$ を $p_{ic}^{(n)}, p_{ic}^{(s)}$ とすれば、これらは、図 1 において、対応する閾値パラメタと強度軸およびノイズ分布もしくはシグナル分布で囲まれた面積に相当する。たとえば、ノイズ試行において確信度 2 と回答する確率 $p_{i2}^{(n)}$ は、 $\lambda_1, \lambda_2$ を通り強度軸に垂直な直線と、強度軸、標準正規分布であるノイズ分布で囲まれた面積に相当する。そのため、各試行におけるそれぞれの確信度への回答確率は、標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(\bullet)$ を用いて、

$$p_{i1}^{(n)} = \Phi(\lambda_{i1}) \quad (13)$$

$$p_{i2}^{(n)} = \Phi(\lambda_{i2}) - \Phi(\lambda_{i1}) \quad (14)$$

$$p_{i3}^{(n)} = 1 - \Phi(\lambda_{i2}) \quad (15)$$

$$p_{i1}^{(s)} = \Phi\left(\frac{\lambda_{i1} - \mu^{(s)}}{\sigma^{(s)}}\right) \quad (16)$$

$$p_{i2}^{(s)} = \Phi\left(\frac{\lambda_{i2} - \mu^{(s)}}{\sigma^{(s)}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_{i1} - \mu^{(s)}}{\sigma^{(s)}}\right) \quad (17)$$

$$p_{i3}^{(s)} = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda_{i2} - \mu^{(s)}}{\sigma^{(s)}}\right) \quad (18)$$

と表すことができる。これらの式をもとに、尤

度関数は、 $\mathbf{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_I^{(n)})^t$ ,  $\mathbf{y}^{(s)} =$

$(y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \dots, y_I^{(s)})^t$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_I)^t$ ,  $\mathbf{b} =$

$(b_1, b_2, \dots, b_I)^t$ として、

$L(\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(s)} | \mu^{(s)}, \sigma^{(s)}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$

$$\prod_{i=1}^I \prod_{c=1}^C p_{ic}^{(s)y_i^{(s)}} p_{ic}^{(n)y_i^{(n)}} \quad (19)$$

と表せる。また、同時事後分布は、

$P(\mu^{(s)}, \sigma^{(s)}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mu_\mu, \sigma_\mu, a_\mu, b_\mu | \mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(s)})$

$\propto L(\mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{y}^{(s)} | \mu^{(s)}, \sigma^{(s)}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) P(\mu^{(s)} | \mu_\mu) P(\sigma^{(s)} | \sigma_\mu)$

$P(\mathbf{a} | a_\mu) P(\mathbf{b} | b_\mu) P(\mu_\mu) P(\sigma_\mu) P(a_\mu) P(b_\mu) \quad (20)$

となる。ここで、 $\mu_\mu, \sigma_\mu, a_\mu, b_\mu$ はそれぞれ、シグナル分布の平均 $\mu^{(s)}$ 、シグナル分布の標準偏差 $\sigma^{(s)}$ ,

閾値パラメタ $\lambda$ を規定するパラメタ $a, b$ の事前分布の平均を表すパラメタである。

このように推定されたシグナル分布の平均 $\mu^{(s)}$ および分散 $\sigma^{(s)2}$ の関数で、メタ認知的モニタリング能力を表す一つの指標として AUC (area under the curve; Wickens, 2002)があり、

$$AUC = \Phi\left(\frac{\mu^{(s)}}{\sqrt{1 + \sigma^{(s)2}}}\right) \quad (21)$$

である。AUC は、.50 に近いほど当て推量に基づく判断、1 に近いほど完全な判断であると解釈される。そのため、1 に近いほどメタ認知的モニタリング能力が高いと判断できる。本研究では、この指標を用いてメタ認知的モニタリング能力を診断する。

### 3 学習診断テスト COMPASS の概要

COMPASS (componential assessment) は、数学的基礎学力をいくつかの構成要素に分けて測定することを目的とした数学の学力・学習力診断テストである (市川他, 2009)。このテストは、複数のテスト課題を含んでおり、各課題について、学習者はそれぞれ決められた制限時間内に解いていく。出題内容は学習指導要領上の対象学年の一つ前までの学年に配当されたものである。たとえば、本研究で扱う中学 1 年生用のテストは、小学 6 年生までの内容で構成されている。

本研究では、このテストに含まれる課題のうち、数学的概念の知識を測定する、概念の正誤判断課題に焦点をあてる。この課題は、「分母がちがう分数を、共通な分母の分数になおすことを、約分すると言う」といった数学的概念に関する基礎的な命題に対して、それが正しいかどうかを問う項目を 10 項目含んでいた。さらに、解答への確信度を項目ごとに 3 段階 (i.e., 1: 合っているかわからない, 2: たぶん合っている, 3: 絶対に合っ

ている)で尋ねている。本課題における制限時間は 3 分であった。

確信度付きのテストにおける点数化の例として、COMPASS では、正答した場合に 1 点、誤答した場合に -1 点を与え、解答の確信度である「合っているかわからない」・「たぶん合っている」・「絶対に合っている」のそれぞれに 0, 1, 2 のウェイトを与え、解答の得点と確信度のウェイトの積を求め、概念判断得点として算出している (植阪他, 2014)。このような点数化のルールによって、学習者の概念理解の程度を簡便に得点化できる。

このように得点化された情報に加えて、HO-DINA モデルおよび Selker et al. (2019) のモデルによる分析は、追加の情報を返すことができると考えられる。つまり、HO-DINA モデルは、項目の特性を項目パラメタとして考慮した上での一次的な指標および概念理解の下位要素の習得・未習得に関する情報をフィードバックできる。また、Selker et al. (2019) のモデルは、確信度データと正誤データによって、メタ認知的モニタリング能力に関する情報をフィードバックできる。このような診断情報を従来の得点に加えてフィードバックすることで、学習・指導改善に活きるより詳細な診断情報となりうると考えられる。第 3, 4 節では、概念の正誤判断課題を HO-DINA モデルおよび Selker et al. (2019) のモデルで分析し、その推定結果を学習・指導改善への活用の視点を踏まえて考察していく。

### 4 COMPASS データの解析

本研究では、COMPASS に含まれる概念判断課題 10 項目の正誤データと確信度データを利用した。以降の解析では、ある公立中学校の中学 1 年生 106 名を対象に 201X 年に実施されたデータの

うち、欠測値を含まない 97 名のデータを用いた。

本節では、まず CDM の解析で用いた Q 行列の詳細を述べる。その後、CDM と SDT のそれぞれにおいて、設定したパラメタの事前分布と MCMC の設定を述べる。なお、CDM と SDT の分析には、R 4.2.1 (R Core Team, 2022) のパッケージ R2Jags (Su & Yajima, 2021) と JAGS (Plummer, 2017) を用いた。

#### 4.1 Q 行列の設定

本研究では、「数学的概念に関する知識」に関するアトリビュートとして、「A1：手続き的概念」・「A2：単位量概念」・「A3：図表的概念」の 3 つを設定した。「A1：手続き的概念」は、計算過程に関係する概念の理解 (例：(4) 分母と分子に同じ数をかけても、分母と分子を同じ数でわっても、分数の大きさは変わりません[真]), 「A2：単位量概念」は、1 単位量に関する概念の理解 (例：(7)1 立方メートルは 10000 立方センチメートルである。[偽]), 「A3：図表的概念の理解」は、図表に関連する概念の理解 (例：(9)向かい合った 1 組の辺が平行な四角形を平行四辺形と言う。[偽]) を示している。ここで、項目例における括弧の数字は項目番号を示し、大括弧内はその命題の真偽を表している。

Q 行列は、DINA モデルの識別性の観点から、各アトリビュートのみを反映する項目が少なくとも 1 つ含まれ、かつ各アトリビュートを測定する項目が 3 つ以上あることが望ましい (i.e., strict identifiability; Gu & Xu, 2020)。そのため、この識別条件を踏まえながら、アトリビュートの設定を行うこととした。設定過程として、まず著者が COMPASS の設計原理 (市川他, 2009) と項目に含まれる内容領域を参考に、暫定の Q 行列を設定した。その後、COMPASS の開発に携わった認

知・教授・学習心理学の専門家との議論をもとに、最終的な Q 行列を設定した (表 2)。議論においては、著者が各アトリビュートの定義を説明したのち、それぞれの項目が測っているアトリビュートの適切さを専門家に吟味してもらい、暫定の Q 行列の要素に対する合意を得た。

表 2 最終的な Q 行列

項目番号	A1：手続き的概念	A2：単位量概念	A3：図表的概念
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	0	0	1
6	1	0	1
7	0	1	0
8	1	0	0
9	0	0	1
10	0	0	1

#### 4.2 CDM による分析

解答データおよび設定した Q 行列 (表 2) をもとに、HO-DINA モデルを用いて、ベイズ推定によりパラメタ推定を行った。パラメタの事前分布は、弱情報事前分布として、Zhang et al. (2019) の設定を参考に、

$$s_j \sim \text{Beta}(1, 1) \quad (22)$$

$$g_j \sim \text{Beta}(1, 1)_{T(0, 1-s_j)} \quad (23)$$

$$\beta_k \sim \text{Normal}(0, 2^2) \quad (24)$$

$$\xi_k \sim \text{Normal}(0, 2^2)_{T(0, \infty)} \quad (25)$$

とした。ここで、添字  $T(a, b)$  は  $(a, b)$  の範囲をとる切断分布を表している。

また、MCMC の設定に関して、イタレーションは 30000、バーンイン期間は 10000、チェーン数は 4 とした。

#### 4.3 SDT による分析

Selker et al. (2019) のモデルのパラメタをベイズ

推定により求めた。Selker et al. (2019)での設定を参考に、学習者ごとのパラメタの事前分布は、

$$\mu_i \sim \text{Normal}(\mu_\mu, 1) \quad (26)$$

$$\sigma_i \sim \text{Normal}(\sigma_\mu, 1) \quad (27)$$

$$a_i \sim \text{Normal}(a_\mu, 1) \quad (28)$$

$$b_i \sim \text{Normal}(b_\mu, 1) \quad (29)$$

とし、これらのハイパーパラメタの事前分布は、

$$\mu_\mu \sim \text{Normal}(\mu_\mu, 1)_{T(0, \infty)} \quad (30)$$

$$\sigma_\mu \sim \text{Normal}(\sigma_\mu, 1)_{T(1, 5)} \quad (31)$$

$$a_\mu \sim \text{Normal}(1, 1)_{T(0, \infty)} \quad (32)$$

$$b_\mu \sim \text{Normal}(0, 1) \quad (33)$$

とした。

また、MCMC の設定に関して、イタレーションは 30000、バーンイン期間は 10000、チェーン数は 4 とした。

## 5 結果と考察

CDM と SDT の推定において、いずれも全ての量的パラメタについて、Gelman-Rubin 統計量  $\hat{R}$  は 1.1 以下であったことから、マルコフ連鎖の収束が確認された (Gelman et al., 2013)。

実際の解答データ行列に対する HO-DINA モデルのあてはまりを検討するため、ピアソン残差に基づく事後予測  $p$  値を算出した (Levy & Mislevy, 2016)。その結果、事後予測  $p$  値は .61 であった。この値は、.50 に近いほど設定したモデルからの事後予測値と観測値との間に乖離がないことを示す。よって、HO-DINA モデルのあてはまりの良さが示唆された。

以下、学習者全体に関する推定結果と学習者ごとの推定結果について、アトリビュート習得パターン、連続潜在変数  $\theta$  および AUC の値に焦点を当てて記述する。そのほかの HO-DINA モデルおよび Selker et al. (2019) のモデルにおけるパラメタの推定結果は、APPENDIX に記載する。

### 5.1 学習者全体に関する推定結果

学習者全体のアトリビュート習得パターンと所属人数、全体に対する所属人数の割合、各アトリビュート習得パターンに属する学習者の平均正答数、連続潜在変数  $\theta$  の事後期待値の平均、および AUC の平均を表 3 に示す。

表 3 アトリビュート習得パターンごとの推定結果

習得パターン	人数	割合 (%)	平均正答数	$\theta$ の平均	AUC の平均
100	1	1.0	4.00	-.78	.68
001	7	7.2	3.86	-.86	.72
011	19	19.6	6.32	-.36	.71
111	70	72.2	8.04	.24	.76

$\theta$  の平均は、3 つのアトリビュートの上位概念である「数学的概念に関する知識」という能力値を反映している。つまり、この値が大きいほど今回対象とした学習者の中で、「数学的概念に関する知識」をより有していると考えられる。本研究では、 $\xi_k > 0$  として、 $\theta$  が大きいほど、各アトリビュート習得パタンの習得確率が高くなるという制約を課している。そのため、表 3 の推定結果においても、多くのアトリビュートを習得しているアトリビュート習得パターンほど、そこに属する学習者の  $\theta$  の事後期待値の平均は高くなっている。

学習者は可能な全てのアトリビュート習得パターン 8 (=  $2^3$ ) 通りのうち、4 つのアトリビュート習得パタンのいずれかに分類された。アトリビュート習得パターンは、左から順に「A1: 手続き的概念」・「A2: 単度量概念」・「A3: 図表的概念」の習得の有無を示している。例えば、アトリビュート習得パターン 100 に属する学習者は、計算過程における数学的概念を理解できているが (i.e., A1 を習得)、単度量や図表に関わる数学的概念は理解できていない (i.e., A2, A3 が未習得) と考えられる。

表 3 の学習者の全体的な理解状況に関する診断情報に基づけば、学習者全体の理解状況の傾向をマクロに捉え、今後の指導方針を考えることができる。具体的には、全体の約 72.2%の学習者が全てのアトリビュートを習得できている一方で、手続き的概念を習得できていない学習者 (i.e., アトリビュート習得パターン 001 および 011)が全体の約 26.8%存在すると解釈できる。よって、今回対象とした学習者に対する今後の指導方針として、3つのアトリビュートのうち、特に手続き的概念の習得を重点的に促す指導を検討する必要があると考えられる。本研究で対象としたテストでは、手続き的概念は、「分母がちがう分数を、共通な分母の分数になおすことを、約分すると言う」や「分母と分子に同じ数をかけても、分母と分子を同じ数でわっても、分数の大きさは変わりません」といった項目によって測定されていた。よって学習者の学習方法を支援するという観点から考えれば、計算手続きに関する用語について、そもそもその用語はどういった意味で、具体的にどのような計算の場面が考えられるかという手続き的概念の意味理解を促すことが重要となる。

各アトリビュートの習得の有無(0:未習得, 1:習得)と AUC の値のポリシリアル相関係数は、A1, A2, A3 の順に、.26, .17, .26 であり、正の相関が見られた。よって、各アトリビュートを習得するにつれて、AUC の値も大きくなる、つまりメタ認知的モニタリング能力も高くなる傾向があることが示唆された。

## 5.2 学習者ごとの推定結果

学習者ごとのアトリビュート習得パターン、正答数、 $\theta$  の推定値および AUC について、4名の推定結果を抜粋したのが表 4 である。

表 4 学習者ごとの推定結果(一部抜粋)

ID	習得パターン	正答数	$\theta$	AUC
9	100	4	-.78	.68
30	001	4	-.88	.53
34	011	7	-.41	.70
88	111	7	.22	.84

ID9 と ID30, ID34 と ID88 の学習者はそれぞれ同じ正答数 (i.e., 4点と 7点)である。しかし、それぞれのペアでアトリビュート習得パターンを比べると、習得状況が異なることがわかる。具体的に、正答数が 4 である ID9 と ID30 において、ID9 は手続き的な概念を理解しているが、単用量や図表に関する概念は理解できていない。一方で、ID30 は図表に関する概念の理解はできているが、手続き的な概念や単用量に関する概念の理解は十分ではない。同様に、ID34 と ID88 は同じ正答数 7 であるが、ID88 は全ての概念理解に関するアトリビュートを習得している一方で、ID34 は手続的な概念の理解につまずきがあると考えられる。このように正答数だけでなく、アトリビュート習得パターンの推定結果を解釈することで、学習者のより詳細な数学的概念の知識を診断することが可能となる。

さらに、正答数が同じでも連続潜在変数  $\theta$  の事後期待値が異なることがわかる。連続潜在変数  $\theta$  は、項目の性質を考慮した学習者の能力値であると解釈でき、正答数が同じでも、どの項目に正答できたかに応じてその値が異なる。このように連続潜在変数  $\theta$  を同時に推定することで、アトリビュート習得パターンに基づく学習改善や指導改善に向けた診断情報だけでなく、項目の性質を考慮した学習者のランク付けや順序付けというテストの選抜や評価の目的を同時に達成することができる。

正答数や習得できているアトリビュート数が同じでも、AUC の値が異なる。たとえば、ID9 と ID30 は、正答数および習得しているアトリビュートの数が等しい。しかし、ID30 は AUC が.53 であり、当て推量に近い判断をしているのに対して、ID9 は AUC が.68 であり、より正しく自分の解答の正誤を判断できている。よって、普段の学習において、ID9 と比べて ID30 は自分が学習内容を理解しているかどうかうまくモニタリングできていないまま、学習を進めている可能性が推察される。このような学習者に対する一つの支援方針として、たとえば、自分が学んだ内容を理解しているかどうかを確認するために、人に説明してみるつもりで、自己説明するといった学習方略の獲得を促すことが考えられる。

## 6 まとめと今後の展望

### 6.1 まとめ

本研究では、数学の学力・学習力診断テスト COMPASS のうち、確信度の評定を学習者に求めた概念判断課題に CDM と SDT を適用し、理解状況およびモニタリング能力の定量的診断を行い、その診断結果の学習・指導改善への有用性を検討した。その結果、学習者の理解状況を「数学的概念に関する知識」と一側面的に診断すると同時に、その下位要素である「A1: 手続き的概念」・「A2: 単位量概念」・「A3: 図表的概念」の診断が可能となった。また、メタ認知的モニタリング能力を同時に診断することで、全てのアトリビュートを習得できているが、自分の解答の正誤判断は必ずしも正確ではない学習者や、1つのアトリビュートのみの習得にとどまっているが、自身の解答の正誤判断の正確さは高い学習者が存在することがわかった。こうした診断結果は、項目の性質を考慮した学習者の順位づけといった相対

的な評価および、学習者ごとのつまずきに応じた学習改善や指導改善につながる形成的評価の双方に役立つと考えられる。また、各学習者の正誤判断の傾向は、普段の学習において、自身の理解状況をどの程度正確にモニタリングしながら取り組んでいるかといったことを判断する材料にもなると考えられる。

### 6.2 課題と展望

最後に、本研究に残された主な課題を 2 つ指摘し、それぞれについて今後の展望を述べる。

1つ目に、本研究では、HO-DINA モデルという CDM と Selker et al. (2019)の SDT をそれぞれ段階的にテストへ適用したため、HO-DINA モデルの分析では、確信度データは用いず、解答データのみを使用している。そのため、各項目で回答された確信度の情報は考慮されていない。また、Selker et al. (2019)の SDT の分析では、正答した項目をシグナル試行、誤答した項目をノイズ試行とみなしているため、項目の難易度や CDM で設定された Q 行列などの項目の性質は考慮されていない。そのため今後は、確信度データを考慮した CDM の開発や、Q 行列や CDM で推定される項目パラメタを考慮した上で、全体的なメタ認知的モニタリング能力やアトリビュートごとのメタ認知的モニタリング能力を推定できる CDM と SDT を統合したモデルの開発を検討していく必要があるだろう。

2つ目に、本研究は、推定結果として得られた診断情報の提示とその解釈に留まっていた。そのため、学習者や教師がこうした結果をどのように受けとめて、今後の学習改善や指導改善に活かしていくのかといった実践的な検討は行っていない。今後は、本研究で示した診断結果の実践的な活用の枠組みの提案や、診断結果の活用が学習改

善や指導改善にもたらす影響について検討していく必要があるだろう。

#### 引用文献

- Clark, I. (2012). Formative assessment: Assessment is for self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, 24(2), 205-249.
- de la Torre, J., & Douglas, J. (2004). Higher-order latent trait models for cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 69(3), 333-353.
- Fleming, S. M. (2017). HMeta-d: Hierarchical Bayesian estimation of metacognitive efficiency from confidence ratings. *Neuroscience of Consciousness*, 2017(1), nix007.
- Fukaya, T. (2013). Explanation generation, not explanation expectancy, improves metacomprehension accuracy. *Metacognition Learning*, 8, 1-18.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis* (3rd ed.). Chapman & Hall.
- Glenberg, A.M., Wilkinson, A.C. & Epstein, W. (1982). The illusion of knowing: Failure in the self-assessment of comprehension. *Memory & Cognition*, 10, 597-602.
- Gu, Y., & Xu, G. (2020). Partial identifiability of restricted latent class models. *The Annals of Statistics*, 48(4), 2082-2107.
- 市川伸一・南風原朝和・杉澤武俊・瀬尾美紀子・清河幸子・犬塚美輪・村山航・植阪友理・小林寛子・篠ヶ谷圭太 (2009). 数学の学力・学習力診断テスト COMPASS の開発. 認知科学, 16 (3), 333-347.
- Junker, B. W., & Sijtsma, K. (2001). Cognitive

assessment models with few assumptions, and connections with non-parametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 25(3), 258-272.

- Kruschke, J. K. (2015). *Doing Bayesian Data Analysis: A tutorial with R, JAGS, and Stan*. (2nd ed). London, UK: Academic Press.
- Levy, R., & Mislevy, R. J. (2016). *Bayesian psychometric modeling*. CRC Press.
- 光永悠彦 (2022). テストは何のためにあるのかー項目反応理論から入試制度を考える ナカニシヤ出版.
- 文部科学省 (2019). 学習評価の在り方ハンドブック 小・中学校編 <https://www.nier.go.jp/kaihatsu/pdf/gakushuhyouka/R010613-01.pdf>
- Plummer, M. (2017). *JAGS Version 4.3.0 user manual*. Lyon, France. Retrieved from <http://sourceforge.net/projects/mcmc-jags/>
- R Core Team. (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rupp, A. A., Templin, J., & Henson, R. A. (2010). *Diagnostic measurement. Theory, Methods, and Applications*. New York: Guilford.
- Rychen, D. S., & Salganik, L. H. (Eds.). (2003). *Key competencies for a successful life and a well-functioning society*. Hogrefe & Huber.
- Selker, R., van den Bergh, D., Criss, A. H., & Wagenmakers, E. J. (2019). Parsimonious estimation of signal detection models from confidence ratings. *Behavior Research Methods*, 51 (5), 1953-1967.
- 島津奈留・岡田謙介 (2022). 信号検出理論の基本的な方法と理論的展開. 行動計量学, 49 (1),

63-82.

清水裕士 (2018). 心理学におけるベイズ統計モデリング. *心理学評論*, 61(1), 22-41.

Su, Y. S., & Yajima, M. (2021). *R2jags: Using R to run "JAGS"* (R package version 0.7-1). Retrieved from <http://CRAN.R-project.org/package=R2jags>

Tatsuoka, K.K. (1983). Rule space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. *Journal of educational measurement*, 20, 345-354.

豊田秀樹 (2002). 項目反応理論 [入門編] 朝倉書店.

植阪友理・鈴木雅之・清河幸子・瀬尾美紀子・市川伸一 (2014). 構成要素型テスト COMPASS に見る数学的基礎学力の実態: 「基礎基本は良好, 活用に課題」は本当か. *日本教育工学会論文誌*, 37 (4), 397-417.

Wickens, T. D. (2002). *Elementary signal detection theory*. Oxford university press.

Yamaguchi, K., & Okada, K. (2020). Variational Bayes inference for the DINA model. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 45(5), 569-597.

Zhan, P., Jiao, H., Man, K., & Wang, L. (2019). Using JAGS for Bayesian cognitive diagnosis modeling: A tutorial. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 44(4), 473-503.

Zimmerman, B. J., & Schunk, D. H. (Eds.). (2011). *Handbook of self-regulation of learning and performance*. Routledge.

APPENDIX A.

HO-DINA モデルにおける項目レベルのパラメタ $s_j$ および $g_j$ の事後期待値と事後標準偏差

項目	$s_j$		$g_j$	
	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD
1	.15	.06	.43	.18
2	.03	.02	.75	.21
3	.18	.09	.35	.20
4	.17	.07	.51	.14
5	.09	.03	.64	.24
6	.03	.02	.86	.08
7	.41	.07	.42	.13
8	.21	.10	.28	.15
9	.54	.07	.24	.13
10	.26	.05	.41	.21

APPENDIX B.

HO-DINA モデルにおけるアトリビュートレベルのパラメタ $\beta_k$ および $\xi_k$ の事後期待値と事後標準偏差

アトリビュート	$\beta_k$		$\xi_k$	
	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD
A1	-1.50	1.13	2.30	1.24
A2	-2.12	1.55	1.96	1.21
A3	-3.23	1.42	1.30	0.97

APPENDIX C.

Selker et al. (2019)のモデルにおける集団レベルのパラメタ $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $\mu_\mu$ ,  $\sigma_\mu$ の事後期待値と事後標準偏差

$a_\mu$		$b_\mu$		$\mu_\mu$		$\sigma_\mu$	
EAP	Post.SD	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD
1.79	.15	-1.31	.15	1.28	.21	1.64	.21

PPENDIX D.

Selker et al. (2019)のモデルにおける個人レベルのパラメタ $a_i, b_i, \mu_i, \sigma_i$ の事後期待値と事後標準偏差

ID	$a_i$		$b_i$		$\mu_i$		$\sigma_i$		ID	$a_i$		$b_i$		$\mu_i$		$\sigma_i$	
	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD		EAP	Post.SD	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD	EAP	Post.SD
1	2.49	0.71	-1.14	0.64	0.79	0.73	1.69	0.87	50	2.26	0.76	-1.31	0.84	1.27	0.86	1.81	0.85
2	1.85	0.78	-1.59	0.71	1.91	0.87	1.00	0.85	51	2.19	0.70	-1.56	0.64	0.80	0.79	1.87	0.85
3	0.87	0.63	-1.72	0.82	1.35	0.90	2.44	0.73	52	1.85	0.71	-1.97	0.74	0.98	0.87	1.99	0.81
4	1.66	0.75	-2.08	0.76	1.26	0.89	1.91	0.80	53	2.08	0.78	-1.46	0.86	1.44	0.86	1.80	0.87
5	1.64	0.74	-2.06	0.76	1.30	0.88	1.94	0.82	54	1.71	0.51	-0.24	0.47	0.86	0.68	1.33	0.82
6	2.26	0.70	-1.21	0.54	1.85	0.84	1.30	0.97	55	1.38	0.77	-2.24	0.80	1.66	0.93	1.20	0.90
7	1.28	0.76	-2.40	0.75	1.58	0.95	1.30	0.94	56	2.30	0.77	-1.11	0.74	1.61	0.81	1.73	0.86
8	1.54	0.58	0.54	0.67	0.60	0.76	2.08	0.77	57	1.62	0.73	-2.20	0.74	1.15	0.89	1.97	0.79
9	2.41	0.70	-1.21	0.56	0.97	0.79	1.84	0.88	58	1.34	0.48	-0.25	0.51	0.84	0.75	2.01	0.76
10	2.47	0.75	-0.95	0.69	1.69	0.79	1.77	0.85	59	2.07	0.79	-1.48	0.85	1.42	0.86	1.81	0.82
11	1.73	0.75	-1.90	0.80	1.38	0.87	1.83	0.79	60	1.74	0.76	-1.77	0.66	1.76	0.89	1.10	0.88
12	1.92	0.72	-1.68	0.56	1.57	0.92	1.45	1.01	61	2.17	0.78	-1.24	0.74	1.82	0.82	1.62	0.83
13	2.73	0.73	-0.74	0.64	1.64	0.76	1.83	0.88	62	1.53	0.85	-1.83	0.92	1.83	0.93	1.02	0.86
14	1.31	0.76	-2.33	0.77	1.58	0.93	1.22	0.92	63	3.16	0.77	-0.29	0.68	0.50	0.78	0.72	0.76
15	1.51	0.60	1.35	0.61	0.55	0.67	1.26	0.81	64	3.17	0.75	-0.28	0.64	0.55	0.78	0.83	0.81
16	1.61	0.72	-2.18	0.73	1.19	0.89	1.98	0.79	65	1.99	0.75	-1.48	0.68	1.60	0.83	1.75	0.84
17	1.42	0.80	-2.11	0.85	1.71	0.91	1.13	0.90	66	1.51	0.65	-1.70	0.73	0.72	0.86	2.53	0.73
18	1.83	0.77	-1.60	0.70	1.88	0.88	1.00	0.86	67	1.82	0.77	-1.56	0.69	1.88	0.87	1.00	0.86
19	3.09	0.75	-0.48	0.65	0.83	0.75	1.41	0.83	68	1.66	0.75	-2.09	0.75	1.28	0.87	1.92	0.81
20	1.45	0.63	-1.51	0.61	0.91	0.87	2.55	0.77	69	1.87	0.82	-1.62	0.86	1.60	0.88	1.69	0.81
21	1.73	0.76	-1.74	0.68	1.76	0.88	1.10	0.91	70	1.42	0.80	-2.07	0.82	1.68	0.91	1.12	0.89
22	1.25	0.74	-2.46	0.74	1.53	0.96	1.35	0.94	71	2.15	0.79	-1.20	0.72	1.80	0.82	1.59	0.85
23	1.49	0.65	-1.03	0.58	1.54	0.85	2.48	0.85	72	2.04	0.58	0.10	0.51	1.53	0.75	1.61	0.87
24	1.51	0.53	0.45	0.53	1.69	0.74	1.46	0.83	73	1.10	0.56	-0.31	0.66	1.86	0.84	1.45	0.81
25	1.44	0.80	-2.06	0.83	1.72	0.90	1.10	0.88	74	0.93	0.41	-0.11	0.47	1.70	0.77	1.54	0.86
26	1.84	0.79	-1.58	0.71	1.88	0.87	1.03	0.88	75	1.77	0.67	-1.18	0.66	0.99	0.81	2.50	0.73
27	1.30	0.76	-2.31	0.77	1.60	0.93	1.25	0.91	76	2.29	0.61	-0.67	0.52	0.56	0.86	2.25	1.12
28	1.65	0.74	-2.08	0.76	1.26	0.88	1.93	0.80	77	1.69	0.65	-1.36	0.63	0.78	0.85	2.45	0.85
29	1.48	0.50	-0.35	0.47	1.40	0.76	1.64	0.87	78	3.00	0.81	-0.29	0.72	0.41	0.76	0.54	0.64
30	1.61	0.62	-1.65	0.58	0.17	0.90	2.42	0.88	79	2.09	0.71	-1.56	0.57	1.08	0.85	1.92	0.88
31	1.66	0.74	-2.08	0.75	1.27	0.87	1.91	0.80	80	1.56	0.84	-1.84	0.89	1.83	0.90	0.99	0.86
32	1.57	0.57	0.28	0.60	0.94	0.78	2.26	0.79	81	1.84	0.71	-2.10	0.71	0.88	0.87	2.04	0.83
33	2.19	0.71	-1.57	0.64	0.79	0.81	1.86	0.85	82	2.07	0.71	-1.63	0.64	1.08	0.81	1.90	0.84
34	2.40	0.71	-1.19	0.64	1.08	0.77	1.81	0.84	83	1.92	0.67	-1.34	0.71	0.44	0.80	2.33	0.74
35	2.21	0.71	-1.42	0.60	1.13	0.79	1.89	0.85	84	1.03	0.56	1.17	0.56	-0.42	0.72	0.90	0.96
36	1.38	0.77	-2.24	0.81	1.63	0.93	1.18	0.89	85	0.83	0.60	-1.92	0.74	1.15	0.89	2.51	0.75
37	1.55	0.84	-1.83	0.91	1.83	0.91	1.03	0.86	86	2.35	0.75	-1.46	0.73	0.48	0.79	1.65	0.86
38	1.62	0.73	-2.18	0.73	1.16	0.89	1.97	0.81	87	1.32	0.50	-0.44	0.51	1.40	0.76	1.64	0.82
39	2.06	0.72	-1.47	0.61	1.46	0.82	1.78	0.84	88	1.32	0.76	-2.33	0.78	1.60	0.93	1.25	0.93
40	1.35	0.50	-0.42	0.48	1.69	0.79	1.60	0.87	89	0.96	0.42	0.19	0.51	0.60	0.72	1.82	0.82
41	1.85	0.73	-1.78	0.64	1.27	0.84	1.87	0.82	90	0.90	0.43	-0.67	0.54	0.82	0.79	2.07	0.83
42	2.43	0.73	-1.21	0.63	1.08	0.75	1.83	0.86	91	2.63	0.76	-0.83	0.64	1.68	0.78	1.78	0.86
43	2.08	0.79	-1.46	0.87	1.44	0.86	1.81	0.85	92	1.43	0.79	-2.09	0.84	1.68	0.92	1.14	0.90
44	1.81	0.78	-1.56	0.70	1.87	0.87	1.00	0.87	93	2.30	0.73	-1.16	0.61	1.66	0.80	1.72	0.88
45	1.66	0.74	-1.85	0.64	1.70	0.90	1.18	0.94	94	2.13	0.69	-1.71	0.62	0.57	0.81	1.86	0.87
46	1.36	0.76	-2.23	0.80	1.63	0.92	1.18	0.90	95	1.19	0.64	-0.78	0.70	1.37	0.85	2.71	0.77
47	1.92	0.72	-1.80	0.78	1.15	0.84	1.92	0.83	96	2.99	0.74	-0.57	0.68	0.98	0.75	1.58	0.84
48	0.52	0.40	-1.11	0.57	1.68	0.88	1.16	0.92	97	1.57	0.86	-1.86	0.92	1.84	0.91	1.01	0.87
49	1.93	0.74	-1.80	0.77	1.14	0.85	1.92	0.83									